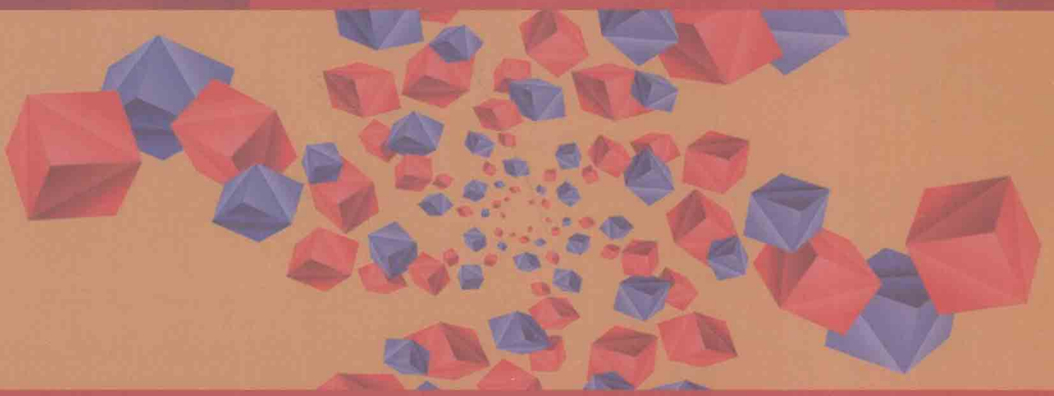
XIANDAI WULI ZHONG DE QUNLUN

现代物理中的群论

孙宗扬 / 编著

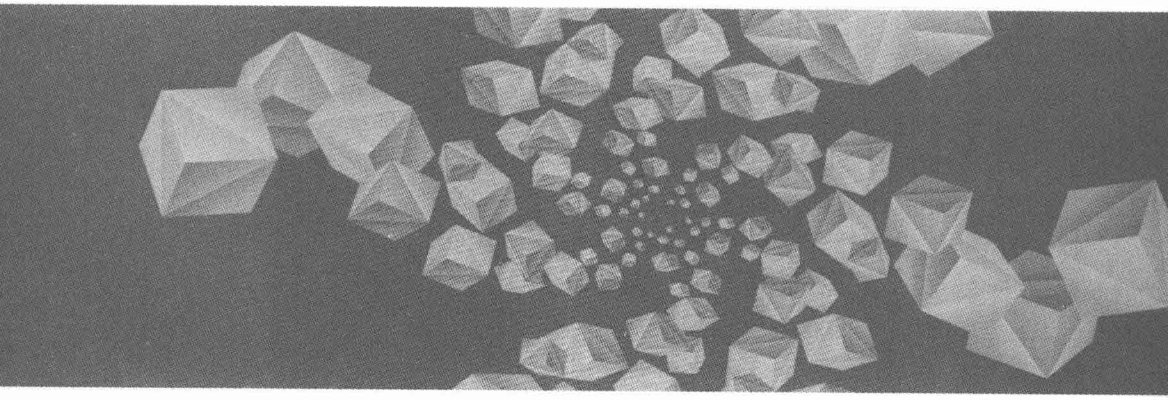


中国科学技术大学出版社

XIANDAI WULI ZHONG DE QUNLUN

现代物理中的群论

孙宗扬 / 编著



中国科学技术大学出版社

内容简介

本书作者在中国科学技术大学讲授群论前后有二十余年，有着颇为丰富的经验．本书从群论最基础的知识讲起，深入浅出，使得初学者能很快地入门，并使得读者能迅速地掌握群论的主要脉络，以进入现代物理理论的前沿．本书选择了在数学和物理中都十分重要的 S_n 置换群以及 SU(2)群和 SU(3)群作为实例而详细讨论，同时讨论一般性的 Lie 群及 Lie 代数．特别在 S_n 群中以杨图为工具，详尽地讨论了各种可能的表示．

本书适合于物理、应用数学、无线电子、自动控制、电子信息等专业高年级学生和研究生，以及有志于应用群论研究相关问题的各类人员．

图书在版编目(CIP)数据

现代物理中的群论/孙宗扬编著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2011.1
安徽省高等学校“十一五”省级规划教材
ISBN 978-7-312-02749-9

