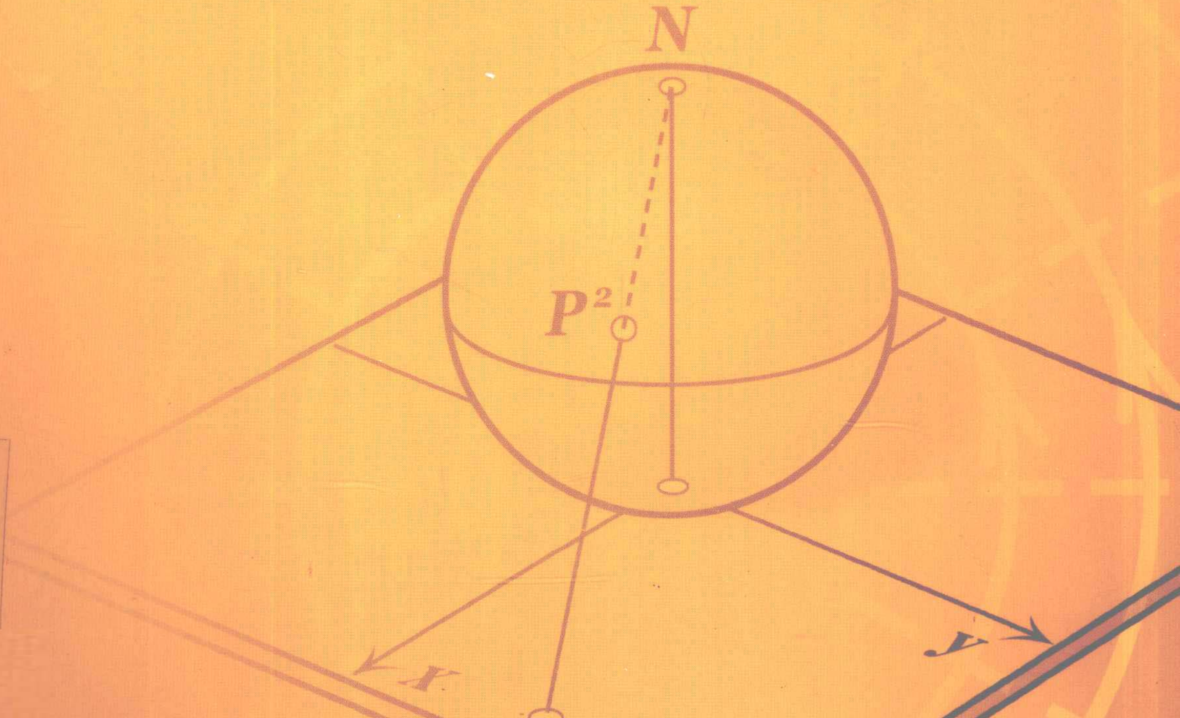
全国电力高等职业教育规划教材
职业教育电力技术类专业教学用书

高等数学

廖　虎　左　云　李智军
姚少林　谢树德　余庆红　合编



中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

全国电力高等职业教育规划教材
职业教育电力技术类专业教学用书

高等数学

廖　虎　左　云　李智军
姚少林　谢树德　余庆红　合编
陈兆斗　主审

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为全国电力高等职业教育规划教材。全书共分十章，采用模块式组合结构编排，例题丰富，涵盖面广，通用性强。内容分为必学部分与选学部分，选学部分加有“*”号，便于各类学校根据不同专业、不同要求及学生的实际水平灵活选择内容与例题。

为适应专科教学要求，体现专科特色，本书的编写通俗易懂、层次分明、深入浅出、说理浅显，不过分追求理论的严密性，侧重于应用，注重培养分析问题和解决问题的能力。

针对电力、动力专业特点，本教材增加了“拉普拉氏变换”、“计算方法”两部分内容，为专业课程的学习和高数在工程中的应用打好基础。

本书适合电力、机械、化工、建筑、冶金、计算机、经济等专业使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／廖虎等编．—北京：中国电力出版社，2005.8
全国电力高等职业教育规划教材
ISBN 7-5083-3458-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．廖…　Ⅲ．高等数学–高等学校：技术学校–教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 077468 号

