华东师大二附中特级教师、数学首席教师滕永康编

SHUXUE

数学

GAOKAO JIAJIAO

高考家教

FUDAO JINGPIN

上册

辅导精品

集华生教学与家教心得

汇千余道辅导例题精华

帮你顺利理清解题思路

助你考入理想高等学府

上海教育出版社

华东师大二附中特级教师、数学首席教师滕永康编

数学高考家教

上册

辅导精品

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学高考家教辅导精品. 上册 / 滕永康主编. —上海:
上海教育出版社,2003.10 (2006.9 重印)
ISBN 7-5320-9157-0

Ⅰ.数... Ⅱ.滕... Ⅲ.数学课-高中-习题-升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 091808 号

数学高考家教辅导精品

滕永康 编

上 册

上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社 出版发行

易文网:www.ewen.cc

(上海永福路 123 号 邮编:200031)

各地新华书店经销 上海江杨印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 18.5 插页 1 字数 441,000

2003 年 10 月第 1 版 2006 年 9 月第 2 次印刷

印数 9,001-11,250 本

ISBN 7-5320-9157-0/G·9049 定价:24.00 元

前　言

为了帮助高中学生扎实地打好数学基础，使之在高考时能取得优异的成绩，并为进一步的深造创造有利的条件，我们根据最新教学大纲的要求、当前高中数学教改的趋向、近年来数学高考试题的特点，在几十年的数学教学实践经验及多年进行家教辅导的基础上，精心编制出一批具有典型、代表性的内容，采用例题的形式编写了此书. 鉴于目前社会上已有不少高中数学的能力训练题、自测试卷等复习资料，为减少篇幅，本书中不再编写练习题.

由于编写本书的目的在于帮助学生进行高考前的数学自学辅导，因此书中每道例题在给出其解法前，均有详尽的解题思路分析，便于学生通过本书的学习不仅能"知其然"，而且能"知其所以然"，以利学生日后能将学到的知识"举一反三"、"触类旁通"地灵活应用. 同时在每道题的解法后又均有"说明"部分，"说明"中既有对有关概念的深入剖析，又有典型解法的归纳、总结，更有如何学好数学的方法渗透，通过"说明"部分的学习，达到帮助学生既能正确、全面、深刻、灵活地理解有关的知识点，又能提高学生分析问题、解决问题的能力，更能增强学生可持续发展的能力.

在使用本书时，如何才能极大限度地发挥本书的作用，使之取得切实的效果呢？建议你在学习每一道例题时，先不要急于查看题目的解答，将解答用纸有意遮盖起来，首先自己动脑筋设法加以解答，然后再品味书中的思路分析及解法，对照自己的解法，从中吸取失败的教训、总结成功的经验，并从例题的说明中细细体会作者的意图. 如果你能持之以恒，必将迅速巩固你的双基知识，提高你的分析问题、解决问题的能力. 还可以针对自己在平时学习的过程中暴露出来的某些薄弱环节，对照书中的有关章节作重点阅读、学习. 书中打"*"号标记的例题均有一定难度，对包括准备参加文科类数学高考的大多数学生来说初次阅读时不妨跳过去，暂不学习. 本书中，我们还用细黑体标出了一些补充规律，可供参加理科类数学高考的学生参阅.

本书中例题较多，内容相当丰富，使用时最好先作一个规划，科学、合理地安排进度，切莫求胜心切，盲目赶进度，殊不知"欲速则不达".

本书在编写过程中，得到了袁丽智、李素恩、俞臻颖等同志的不少帮助，在此一并表示感谢. 本书如有疏漏之处，敬请不吝赐教，以便再版时修改、补充.

作　者

2003 年 6 月

目　录

代数部分

代 数 部 分

第一章 集 合

例 1 已知集合 A 与 B 分别为 $2x^2+px+q=0$ 与 $6x^2+(2-p)x+5+q=0$ 的解集，且 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，求 $A\cup B$.

分析：只要理解集合的表达形式 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ 的含意是：$\frac{1}{2}$ 是已知中两个方程的公共根，本题即可迎刃而解.

解 把 $\frac{1}{2}$ 代入两个已知方程，得

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2+\frac{1}{2}p+q=0,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\times 6+(2-p)\times\frac{1}{2}+5+q=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=7,\\ q=-4.\end{cases}$$

把 p、q 的值代入两个已知方程，可以解得 $A=\left\{\frac{1}{2},-4\right\}$，$B=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$.

$\therefore\quad A\cup B=\left\{-4,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$.

说明： 要注意集合表达式中的元素不能重复出现，因此尽管 $A=\left\{\frac{1}{2},-4\right\}$，$B=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$，但不可以把 $A\cup B$ 表示成 $\left\{-4,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$.

例 2 已知 $f(x)=x^2+px+q$，$A=\{x\mid x=f(x)\}$，$B=\{x\mid x=f[f(x)]\}$.

(1) 求证：$A\subseteq B$; (2) 如果 $A=\{-1,3\}$，求 B.

分析：(1) 欲证 $A\subseteq B$，只需证明：对任意的 $x_0\in A$，都可推得 $x_0\in B$.

(2) 由已知可知：方程 $x=x^2+px+q$ 的两个根分别为 -1、3，于是利用方程根的定义，借助于解方程组可求得 p、q 的值. 进而通过解方程：$x=f[f(x)]$，可求得集合 B 的元素.

(1) **证明** 设 $x_0\in A$，由 $A=\{x\mid x=f(x)\}$，得 $x_0=f(x_0)$.

$\because\quad f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$，$\therefore\quad x_0\in B$，即 $A\subseteq B$.