Ⅰ.现… Ⅱ.孙… Ⅲ.群论—应用—物理学—高等学校—教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 257503 号

出版发行 中国科学技术大学出版社
地址 安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
网址 http://press.ustc.edu.cn
印　　刷 安徽省瑞隆印务有限公司
经　　销 全国新华书店
开　　本 710 mm×960 mm 1/16
印　　张 18.25
字　　数 348 千
版　　次 2011 年 1 月第 1 版
印　　次 2011 年 1 月第 1 次印刷
印　　数 1—3000 册
定　　价 33.00 元

前　　言

群论始于18世纪30年代伽罗瓦(Galois)用根式求解一元多项式方程的研究，在研究过程中他引进了“群”的概念.20世纪初S. Lie将群的概念应用到微分方程的变换的讨论上，引出解析群或Lie群的重要概念.

由于物理规律有对称性，而群论是研究对称性的有力工具，故群论与物理学的结合是自然的事.实际上爱因斯坦(Einstein)在20世纪的最重大成就 $E = mc^2$，就是分析时空对称群(Lorentz群)的结果，这里 E 是物体的能量，m 是动质量，c 是光速.但这件事揭示了时空是有相互联系的，这在当时是非常惊人的见解，吸引了世人的注意，而忽略了其群论内涵.群论引入物理被认为是在20世纪30年代从维格纳(Wigner)研究分子光谱时开始的，后来经过外尔(Weyl)、拉卡赫(Racah)乃至萨拉姆(Salam)诸人的努力，群论逐渐在物理学特别是在理论物理学中生根，到盖尔·曼(Gell-Mann)从SU(3)群的十重态的分析中，推断出 Ω^- 乃至它的质量，随后被实验发现和证实.这件事给人留下了深刻的印象，从而在物理研究中采用群论的工具成为十分必要的.从1964年以后，物理学家从物理的角度对群论进行了深入细致的研究，特别是在弱电统一及强弱电统一中研究了其中的群论问题，获得了对这些系统中作用量的明晰的理解.最近在超对称规范场论及超弦研究中，群论更是一个十分重要的工具.

本书在中国科学技术大学作为教材使用了多年，内容主要涉及群论的基础知识及相关前沿问题，作者所在的单位——基础物理中心，即后来的天文与应用物理系给予了大力的支持，历任领导都给予了关心及指导，使得本书的材料选择和叙述方式都有了很大的改进，在这里表示衷心的感谢.但由于作者水平所限，不当之处在所难免，望读者给予批评指正.

下面我们简要地介绍本书的架构及主要的概念.

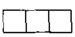
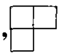
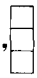
本书从最基础的知识开始，从群的定义讲起.群是一种集合，其中加了四条操作关系，从集合到群，立刻增添了很多深刻的性质，如单位元只有一个，左、右单位

元是同一个单位元；同时，对任意元素 a，其逆元素也只有一个，即 a^{-1}，对于它

$$a^{-1}a = aa^{-1}$$

一般来说，群中的元素相乘不可交换次序：$ab \neq ba$，但如果 $b = a^{-1}$，相乘结果就与它们的次序无关，这些结果的简单性及深刻性都是出人意料的，可以得到其他数学分支难以清楚导出的结果.

为了熟悉群论，我们以置换群 S_n 为例. S_n 是有限群，在群论的发展过程中起过重要的作用，它在现代统计物理中也是一个基础性工具，比如玻色子系统和费米子系统都与 S_n 群有关. 分析群的性质需要用到群的表示. 表示(representation) 在本处是专有名词，是群论中一个需要着重研究的概念，关于探讨有限表示的 Schur 引理就是在群论入门讨论中必须攻克的第一个关键之处. Schur 引理的一个重要结论就是有限群只有若干个不等价的不可约表示，在粒子系统的分类中要用到这些结果.