中国电力出版社出版、发行
（北京三里河路 6 号　100044　http://jc.cepp.com.cn）
北京同江印刷厂印刷
各地新华书店经售

2005 年 8 月第一版　　2005 年 8 月北京第一次印刷
787 毫米×1092 毫米　16 开本　27.125 印张　665 千字
印数 0001—3000 册　　定价 **38.00** 元

序

高职高专教材建设是高职高专教育的重要组成部分，是一项极具重要意义的基础性工作，对高职高专教育培养目标的实现起着举足轻重的作用。

根据《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》(国发［2002］16号)，要充分发挥行业、企业、社会中介组织和人民团体在发展职业教育中的作用；行业主管部门要对行业职业教育进行协调和业务指导，制定行业职业教育和培训规划，参与相关专业的课程教材建设；积极推进课程和教材改革，开发和编写反映新知识、新技术、新工艺和新方法，具有职业教育特色的课程和教材。

为贯彻落实《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》精神，进一步推动高等职业教育的发展，加强高职高专教材建设，根据教育部关于通过多层次的教材建设，逐步建立起多学科、多类型、多层次、多品种系列配套的教材体系的精神，中国电力教育协会组织制订了反映电力行业特点、体现高等职业教育特色的全国电力高等职业教育教材规划。

高职高专教材建设应紧紧围绕培养高等技术应用性专门人才开展工作。基础课程教材要体现以应用为目的，以必需、够用为度，以讲清概念、强化应用为教学重点；专业课程教材要加强针对性和实用性。同时，高职高专教材建设不仅要注重内容和体系的改革，还要注重方法和手段的改革，以满足科技发展和生产实际的需求。此外，高职高专教材建设还要推动高职高专教育人才培养模式改革，促进高职高专教育协调发展。希望通过我们的共同努力，陆续推出一批内容新、体系新、方法新、手段新，在内容质量上和出版质量上有突破的高水平高职高专教材，力争尽快形成一纲多本、优化配套，适用于不同地区、不同学校、特色鲜明的高职高专教育教材体系。

在全国电力高等职业教育教材规划的组织实施过程中，得到了教育部、劳动和社会保障部、国家电网公司、中国电力企业联合会、中国高等职业技术教育研究会、有关院校和广大教师的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

全国电力高等职业教育教材规划工作是一项长期性任务，今后将根据相关专业课程体系改革和教学需要不断补充完善。在教材的使用过程中，请大家随时提出宝贵的意见和建议，以便今后修订或增补。(联系方式：100761 北京市宣武区白广路二条1号综合楼9层　中国电力教育协会教材建设办公室 010-63416237)

中国电力教育协会

前言

高等数学是理工科各专业的基础理论课，它在生产实践和各专业领域中都有广泛的应用。因此，学好这门课程具有十分重要的意义。

但是，在学习这门课程的时候，往往会发生如下的现象：一是感到内容太多，头绪纷乱、无从下手；二是学后忘前，遗忘率高；三是概念、法则等易发生混淆，或运用时忽略前提条件等等。产生这种原因之一是对这门课的基础知识还没有真正的掌握，对于它的理论结构与层次还没有揭示出来。因此，要杜绝上述现象的发生，要必须充分认识掌握知识系统、总结知识（逻辑）结构的必要性与重要性，学会构筑知识内在逻辑结构的方法。

下面通过数学的发展历史与教学过程来回答上述认识问题，并通过学习阶段的实践来回答上述方法问题。

数学经过漫长的历史发展，特别是到 17 世纪后半期与 18 世纪前半期，整个数学发生了全面而深刻的变化，数学对象产生了根本性的扩张。首先，在 1637 年由笛卡儿（Descartes.R.）创立了解析几何学，它构筑了高等数学的基础部分。在此基础上，牛顿（Newton.I.）于 1665～1666 年、莱布尼兹（Leibniz.G.W.）于 1682～1688 年分别从研究物理学的瞬时速度和几何的切线斜率问题出发，彼此独立地创立了微积分学。随后又产生了数学分析的其他分支，如级数论与微分方程等。到了 19 世纪，法国数学家柯西（Cauchy.A.L）于 1821 年出版了他的《分析教程》，开始用极限来定义导数与积分。到 1856 年，德国数学家威尔斯特拉斯（Weierstrass.K.）进一步用数学符号ε—δ 来表示柯西的极限概念，这就是一般高等数学教程中所采用的极限定义的历史来源。此外，数学家波尔察诺（Bolzano.B.）等对数学分析的奠基工作也做出了贡献。经典分析就是这样向着更精确、更完备的方向发展，直至现代分析的发展阶段。