(2) **解** 由 $A=\{-1,3\}$，可知方程 $x=x^2+px+q$，即 $x^2+(p-1)x+q=0$ 的两个根为 -1、3.

于是 $\begin{cases}-1+3=-(p-1),\\ (-1)\times 3=q,\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}p=-1,\\ q=-3.\end{cases}$

从而 B 的元素是方程 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$，即 $(x^2-x-3-x)(x^2-x-3+x)=0$ 的根.

$\therefore\quad x=-1, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$，即 $B=\{-1,3,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$.

说明： 本例是集合语言运用的典型，依靠集合语言建立数学模型，使问题获解.

例 3 已知集合 $A=\{9,a+4,a^2-2a+2\}$，$B=\{2a+3,(2a-3)^2,a^2-4a+12\}$，

若 $A=B$，求 a 的值.

分析一：虽然由 $\begin{cases}A=B,\\9\in A,\end{cases}$ 可知 $9\in B$，但由于集合 B 中 3 个元素均有等于 9 的可能，因此需对这些情况一一讨论，即对集合 B 中 3 个元素分类进行讨论.

解法一　由题意，(i) 令 $\begin{cases}2a+3=9,\\(2a-3)^2\neq 9,\\a^2-4a+12\neq 9,\end{cases}$ 无解.

(ii) 令 $\begin{cases}2a+3\neq 9,\\(2a-3)^2=9,\\a^2-4a+12\neq 9,\end{cases}$ 可解得　$a=0$.

(iii) 令 $\begin{cases}2a+3\neq 9,\\(2a-3)^2\neq 9,\\a^2-4a+12=9,\end{cases}$ 可解得　$a=1$.

当 $a=0$ 时，$A=\{9,4,2\}$，$B=\{3,9,12\}$，$A\neq B$；

当 $a=1$ 时，$A=\{9,5,1\}$，$B=\{5,1,9\}$，$A=B$.

因此所求实数　$a=1$.

分析二：可先通过集合相等的必要条件：集合中的元素之和相等，来缩小实数 a 的取值范围（由集合 A、B 的元素之和相等，可得一个关于 a 的一元二次方程），再在缩小的取值范围内求得满足题意的 a.

解法二　$A=B\Rightarrow 9+(a+4)+(a^2-2a+2)=(2a+3)+(2a-3)^2+(a^2-4a+12)$ $\Rightarrow 4a^2-13a+9=0$.

解上述一元二次方程，得　$a=1,\ \frac{9}{4}$.

当 $a=1$ 时，$A=\{5,1,9\}$，$B=\{5,1,9\}$，$A=B$；

当 $a=\frac{9}{4}$ 时，易知 $A\neq B$（检验过程略）.

因此所求实数　$a=1$.

说明：(1) 解法二显见比解法一简捷.

(2) **在解数学题时**，有时可以用“充要条件”来解，**有时可以先用“必要条件”来缩小范围，迅速、简捷地求出解**，具体情况具体分析.

例 4　已知集合 $A=\{a,a^2,ab\}$，集合 $B=\{a,b,1\}$，$A=B$，求实数 a、b 的值.

分析一：显然，集合 A 中的元素 a 与集合 B 中的元素 a 是相同的. 除此之外，集合 A 中的元素 a^2、ab 应分别与集合 B 中的哪一个元素相等，无法立即断定，因此需分类讨论.

解法一　由题意，

(i) 令 $\begin{cases}a=a,\\a^2=b,\\ab=1,\end{cases}$ 可解得　$a=1$.　此时集合 B 中有两个元素都为 1，应舍去.

(ii) 令 $\begin{cases}a=a,\\a^2=1,\\ab=b,\end{cases}$ 可解得　$a=1$（舍去）；$a=-1$.　此时 $b=0$.

综上可得　$a=-1$，$b=0$.

分析二：可先通过集合相等的必要条件：集合中的元素之积相等，求得 a、b 的值，再在

所得的 a、b 的值中，选取满足题意者，即为本题的解.

解法二 $A=B\Rightarrow a\cdot a^2\cdot ab=a\cdot b\cdot 1\Rightarrow ab(a^3-1)=0$.

显然 $a\neq 0$, $a\neq 1$, （为什么） $\therefore$ $b=0$. 此时集合 $A=\{a, a^2, 0\}$, $B=\{a, 0, 1\}$.

于是 $a^2=1$. 解之,得 $a=-1$.

当 $b=0$, $a=-1$ 时,$A=\{-1, 1, 0\}$, $B=\{-1, 0, 1\}$,满足题意:$A=B$.

说明:虽然本例与上例的解法二都先通过集合相等的必要条件来解,但本例中利用了集合中的元素之积相等,而上例中利用了集合中的元素之和相等.望读者能细加领会这两者之间的区别与联系.

例 5 如果集合 $M=\{x\mid x=3m+1, m\in\mathbf{Z}\}$, $P=\{y\mid y=3n+2, n\in\mathbf{Z}\}$, $x_0\in M$, $y_0\in P$, 求 x_0y_0 与集合 M、P 的关系.

分析:欲判断元素 x_0y_0 与集合 M、集合 P 的关系,只需判断对任一 $x_0\in M$, $y_0\in P$, x_0y_0 是否能表示成 $3k_1+1(k_1\in\mathbf{Z})$ 或 $3k_2+2(k_2\in\mathbf{Z})$ 的形式.

解 $\because$ $x_0\in M$, $\therefore$ $x_0=3m_0+1$, $m_0\in\mathbf{Z}$.

同理, $y_0=3n_0+2$, $n_0\in\mathbf{Z}$.