这样漫长的经历，使高等数学带有两个显著的特征：

一是内容相当丰富。这就要求不能简单地停留在书本上学习，而要用较高的观点，系统、全面和有重点地去掌握其基本理论，要融会贯通、记忆深刻、综合运用。

二是理论体系中结构复杂、层次繁多。任何一个数学体系都有其内在层次与外在层次的区别。所谓外在层次，指的是形式的、表面的、局部性的数量关系及其联系。在其内在层次中，由于理论的展开是由简单到复杂，内容由个别到一般，由基础性概念到抽象更高的一般性概念，一环套一环地发展着的，所以又表现出多层次结构的特征。这样一种固有的多层次结构，只有在对其知识系统的挖掘与剖析中才能看清楚。

本教材在结构体系上、理论分析上充分体现了上述特点，力求做到深入浅出、以实例引入概念与方法、选例经典富有代表性，意图达到无师自通的目的，因此不失为一本好的自学参考书。

本教材对每个部分的内容包括章节、例题、练习的精选，都是按照步步启发的模式设计安排的，有利于施教者在教学过程中的发挥。教材每章的开头有提示，章末有内容小结，理

目录

极限与连续

极限是研究变量的基本方法和工具，它揭示了函数的变化趋势，又是学习微积分学的基础. 函数的连续性与极限的概念密切相关，它反映了函数变化的一种重要形态. 本章将在复习和加深理解函数有关知识的基础上，研究函数的极限和连续等问题.

第一节 函数

一、预备知识

1. 区间

在微积分中最常遇到的数集是由连续实数组成的集合，这类实数集可用区间表示. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，并称 a 和 b 为区间的端点.

定义 1.1.1 实数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，不包括端点；

实数集 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，包括端点；

实数集 $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 或 $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 称为半开半闭区间，记作 $[a,b)$ 或 $(a,b]$，分别包括左或右端点. 以上这些区间的长度均为有限值 $b-a$，因此都称为有限区间. 此外，

实数集 $\{x \mid x>a\}$，记作 $(a,+\infty)$；实数集 $\{x \mid x\geqslant a\}$，记作 $[a,+\infty)$；

实数集 $\{x \mid x<b\}$，记作 $(-\infty,b)$；实数集 $\{x \mid x\leqslant b\}$，记作 $(-\infty,b]$；

全体实数集 R，记作 $(-\infty,+\infty)$. 这些区间的长度均是无限值，因此都称为无限区间.

2. 邻域

定义 1.1.2 设 a 和 δ 都是实数，且 $\delta>0$，则集合 $U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为以 a 为中心，以 δ 为半径的邻域.

邻域还可以写作 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$，可见邻域就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$.

如果把邻域的中心 a 去掉，所得的集合 $U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域. 为了方便，有时把区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

二、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1.3 设 D 是由实数组成的一个集合，如果对于 D 中每一个确定的数值 x，按照某个对应关系，变量 y 都有确定的值和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上 x 的函数. 记为 $y=f(x)$. x 叫做自变量，y 叫做因变量. 与 x 相对应的 y 值，叫做函数值.

$$x \xrightarrow{f} y$$

如果自变量 x 取某一数值 x_0 时，函数 y 具有确定的对应值，那么就称函数在 x_0 处有定义（或有意义），这时，函数的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 所有使函数有定义的实数的集合，叫做函数的定义域，用 D 表示. 当 x 取遍定义域中的一切实数时，对应的函数值 y 的集合叫做函数的值域，用 M 表示. f 也可以看成函数定义域与值域两个集合之间的对应关系.

$$\{x \mid x \in D\} \xrightarrow{f} \{y \mid y \in M\}$$
$$\text{定义域} \qquad\qquad \text{值域}$$

在函数的定义中，如果对于 D 中每一个确定的元素 x，都有唯一的 y 与它对应，那么这种函数称为单值函数，否则称为多值函数. 例如，由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的以 x 为自变量的函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 就是一个多值函数，它的每一个分支 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=\sqrt{1-x^2}$ 都是单值函数.