$x_0y_0=(3m_0+1)(3n_0+2)=9m_0n_0+6m_0+3n_0+2=3(3m_0n_0+2m_0+n_0)+2$.

$\because$ m_0、$n_0\in\mathbf{Z}$, $\therefore$ $3m_0n_0+2m_0+n_0\in\mathbf{Z}$. 因此 $x_0y_0\in P$.

说明:(1) 在上述解法中,由于 $x_0\in M$ 表示 x_0 是集合 M 中任一元素,因此应把 x_0 表示成 $3m_0+1$ $(m_0\in\mathbf{Z})$ 的形式,其中 m_0 表示某一个具体的整数,不可以把 x_0 表示成 $3m+1(m\in\mathbf{Z})$ 的形式.

(2) 在推出 $x_0y_0=3(3m_0n_0+2m_0+n_0)+2$ 后,根据 $3m_0n_0+2m_0+n_0\in\mathbf{Z}$, 把解答写成 $x_0y_0\notin M$ 也是不行的.殊不知这个判断虽然正确,但不够明确($x_0y_0\notin M$,仅表示元素 x_0y_0 不属于集合 M,至于元素 x_0y_0 是否属于集合 P 没有明确表态)!

***例 6** 已知集合 $P=\{x\mid x=3m+1, m\in\mathbf{N}^*\}$, $Q=\{y\mid y=5n+2, n\in\mathbf{N}^*\}$, 求 $P\cap Q$.

分析:由集合的交集定义可知:集合 $P\cap Q$ 中的元素即为被 3 除余 1 且被 5 除余 2 的所有正整数*.

解法一 分别把 P、Q 的元素改写成被 15 除余 n 的形式,可得

$$3m+1,\ m\in\mathbf{N}^*\Leftrightarrow\begin{cases}15k-11,\\15k-8,\\15k-5,\ k\in\mathbf{N}^*;\\15k-2,\\15k+1,\end{cases}\quad 5n+2,\ n\in\mathbf{N}^*\Leftrightarrow\begin{cases}15k-8,\\15k-3, k\in\mathbf{N}^*.\\15k+2,\end{cases}$$

因此 $P\cap Q=\{z\mid z=15k-8, k\in\mathbf{N}^*\}$.

解法二 由 $P\cap Q$ 可知:$3m+1=5n+2(m$、$n\in\mathbf{N}^*)$, 即 $3m=5n+1(m$、$n\in\mathbf{N}^*)$. ⊛

由 $n\in\mathbf{N}^*$ 可知:$n=3k-2$,或 $n=3k-1$,或 $n=3k(k\in\mathbf{N}^*)$.

(i) 若 $n=3k-2(k\in\mathbf{N}^*)$. $\because$ $5n+1=15k-9=3(5k-3)(k\in\mathbf{N}^*)$,

$\therefore$ $5n+1$ 能被 3 整除,等式⊛能成立.

(ii) 若 $n=3k-1(k\in\mathbf{N}^*)$. $\because$ $5n+1=15k-4(k\in\mathbf{N}^*)$,

$\therefore$ $5n+1$ 不能被 3 整除,等式⊛不成立.

(iii) 若 $n=3k(k\in\mathbf{N}^*)$. $\because$ $5n+1=15k+1(k\in\mathbf{N}^*)$,

$\therefore$ $5n+1$ 不能被 3 整除,等式⊛不成立.

---

* 根据最新国家标准,0 包括在自然数集 $\mathbf{N}$ 内.本书中,正整数集用 $\mathbf{N}^*$ 表示.

因此由 $5n+2=5(3k-2)+2=15k-8(k\in \mathbf{N}^*)$，可知 $P\cap Q=\{z\mid z=15k-8,\ k\in \mathbf{N}^*\}$.

说明：(1) 由于所有正整数被 3 除后产生的余数只有三种可能：0、1、2，而所有正整数被 5 除后产生的余数有五种可能：0、1、2、3、4，因此为了减少分类讨论的次数，上述解法中采用了由 $3m+1=5n+2$ 得等式⊛：$3m=5n+1$.

(2) 与所有奇数既可表示成：$\{n\mid n=2k+1,\ k\in \mathbf{Z}\}$，也可表示成：$\{n\mid n=2k-1,\ k\in \mathbf{Z}\}$，但所有正奇数不可表示成：$\{n\mid n=2k+1,\ k\in \mathbf{N}\}$，只能表示成：$\{n\mid n=2k-1,\ k\in \mathbf{N}\}$. 同样的理由，本例中的正整数 n 只可表示成 $n=3k-2$，或 $n=3k-1$，或 $n=3k(k\in \mathbf{N}^*)$，不可把它表示成 $n=3k$，或 $n=3k+1$，或 $n=3k+2(k\in \mathbf{N}^*)$.

(3) 本例还可以利用等差数列来解：

由已知可知：集合 P 中元素组成一个以 4 为首项、3 为公差的等差数列：4, 7, 10, …；

集合 Q 中元素组成一个以 7 为首项、5 为公差的等差数列：7, 12, 17, ….

∴ $P\cap Q$ 中元素组成一个以 7 为首项、3×5 为公差的等差数列 $\{z_k\}$.　　(为什么)

易得 $z_k=7+15(k-1)=15k-8\ (k\in \mathbf{N}^*)$ [参见第四章§2 例 8(p152)].

因此 $P\cap Q=\{z\mid z=15k-8,\ k\in \mathbf{N}^*\}$.

* **例 7**　判断集合 $A=\{x\mid x=2k,\ k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=14p+36q,\ p、q\in \mathbf{Z}\}$ 的关系，并说明理由.