如果函数的对应关系 f 是一一对应，即对于定义域 D 中的每个元素 x，都有值域 M 中唯一的元素 y 与它对应；同理，对于每一个 y 也有唯一的 x 与之对应，那么，由 f 的逆对应 f^{-1} 决定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，它们的关系如下图：

$$\{x \mid x \in D\} \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftharpoons}} \{y \mid y \in M\}$$

我们习惯上用 x 表示函数的自变量，y 表示因变量. 按反函数定义得到的表示形式，例如 $x=\sin y$ 总不习惯，所以，将 $x=f^{-1}(y)$ 人为换成 $y=f^{-1}(x)$；我们也把 $y=f^{-1}(x)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数. 注意：

（1） $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 表示的是同一种函数关系，前者是用 x 作为自变量表示 y；而后者是用 y 作为自变量表示 x；它们是同一个图象.

（2） $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 不是同一种函数关系，后者是用前者的反函数调换了 x 和 y 的位置而得到，所以 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是将 $y=f(x)$ 的图象中 x 和 y 轴互换后得到. 即将 $y=f(x)$ 的图象以第Ⅰ、Ⅲ象限角平分线为对称轴作对称图形而得到 $y=f^{-1}(x)$ 的图象，点 $P(a,b)$ 认为换成了点 $Q(b,a)$，这在函数的作图时很重要.

从函数的定义可知，构成函数的要素有两个：定义域和对应关系. 两要素不全相同的函数，就不是相同的函数. 例如，$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 表示两个不同的函数，这是因为它们的对应关系不同，y 的取值范围不同. 再如，$y=x-1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 表示两个不同的函数，这是因为它们的定义域不同. 而函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 虽然表示形式不同，但它们的定义域和对应关系都相同，因此，这两个函数是同一个函数. 对于两个函数只要它们的定义域和对应法则都分别相同，就表示同一函数，而与自变量及因变量用什么字母表示无关，如函数 $y=2x+1$ 与函数 $s=2t+1$ 表示相同的函数. 在今后研究函数时，必须首先注意函数的两个要素.

2. 函数的表示方法

表示函数的方法最常见的有三种：

（1）表格法.

将自变量的值与对应的因变量的值列成表格表示函数的方法叫做函数的表格表示法. 如数学用表中的三角函数表，对数表等等.

利用表格表示函数，自变量与因变量的关系一目了然，便于查阅，但仅限于定义域为有限集合或有一定规律的无限集合，否则就会造成数值不全的遗憾.

（2）图象法.

在直角坐标系中，以函数自变量的值为横坐标，以函数因变量的值为纵坐标，描出点，

再连成光滑曲线，这种用直角坐标系中的曲线表示函数的方法叫做函数的图象表示法.

利用图象表示函数直观，利于分析问题，但精确度较差.

（3）公式法（解析法）.

如果两个变量之间的对应关系借助于公式给出：要对自变量施行哪些数学运算以及应按照怎样的次序来进行运算，方能得出函数的对应值，这种用公式表示函数的方法叫做函数的公式（或解析）表示法. 最常见的函数的公式表示法，就是用一个含自变量 x 的表达式表示因变量 y 的方法，例如， $y=2+5\sin^2 x$， $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ 等都表示 y 是 x 的函数.

利用公式法表示函数虽有不够直观的缺点，但便于进行理论研究，仅当函数表示成数学式子时，才能对其进行微积分等高等运算.

在高等数学中，表示函数主要用公式法，以图象法作为辅助，很少用到表格法. 以下几种函数也属于公式法表示的函数关系.

1）分段函数

在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的函数称为分段函数. 应该注意的是：不管一个分段函数用几个解析式表示，都表示的是一个函数. 分段函数的定义域是各段定义区间的并集，求分段函数的函数值，应将自变量的值代入其所属区间的对应表达式，进行计算.

【例 1】 求函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$ 的定义域并作图. 其中 $\operatorname{sgn} x$ 称为符号函数.

解　$f(x)=\operatorname{sgn} x$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

其图象如图 1.1.1 所示.

【例 2】 电子技术中常见的一种脉冲波如图 1.1.2 所示，用公式法表示图中电压 u 和时间 t 的函数关系.

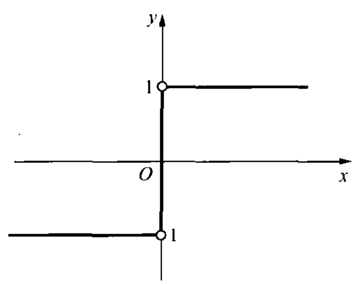


图 1.1.1

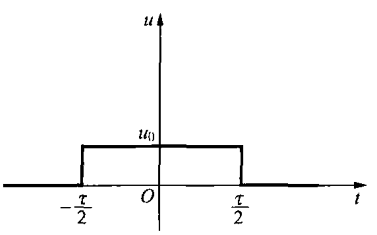


图 1.1.2

解　由图可知，这是一个分段函数，电压 u 和时间 t 的关系为 $u=\begin{cases}0, & t<-\dfrac{\tau}{2},\\ u_0, & -\dfrac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\tau}{2},\\ 0, & t>\dfrac{\tau}{2}.\end{cases}$

2）隐函数

如果自变量与函数的对应关系是用一个含 x, y 的方程 $F(x,y)=0$ 确定的，这种函数关系称为隐函数. 例如方程 $x^2+y^2=4$， $xy=e^{x+y}$ 中均隐含着 y 是 x 的函数.

以前我们学习的函数大都是函数 y 明显地用 x 的解析式表示出来 $y=f(x)$，这种函数就称为显函数.

3）参数方程确定的函数

如果自变量与函数的对应关系是用含某一参数的方程组来确定，即 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，其中 t 为参数，这种函数称为由参数方程确定的函数. 例如，圆心在原点半径为 R 的圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \end{cases} \quad (0\leqslant t<2\pi).$$

3. 函数的定义域

在用函数研究实际问题时，函数的定义域要根据问题的实际意义确定. 当不考虑函数的实际意义，抽象地研究函数时，函数的定义域是使解析式有意义的自变量的全体. 一般依据：

（1）分式的分母不为零.

（2）偶次根式的被开方式为非负数.

（3）对数式中的真数大于零.

（4）幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数考虑各自定义域.

（5）若函数表达式由几个式子组成，取各部分定义域的交集.

（6）分段函数的定义域为各段定义区间的并集.

【例 3】 求下列函数的定义域：

（1） $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$.（2） $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{x-2}$.（3） $y=\dfrac{1}{x}\lg(x+1)$.

解 （1）要使函数有意义，必须 $x^2-x-6\neq0$，即 $x\neq-2$ 且 $x\neq3$，所以函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$.

（2）要使函数有意义，必须 $\begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant1, \\ x-2\geqslant0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant3, \\ x\geqslant2, \end{cases}$ 所以 $2\leqslant x\leqslant3$，因此函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{x-2}$ 的定义域为 $[2,3]$.

（3）要使函数有意义，必须 $\begin{cases} x+1>0, \\ x\neq0, \end{cases}$ 即 $x>-1$ 且 $x\neq0$，所以函数 $y=\dfrac{1}{x}\lg(x+1)$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

4. 函数值的计算

函数 $y=f(x)$ 表示 y 是 x 的函数，如果 $f(x)$ 具体给出，记号 $f(\ \ )$ 表示自变量与因变量之间确定的对应规律. 如，给定函数 $y=f(x)=x^2-2$，记号 $f(\ \ )=(\ \ )^2-2$ 表示把 x 代入括号内进行运算而得到 y.

【例 4】 求函数 $y=f(x)=x^2-2$ 在 $x=-1$ 及 $x=1+\Delta x$ 处的函数值.

解 $f(-1)=(-1)^2-2=-1$，

$f(1+\Delta x)=(1+\Delta x)^2-2=1^2+2\Delta x+(\Delta x)^2-2=(\Delta x)^2+2\Delta x-1$.

【例 5】 已知 $f(x)=x+2$，求 $f(x-1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f[f(x)]$.

解 $f(x-1)=(x-1)+2=x+1$，

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+2$，

$f[f(x)]=f(x)+2=(x+2)+2=x+4$.

【例 6】 已知 $f(x-1)=x^2+x+3$，求 $f(x)$.

解 设 $x-1=t$，则 $x=t+1$，

因此 $f(t)=(t+1)^2+(t+1)+3=t^2+2t+1+t+1+3=t^2+3t+5$，

所以 $f(x)=x^2+3x+5$.