分析：欲判断集合 A、B 的关系，只需判断：(1)对任一 $x_1\in A$，能否得到 $x_1\in B$；(2)对任一 $x_2\in B$，能否得到 $x_2\in A$.

解　(1) 若 $x_1\in A$，则 $x_1=2k_1(k_1\in \mathbf{Z})$.

由 $14p+36q=2(7p+18q)$，且当 $p=-5$，$q=2$ 时，$7p+18q=1$，可得

$$x_1=2k_1=2[7\cdot(-5k_1)+18\cdot 2k_1].$$

上式中，$-5k_1\in \mathbf{Z}$，$2k_1\in \mathbf{Z}$，∴ $14\cdot(-5k_1)+36\cdot 2k_1\in B$，即 $x_1\in B$.

(2) 若 $x_2\in B$，则 $x_2=2(7p_1+18q_1)\ (p_1、q_1\in \mathbf{Z})$.

由 $7p_1+18q_1\in \mathbf{Z}$，可得 $x_2\in A$.

综上可知 $A=B$.

说明：从解法中可以看到：由 $x_2\in B$ 极易得到 $x_2\in A$；但由 $x_1\in A$ 却不易得到 $x_1\in B$. 其中 $7p+18q$ 在 $p=-5$，$q=2$ 时的值为 1 是关键的一步，利用它可把 $2k_1$ 表示成 $14(-5k_1)+36(2k_1)(k_1\in \mathbf{Z})$.

例 8　已知集合 $A=\{(x,\ y)\mid x<y<2x,\ x\in \mathbf{Z},\ y\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,\ y)\mid 2x+3y=60,\ x\in \mathbf{Z},\ y\in \mathbf{Z}\}$，求 $A\cap B$.

分析：可先通过解 $\begin{cases}x<y<2x,\\2x+3y=60,\\x\in \mathbf{Z},\end{cases}$ 求出 x 的值，再把解得的 x 的值一一代入方程 $2x+3y=60$，能使 $y\in \mathbf{Z}$ 的 x 与相应的 y 即是 $A\cap B$ 中的元素.

解　由题意，把 $x<y$，$y<2x$ 分别代入 $2x+3y=60$，可得 $\begin{cases}2x+3x<60,\\2x+3\cdot 2x>60.\end{cases}$

解之，得 $\dfrac{15}{2}<x<12$.

∵ $x\in \mathbf{Z}$，∴ $x=8,\ 9,\ 10,\ 11$.

再把上述 x 的值分别代入 $2x+3y=60$，当 $x=9$ 时，$y=14$；当 $x=8,\ 10,\ 11$ 时，$y\notin \mathbf{Z}$.

因此 $A\cap B=\{(9,\ 14)\}$.

说明：(1) 上述解法的思路与例 3、例 4 的解法二的思路相同，都是先利用“必要条件”来缩小范围.

(2) 本例的集合中的元素是(x, y),因此由$x=9$, $y=14$可得$A\cap B=\{(9, 14)\}$,绝不可把$A\cap B$表示成$\{9, 14\}$.

例 9 已知集合$A=\{-4, x+3, x^2-2x+2, x^3+x^2+3x+7\}$, $B=\{2, 4, x^3-2x^2-x+7\}$, $A\cap B=\{2, 5\}$,求x.

分析:鉴于集合A中有三个元素含有x,而集合B中仅有一个元素含有x,因此可从集合B入手来解本例.

解 由题意,令$x^3-2x^2-x+7=5$, 即 $x^3-2x^2-x+2=0$,可得

$(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)=0$. 解之,得 $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

当$x_1=2$时,$A=\{-4, 5, 2, 25\}$, $B=\{2, 4, 5\}$, $A\cap B=\{2, 5\}$,满足题意.

当$x_2=-1$时,$A=\{-4, 2, 5, 4\}$, $B=\{2, 4, 5\}$, $A\cap B=\{2, 4, 5\}$,不合题意.

当$x_3=1$时,$A=\{-4, 4, 1, 12\}$, $B=\{2, 4, 5\}$, $A\cap B=\{4\}$,不合题意.

综上可知 $x=2$.

说明:"已知$A\cap B=\{2, 5\}$,不仅要求集合A、B中均应有2、5,而且要求集合A、B中不能再有其他相同的数(元素)."

因此在检验$x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=1$是否满足题意时,绝不能仅看集合A中是否有元素:2与5,不然极易误认为$x_2=-1$也满足题意.

例 10 已知全集$I=\{x\mid x$是不大于19的质数$\}$,$A\cap\overline{B}=\{3, 5\}$, $B\cap\overline{A}=\{7, 19\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{2, 17\}$,求$A$、$B$.

分析:借助于"数形结合"——集合"文氏图",可使本例迎刃而解.

解 画出文氏图(图1-1),根据$I=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $A\cap\overline{B}$, $B\cap\overline{A}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$,可先确定3、5、7、19、2、17的位置,再确定11、13的位置.

由此可得 $A=\{3, 5, 11, 13\}$, $B=\{7, 11, 13, 19\}$.

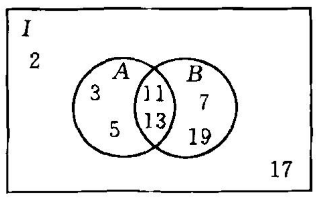

图 1-1

说明:"数形结合"是数学中的一个重要的思想方法,利用"数形结合"往往可使很多数学问题化繁为简、化难为易.

在第三章函数的§6数形结合中将有详细的介绍.