【例 7】 已知 $g(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0\\ 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$ 求 $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$g(0)$，$g(1)$，$g(3)$.

解 $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$，$g(0)=2\sqrt{0}=0$，$g(1)=2\sqrt{1}=2$，$g(3)=3+1=4$.

三、函数的几种特性

1. 奇偶性

定义 1.1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的区间，如果对于 D 内任意的 x，有

（1）$f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数.

（2）$f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图象关于 y 轴对称；奇函数的图象关于原点对称. 判断函数的奇偶性前，首先要判断函数的定义域区间是否关于原点对称.

【例 8】 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^2+1}$. （2）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

（3）$f(x)=x\cos x-x^2$. （4）$f(x)=\sqrt{x+1}$.

解 （1）函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 是关于原点对称的区间，且对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$f(-x)=\frac{\sin^2(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{\sin^2 x}{x^2+1}=f(x),$$

所以函数 $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^2+1}$ 为偶函数.

（2）函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 是关于原点对称的区间，且对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$$
$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x),$$

所以函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

（3）函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 是关于原点对称的区间，但对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$

$$f(-x)=(-x)\cos(-x)-(-x)^2=-x\cos x-x^2\neq f(x)\text{ 也}\neq -f(x),$$

所以函数 $f(x)=x\cos x-x^2$ 为非奇非偶函数.

（4）函数的定义域为 $[-1,+\infty)$，不是关于原点对称的区间，所以函数 $f(x)=\sqrt{x+1}$ 为非奇非偶函数.

2. 单调性

定义 1.1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，区间 $I\subseteq D$，如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有

（1）$f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加.

（2）$f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数；I 称为函数的单调区间.

单调增加函数的图象是沿横轴正向上升的，单调减少函数的图象是沿横轴正向下降的.

【例 9】 证明 $f(x)=x^4+2$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

证明 在 $(0,+\infty)$ 内任取 x_1,x_2，假设 $x_1<x_2$，因为

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^4+2)-(x_2^4+2)=x_1^4-x_2^4<0\text{，即 }f(x_1)<f(x_2),$$

所以 $f(x)=x^4+2$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

3. 有界性

定义 1.1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，区间 $I\subseteq D$，如果存在常数 $M>0$，使得对于任意的 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界. 否则，称 $f(x)$ 在 I 上无界.

如果函数 $f(x)$ 在 I 上有界，则在 I 上 $f(x)$ 的图象总能夹在平行于 x 轴的两条直线 $y=\pm M$ 之间.

例如，对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，且在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=\sin x$ 的图象夹在两条直线 $y=\pm 1$ 之间.

函数是否有界不仅与函数有关，而且还与给定的区间有关. 例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上有界（当 $x\in[1,2]$ 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$），但在 $(0,2)$ 上却无界（在 $(0,2)$ 上不存在 $M>0$，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立）.

4. 周期性

定义 1.1.7 对于函数 $f(x)$，如果存在常数 $T\neq 0$，使得在 $f(x)$ 的定义域内恒有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，且称常数 T 为函数 $f(x)$ 的周期.

由周期的定义可知，如果 T 为 $f(x)$ 的周期，则 nT（$n=\pm1,\pm2,\cdots$）也为 $f(x)$ 的周期. 通常周期函数的周期是指最小正周期. 例如，三角函数都是周期函数，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的

周期为 2π， $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的周期为 π.

对于周期函数，只要知道它在一个周期 T 内的图象，将这个图象按周期重复即可得到函数的全部图象. 因此，如果函数具有周期性，那么只要在长度等于周期的任何一个区间上来考察函数就可代替函数在全部定义域上的研究.

四、初等函数

1. 基本初等函数及其图象

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 在微积分中常见的函数都是由这五类基本初等函数构成的，这些函数在初等数学中已经学习过，这里对它们的图象进行简单的回顾，其性质请读者根据函数的四种特性自行描述.

（1）幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 是常数）.

幂函数的定义域与 α 的值有关. 因此，幂函数的图象随着 α 的不同，有不同的形状，常见幂函数的图象如图 1.1.3（$\alpha>0$ 时）和图 1.1.4 所示（$\alpha<0$ 时）.