例 11 已知集合$A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$, $B=\{x\mid mx+1=0\}$,如果$B\subset A$,求m的值.

分析:集合A中有两个元素:-3、2,因此为使$B\subset A$,需且仅需集合B中仅有一个元素:-3或2;或集合B为空集.

解 解方程$x^2+x-6=0$,得 $x=-3$,或$x=2$. 于是$A=\{-3, 2\}$.

$\therefore$ $B=\{-3\}$,或$\{2\}$,或$\varnothing$.

由此可知 $m=\frac{1}{3}$,或$m=-\frac{1}{2}$,或$m=0$.

说明:在解本例时,集合B为空集极易遗忘!殊不知空集是任何非空集合的真子集.

例 12 已知集合$A=\{x\mid x^2+(b+2)x+b+1=0, b\in\mathbf{R}\}$,求集合$A$中所有元素之和$S$.

误解:集合A中元素就是一元二次方程:$x^2+(b+2)x+b+1=0(b\in\mathbf{R})$的根$x_1$、$x_2$.

由$x_1+x_2=-(b+2)$,可得 $S=-(b+2)$.

评析:集合A中元素固然就是一元二次方程:$x^2+(b+2)x+b+1=0(b\in\mathbf{R})$的根$x_1$、$x_2$,但由于判别式$\Delta=(b+2)^2-4(b+1)=b^2$可以等于0(此时$b=0$),而相同的元素在集合中只能出现一次,因此此时集合A中只有一个元素x_1(即x_2),其和$\neq-(b+2)$.

正解 判别式 $\Delta = (b+2)^2 - 4(b+1) = b^2 \geqslant 0$.

(i) 若 $b = 0$,由方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$,可得 $x_1 = x_2 = -1$.

于是 $A = \{-1\}$, $\therefore$ $S = -1$.

(ii) 若 $b \neq 0$,由 $x_1 \neq x_2$,可知 $A = \{x_1, x_2\}$.

$\therefore$ $S = x_1 + x_2 = -(b+2)$.

说明:(1) 对一元二次方程:$x^2 + (b+2)x + b + 1 = 0(b \in \mathbf{R})$ 来说,两根之和确为 $-(b+2)$. 但对由方程的根为元素组成的集合来说,两根不相等时,集合中有两个元素;两根相等时,集合中仅有一个元素.解题时两者的区别望能重视.

(2) 由于本例中方程的根极易求得,因此也可通过求出方程的根:x_1、x_2 来解.当然,仍需分 $x_1 = x_2$ 与 $x_1 \neq x_2$ 两种情况来解.

例 13 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax + a - 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$, 且 $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A}$, 求 a 的值.

分析:由于 $A = \{1, 2\}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A}$ 即为 $B \subseteq A$,因此只需对集合 B 分下述四种情况:$B = \varnothing$; $B = \{1\}$; $B = \{2\}$; $B = \{1, 2\}$ 来解即可.

解 $A = \{x \mid x = 1$,或 $x = 2\}$, $B = \{x \mid (x-1)[x-(a-1)] = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

由 $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A}$,可得 $B \subseteq A$.

$\therefore$ 集合 B 有四种可能:$B = \varnothing$; $B = \{1\}$; $B = \{2\}$; $B = \{1, 2\}$.

(i) 若 $B = \varnothing$,由 $B = \{x \mid (x-1)[x-(a-1)] = 0, a \in \mathbf{R}\}$,可知:集合 B 中至少有一个元素:1. 因此 $B = \varnothing$ 不可能.

(ii) 若 $B = \{1\}$,由方程:$(x-1)[x-(a-1)] = 0(a \in \mathbf{R})$,可知 $a - 1 = 1$, 即 $a = 2$.

(iii) 若 $B = \{2\}$,同(i) 可知:$B = \{2\}$ 不可能.

(iv) 若 $B = \{1, 2\}$,由方程:$(x-1)[x-(a-1)] = 0(a \in \mathbf{R})$,可知 $a - 1 = 2$, 即 $a = 3$.

综上可得 $a = 2$,或 $a = 3$.

说明:由于当 $B = \{1\}$, $B = \{2\}$ 时隐含着方程有等根(即 $\Delta = 0$),因此切不可在 $B = \{1\}$ 时,仅把 $x = 1$ 代入题中方程:$x^2 - ax + a - 1 = 0$;在 $B = \{2\}$ 时,仅把 $x = 2$ 代入题中方程:$x^2 - ax + a - 1 = 0$ 来求 a.

例 14 已知全集 $I = \mathbf{R}$,集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x > 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax + b < 0, x \in \mathbf{R}\}$, $C = \{x \mid x^3 + x^2 + x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $A \cap B = \{x \mid 2 < x < 4, x \in \mathbf{R}\}$, $\overline{A \cup B} = C$, 求 a、b 的值.

分析:解与不等式有关的集合问题时,如能借助数轴来进行分析,则往往比较直观,容易求得结论.

解 $A = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $C = \{0\}$.

如果设 $B = \{x_1, x_2\}$,其中 x_1、x_2 是方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两个根,那么要使 $\overline{A \cup B} = C = \{0\}$,必须 $x_1 = 0$,且 $x_2 > 2$(图 1-2).

又$\because$ $A \cap B = (2, 4)$, $\therefore$ $0 \leqslant x_1 \leqslant 2$,且 $x_2 = 4$.

于是可知:$x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

从而 $a = x_1 + x_2 = 4$, $b = x_1 x_2 = 0$.

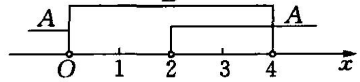

图 1-2

说明:解题时借助数轴来分析,也是"数形结合"思想的一种体现.

例 15 已知集合 $A = \{x \mid x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + ax + b \leqslant 0\}$, $A \cap B = \{x \mid 1 < x \leqslant 3\}$, $A \cup B = \{x \mid x + 2 > 0\}$, 求 a、b 的值.

分析:与上例一样,可借助数轴来进行分析.

解　由 $x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x+1)(x-1)$，可得　　$A=(-2,-1)\cup(1,+\infty)$.

如果设 $B=[x_1, x_2]$，其中 x_1、x_2 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个根，那么

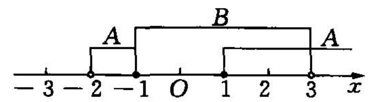

图 1-3

由 $A\cup B=(-2,+\infty)$，图 1-3 易知　　(Ⅰ) $\begin{cases}-2<x_1\leqslant -1,\\ x_2\geqslant 1.\end{cases}$

又∵　$A\cap B=(1,3]$，　∴　由上图易知　　(Ⅱ) $\begin{cases}x_1\geqslant -1,\\ x_2=3.\end{cases}$

由(Ⅰ)、(Ⅱ)可得　　$\begin{cases}x_1=-1,\\ x_2=3.\end{cases}$

从而　　$a=-(x_1+x_2)=-2$，$b=x_1x_2=-3$.

说明：集合 A 的元素为一元三次不等式：$x^3+2x^2-x-2>0$ 的解. 这种不等式的解可以通过"数轴标根法"来得到.

例 16　已知集合 $A=\{y\mid y=2x^2-6x-9,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-3x^2+6x+20,\ x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B\cap\mathbf{Z}$.

分析：集合 A、B 分别是二次函数 $y=2x^2-6x-9$，$y=-3x^2+6x+20$ 的值域，因此 $A\cap B\cap\mathbf{Z}$ 即为求这两个二次函数在整数范围内其相同的函数值.

解　$y=2x^2-6x-9=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{27}{2}$，　∴　$y\in\left[-\frac{27}{2},+\infty\right)$，　即　$A=\left[-\frac{27}{2},+\infty\right)$.

$y=-3x^2+6x+20=-3(x-1)^2+23$，　∴　$y\in(-\infty,23]$，　即　$B=(-\infty,23]$.

因此　　$A\cap B\cap\mathbf{Z}=\{y\mid -13\leqslant y\leqslant 23,\ y\in\mathbf{Z}\}$.

说明：本例不可通过 $2x^2-6x-9=-3x^2+6x+20$ 来解.　　(为什么)

***例 17**　已知集合 $A=\{(x,y)\mid x=m,\ y=-3m+2,\ m\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{(x,y)\mid x=n,\ y=a(n^2-n+1),\ n\in\mathbf{N}^*\}$，是否存在非零整数 a，使 $A\cap B\neq\varnothing$？证明你的结论.

分析：$A\cap B\neq\varnothing$ 的实质是方程组：$\begin{cases}y=-3x+2,\\ y=a(x^2-x+1),\end{cases}$ 即一元二次方程：$ax^2+(3-a)x+a-2=0$ 有正整数解.

由于无法立即判断出是否存在非零整数 a，使上述方程有正整数解，因此只能先利用一元二次方程有正整数解的必要条件：判别式 $\Delta\geqslant 0$，求出(尚未认可的)非零整数 a，再把这些 a 一一代入上述方程，观察是否有正整数解.

解　$\begin{cases}y=-3x+2,\\ y=a(x^2-x+1)\end{cases}\Rightarrow ax^2+(3-a)x+a-2=0.$

令 $\Delta_x=(3-a)^2-4a(a-2)=-3a^2+2a+9\geqslant 0$，得　　$a\in\left[\frac{-2\sqrt{7}+1}{3},\ \frac{2\sqrt{7}+1}{3}\right]$.

∵　a 为非零整数，　∴　$a=-1$，或 $a=1$，或 $a=2$.

把上述 a 的值分别代入 $ax^2+(3-a)x+a-2=0$，可知：当且仅当 $a=-1$ 时，x 为正整数.

因此　　$a=-1$.

说明：(1) 虽然 $\Delta=-3a^2+2a+9$ 为完全平方数也是一元二次方程：$ax^2+(3-a)x+a-2=0$ 有正整数解的必要条件，但由于 $\Delta=-3a^2+2a+9$ 何时为一个完全平方数不易确定，因此不易缩小范围求出(尚未认可的)非零整数 a，从而不能采用这个必要条件.

(2) 在解数学题时，如果无法用“充要条件”来解，有时可以先用有关的“必要条件”来缩小范围，再对所得的解一一加以检验[参见本章例 3 的说明(2)].

***例 18** 已知集合 $A=\{(x, y) \mid y=x^{2}+ax+2\}$，集合 $B=\{(x, y) \mid y=x+1, 0\leqslant x\leqslant 2\}$，求实数 a 的取值范围，使 $A\cap B\neq\varnothing$.

分析一：鉴于 $A\cap B\neq\varnothing$ 即表示方程 $x^{2}+ax+2=x+1$ 在 $[0, 2]$ 内有解，因此可利用二次函数图像的有关性质来解.

解法一 由 $y=x^{2}+ax+2=x+1$，可得 $\quad f(x)=x^{2}+(a-1)x+1=0.$ ①

(1) 若方程①仅有一个解且在 $(0, 2)$ 内，则由 $\begin{cases}\Delta_{x}\geqslant 0(\text{实可免去}),\\ f(0)\cdot f(2)<0,\end{cases}$ 可得 $\quad a<-\dfrac{3}{2}$.