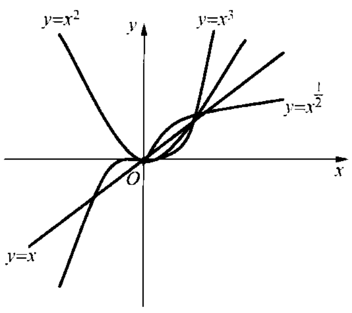


图 1.1.3

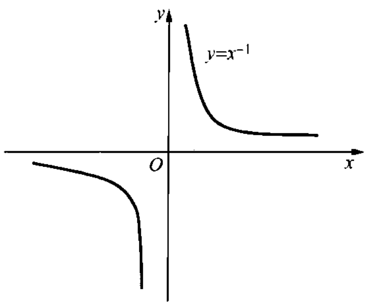


图 1.1.4

（2）指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

不论 a 取大于 0 且不等于 1 的何实数，指数函数的定义域都是 R. 指数函数的图象如图 1.1.5（$a>1$ 时）和图 1.1.6（$0<a<1$ 时）所示.

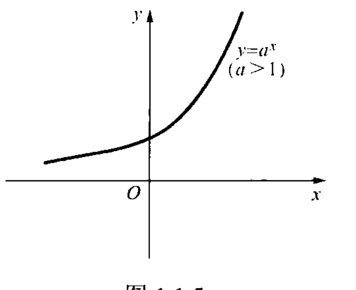


图 1.1.5

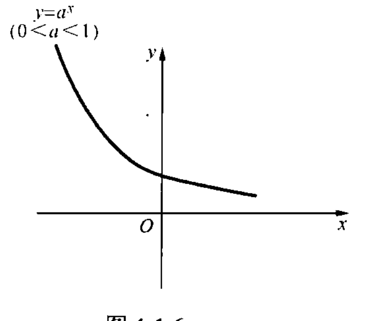


图 1.1.6

（3）对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

不论 a 取大于 0 且不等于 1 的任何实数，对数函数的定义域都是 $(0,+\infty)$. 对数函数的图象如图 1.1.7（$a>1$ 时）和图 1.1.8（$0<a<1$ 时）所示.

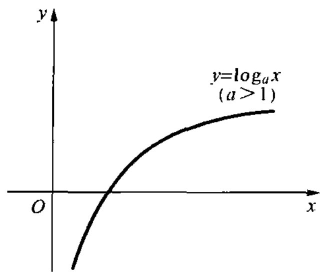


图 1.1.7

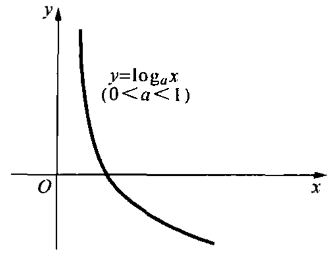


图 1.1.8

（4）三角函数 $y=\sin x$， $y=\cos x$， $y=\tan x$， $y=\cot x$， $y=\sec x$， $y=\csc x$.

$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的定义域为全体实数，图象如图 1.1.9 和图 1.1.10 所示.

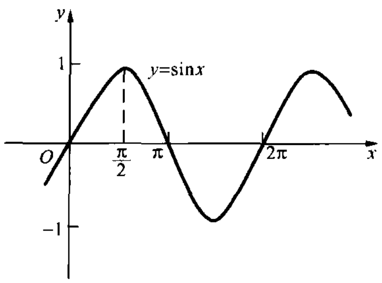


图 1.1.9

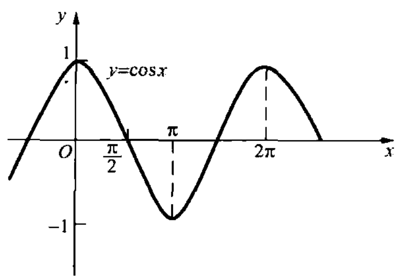


图 1.1.10

$y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，图象如图 1.1.11 所示.

$y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k\in Z)$，图象如图 1.1.12 所示.