(2) 若方程①有两个解 x_{1}、x_{2}，且均在 $(0, 2)$ 内，则由

$$\begin{cases}\Delta_{x}\geqslant 0,\\ f(0)\cdot f(2)>0,\\ x_{1}+x_{2}>0,\\ x_{1}+x_{2}<4,\end{cases}\text{可得}\quad\begin{cases}a\leqslant -1, \text{或 } a\geqslant 3,\\ a>-\dfrac{3}{2},\\ a<1,\\ a>-3.\end{cases}\qquad\therefore\ -\frac{3}{2}<a\leqslant -1.$$

(3) 若 $[0, 2]$ 的端点：0、2 是方程①的解(由于方程①有常数项 1，显然 $x=0$ 不可能是它的解)，则由 $\begin{cases}\Delta_{x}\geqslant 0(\text{实可免去}),\\ f(0)\cdot f(2)=0,\end{cases}$ 可得 $\quad a=-\dfrac{3}{2}$.

综合(1)、(2)、(3)，可知 $\quad a\leqslant -1$.

分析二：如果能注意到方程①的常数项为 1，二次项系数为 1，就可知只要方程①的实根 x_{1}、x_{2} 存在，x_{1}、x_{2} 必互为倒数. 于是当且仅当 $x_{1}+x_{2}>0$ 时，方程①在 $[0, 2]$ 内有解 $\left(\text{实际上由}\begin{cases}x_{1}+x_{2}>0,\\ x_{1}x_{2}=1,\end{cases}\text{可知至少有一个根在}(0, 1]\text{内}\right)$.

解法二 由 $y=x^{2}+ax+2=x+1$，可得 $\quad f(x)=x^{2}+(a-1)x+1=0.$ ①

设方程①的根分别为 x_{1}、x_{2}，则由 $x_{1}x_{2}=1$，可知需且仅需：

$\begin{cases}\Delta_{x}\geqslant 0,\\ x_{1}+x_{2}=1-a>0.\end{cases}$ 解之，可得 $\quad a\leqslant -1$.

说明：(1) 解法二比解法一简捷，但解法一适用面广.

(2) 本例如果利用一元二次方程的求根公式，借助于无理不等式来解，则将繁不胜繁.

(3) 利用二次函数图像的性质来解题的其他例题还可详见第三章函数中 §2 二次函数.

***例 19** 已知集合 $A=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{a}{x+3}\leqslant 1\right\}$，$B=\{x \mid x^{2}+px+q\leqslant 0\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$，$A\cap B=\{x \mid x^{2}\leqslant 4x\}$，求 a、p、q 的值.

分析：集合 A 实为由不等式组：$\begin{cases}x+3\neq 0,\\ [x-(a-3)][x-(-3)]\geqslant 0\end{cases}$ 的解为元素所组成，而不等式 $[x-(a-3)][x-(-3)]\geqslant 0$ 的解需视 $a-3$ 与 -3 的大小而定，因此需要分类讨论.

解 $A=\left\{x \,\middle|\, \begin{cases}x+3\neq 0,\\ [x-(a-3)][x-(-3)]\geqslant 0\end{cases}\right\}$，$A\cap B=[0, 4]$.

由 $A\cap B=[0, 4]$，可知方程 $x^{2}+px+q=0$ 有两个解，设它们为 x_{1}、x_{2}，且 $x_{1}<x_{2}$，则 $B=[x_{1}, x_{2}]$.

(i) 若 $a=0$，则 $A=(-\infty, -3)\cup(-3, +\infty)$.

于是由 $\begin{cases}A\cap B=[0,4],\\A\cup B=\mathbf{R},\end{cases}$ 可知 $B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4$,或 $x=-3\}$ (图 1-4).

但这与 $B=[x_1,x_2]$ 矛盾,即 $a=0$ 不合题意.

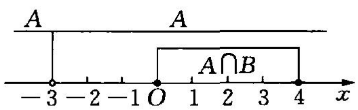

图 1-4

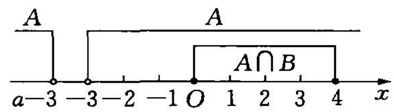

图 1-5

(ii) 若 $a<0$,则 $A=(-\infty,a-3]\cup(-3,+\infty)$.

与(i)同理可知:$\begin{cases}A\cap B=[0,4],\\A\cup B=\mathbf{R},\\B=[x_1,x_2]\end{cases}$ 不可能(同时)满足(图 1-5).

(iii) 若 $a>0$,则 $A=(-\infty,-3)\cup[a-3,+\infty)$.

于是由 $\begin{cases}A\cap B=[0,4],\\A\cup B=\mathbf{R},\\B=[x_1,x_2],\end{cases}$ 可知 $\begin{cases}a-3=0,\\x_1=-3,\\x_2=4\end{cases}$ (图 1-6).

因此 $\begin{cases}a=3,\\p=-(x_1+x_2)=-1,\\q=x_1\cdot x_2=-12.\end{cases}$

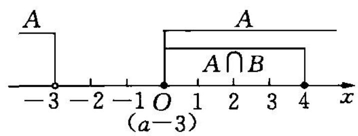

图 1-6

说明:分类讨论也是数学中重要的思想方法之一.

上述解法中既用了“分类讨论”的方法,又用了“数形结合”的方法.

例 20 已知集合 $A=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1$,且 $y=0\}$, $B=\{(x,y)\mid y=ax+b,x\in\mathbf{R}\}$,当 a、b 应满足什么条件时,$A\cap B\neq\varnothing$?