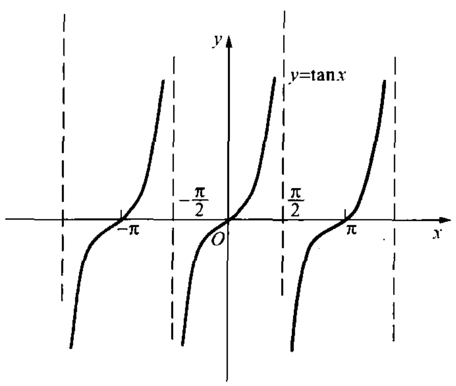


图 1.1.11

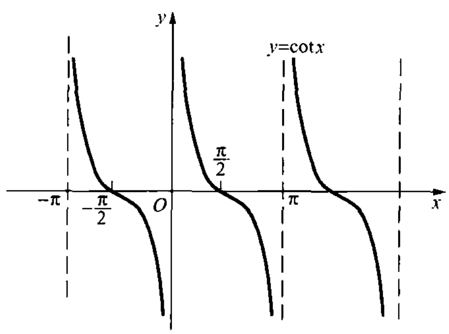


图 1.1.12

$y=\sec x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，图象如图 1.1.13 所示.

$y=\csc x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k\in Z)$,图象如图 1.1.14 所示.

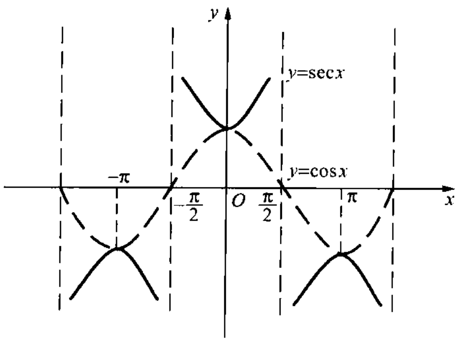


图 1.1.13

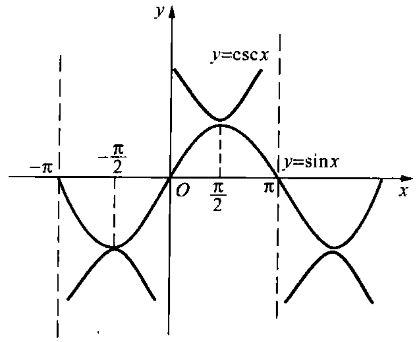


图 1.1.14

（5）反三角函数 $y=\arcsin x$， $y=\arccos x$， $y=\arctan x$， $y=\operatorname{arc}\cot x$.

$y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$，图象如图 1.1.15 和图 1.1.16 所示.

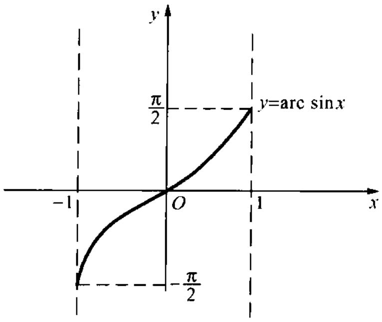


图 1.1.15

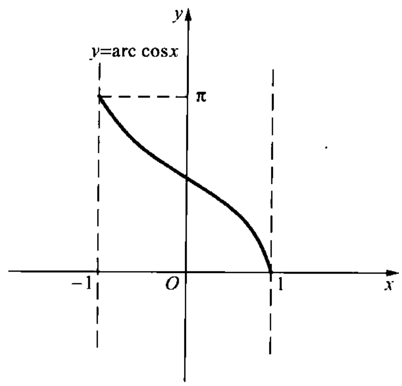


图 1.1.16

$y=\arctan x$ 和 $y=\operatorname{arc}\cot x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，图象如图 1.1.17 和图 1.1.18 所示.

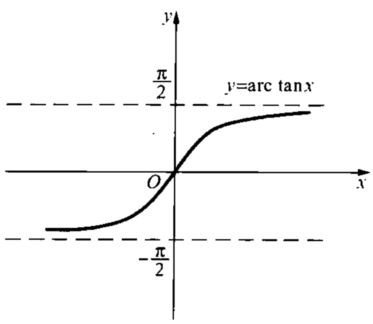


图 1.1.17

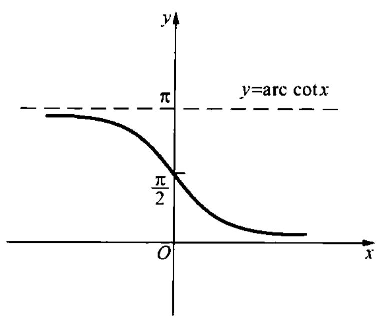


图 1.1.18

2. 复合函数

在很多实际问题中，变量间的函数关系，往往都是比较复杂的.