分析:集合 A 对应的图形是 x 轴上的线段 OC,其中 $C(0,1)$;集合 B 对应的图形是直线 $y=ax+b$,因此 $A\cap B\neq\varnothing$ 意味着直线 $y=ax+b$ 应与线段 OC 相交.利用它们相交的充要条件是 $y=f(x)=ax+b$ 在线段端点的函数值异号或为 0,本例即可迎刃而解.

解 设 $y=f(x)=ax+b$,则由 $f(0)\cdot f(1)\leqslant 0$,可得

$$(a\cdot 0+b)\cdot(a\cdot 1+b)=ab+b^2\leqslant 0.$$

说明:利用集合 A、B 所对应的图形,是本例能迎刃而解的关键.

例 21 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$(其中 $a\in\mathbf{R}$) 的解集分别记为 A 与 B,求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围. (1990 年上海市高考试题)

分析:$A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$. 鉴于 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)=[x-(3a+1)](x-2)$,如果直接求解集 B,就需要比较 $(3a+1)$ 与 2 的大小.而如果能注意到 $A\subseteq B$ 成立的充要条件是 $f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)=0$ 的两个实根分别在 $(-\infty,2a]$ 与 $[a^2+1,+\infty)$ 上,就可以利用二次函数的性质[回避讨论 $(3a+1)$ 与 2 的大小],通过解不等式组:$\begin{cases}f(2a)\leqslant 0,\\f(a^2+1)\leqslant 0\end{cases}$ 来求 a 的取值范围.

解 由 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$,得 $A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

记 $f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)$,则 $A\subseteq B$ 成立的充要条件是 $f(x)=0$ 的两个实根分别在区间 $(-\infty,\ 2a]$ 与 $[a^2+1,+\infty)$ 上.

于是 $\begin{cases} f(2a)=-2a^2+2\leqslant 0, & ① \\ f(a^2+1)=(a^2+1)^2-3(a+1)(a^2+1)+2(3a+1)\leqslant 0. & ② \end{cases}$

由②,得 $[(a^2+1)-(3a+1)][(a^2+1)-2]=(a+1)a(a-1)(a-3)\leqslant 0.$ ③

解①、③,可得 $a=-1$,或 $1\leqslant a\leqslant 3$.

说明:(1) 有关二次函数的详细内容(例题)可以参见第三章§2二次函数.

(2) 为便于迅速求得 $f(a^2+1)\leqslant 0$ 的解,可以先把 $f(a^2+1)$ 看作为 (a^2+1) 的二次三项式,先对 (a^2+1) 用"十字相乘法"分解因式,再对 a 因式分解(见上述解法).

第二章　不　等　式

§1　解不等式

例 1　求 a 的值，使不等式 $2x-1>a(x-2)$ 的解为一切实数.

分析：关于 x 的不等式：$mx>n$ 的解为一切实数的充要条件是 $\begin{cases}m=0,\\ n<0.\end{cases}$

解　$2x-1-ax+2a>0$，$(2-a)x>1-2a$.

令 $\begin{cases}2-a=0,\\ 1-2a<0,\end{cases}$ 得　$a=2$.

说明：本例的解题思路是先把原不等式改写成关于 x 的形如 $mx>n$ 的一元一次不等式，再利用它的解为一切实数的充要条件来解.

例 2　如果 $ax^2+abx+b>0$ 的解集为 $(2, 3)$，求 a、b 的值.

分析一：由 $f(x)=ax^2+abx+b>0$ 的解集为 $(2, 3)$ 可知：$f(x)=0$ 的两个根分别为 2、3，且 $a<0$.　（为什么）

解法一　由 $f(x)=ax^2+abx+b>0$ 的解集为 $(2, 3)$，可得 $\begin{cases}a<0,\\ f(2)=4a+2ab+b=0,\\ f(3)=9a+3ab+b=0.\end{cases}$

解之，可得　$a=-\dfrac{5}{6}$，$b=-5$.

分析二：由 $ax^2+abx+b>0$ 的解集为 $(2, 3)$ 可知：$ax^2+abx+b=k(x-2)(x-3)=k(x^2-5x+6)$，且 $k<0$.

解法二　由 $ax^2+abx+b>0$ 的解集为 $(2, 3)$，可得

$$ax^2+abx+b=k(x^2-5x+6)(k<0).$$

于是由 $\dfrac{a}{-1}=\dfrac{ab}{5}=\dfrac{b}{-6}$，可得　$a=-\dfrac{5}{6}$，$b=-5$.

说明：上述两个解法均是利用了一元二次不等式：$x^2+mx+n<0$ 的解集为 $(x_1, x_2)\Leftrightarrow$ 一元二次方程：$x^2+mx+n=0$ 的实根为 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$.

例 3　已知不等式 $ax^2-5x+b>0$ 的解集为 $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$，求不等式 $ax^2+5x+b<0$ 的解集.

分析：可以仿例 2 的解法，先求出 a、b，再来解不等式 $ax^2+5x+b<0$. 而如果能利用方程 $ax^2-5x+b=0$ 的根与方程 $ax^2+5x+b=0$ 的根之间的内在联系，就可以事半功倍.

解　设方程 $ax^2-5x+b=0$ 的根分别为 x_1、x_2，则方程 $ax^2+5x+b=0$ 的根必分别为 $-x_1$、$-x_2$.

于是由已知，可得　$\begin{cases}a<0,\\ \text{方程 } ax^2+5x+b=0 \text{ 的根分别为} \dfrac{2}{3}、-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$