不可约表示的分类，对有限群，如 S_n 群来说，原则上已经清楚，但在分析过程中，方法不当会增添理解上的困难. 我们讨论的群论是需要用到物理问题中去的，因此更需要找出便捷的处理方法，要达到这一目的，杨(Young) 图是恰当的工具. 以 S_3 群为例，所涉及的杨图有三种：，，，每一种都有特定的含义，适用于不同性质的系统. 杨图不仅在有限群中是有效的处理方式，在 Lie 群中也起到重要的作用. 本书对杨图作了初等但比较深入的介绍，为读者在阅读有关科技文献时提供某些方便.

对连续群来说，我们着重讨论的是 Lie 群. Lie 群除了有连续群的共性之外，还有更多其他的性质，具体来说，连续群有无限多(确切说是连续统式的无限多，而不是可数的无限多，同是无限多，连续统式的比可数的更多) 元素，构成流形，这些流形由若干开集联合覆盖而成，在两个开集的交叠处，表征各个开集中各点的原则可用 n 维矢量 t 标记. 设开集 A 和 A' 都是某流形 D 的覆盖，并且 $A \cap A' \neq \varnothing$，即 A 和 A' 的交 $A \cap A'$ 不为空集 $\varnothing$. 这时若 $t \in A$，而同一点 A' 中表现出来的是 t'，于是 t' 与 t 之间有可逆函数 f 相联系：$t' = f(t)$，或者写成分量形式

$$t'_i = f_i(t_1, t_2, \cdots, t_n) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{1}$$

对连续群来说，$\{f_i\}$ 是可逆连续函数组；对 Lie 群来说，$\{f_i\}$ 是可逆的且无穷可微的，一般是解析的函数组.

Lie 群的整体性质比较复杂，其中某些与物理的联系较少. 在物理中对于 Lie 群，我们着重研究的是其单位元附近的性质，这就出现了 Lie 代数的研究，Lie 代数就是局部的 Lie 群，在 Lie 代数中需要首先确定其中最大的可对易子代数(Cartan

子代数),而 Cartan 子代数中各个生成元互相对易,这相当于量子系统中有一组互相对易的力学量算符的情况,它正好为基本粒子的研究提供了有力的支撑工具,使得 Gell-Mann 从同位旋第三分量的算符之处,再增添了一个奇异数算符,从而预言了当时尚未发现的粒子,并且为 Lie 群在物理中的应用提供了广泛的前景.所谓量子数在以 Lie 代数面貌出现时即是根或权,而相应荷载它们的态即是粒子的组态,因此根或权从物理角度看起来是最值得关注的概念.这里值得注意的是根或权也是 Lie 代数的核心观念,Lie 代数本质上可归结为它的素根图(Dynkin 图),或完全等价的、以代数方式表达出来的 Cartan 矩阵.为了阐明这些概念,我们着重讲了其中较简单但很重要的例子:SU(2) 群和 SU(3) 群.SU(2) 群在 Lie 群中最简单,它只有三个连续变化的参数,注意复平面由一个复数或两个实数描述,不妨认为 SU(2) 群由一个半复数描述,它不算太复杂,但比起实数系统和复数系统却多了两个或一个参数,因此它具有更深一层的性质,本书第 5 章就是以 SU(2) 群作为引子来讨论某些拓扑和测度性质的.SU(3) 群有八个参数,比 SU(2) 群复杂,但它更显示出与一般 Lie 群的共性.我们在 SU(3) 群的基础上解释 Lie 群的一般处理原则,特别是 Dynkin 图和 Cartan 矩阵的形成原则,因为这两者在 Lie 超代数中也是一个重要的概念.

由 Lie 群推广到超 Lie 群,或者相应地由 Lie 代数推广到超 Lie 代数主要是由物理工作者推动的,因为物理上感觉到有把玻色子和费米子统一处理的愿望及需要,这方面的努力尚未成功,但也不能说没有了希望,至今仍吸引着很多有才华的年轻数理工作者,只要适当调控努力的工作目标,相信在这方面投入一定的精力仍然是值得的.应当说超对称理论(包括超对称群论)并不十分成熟.但是由于一些十分具有才华的人士如 Witten 等人的努力,超对称技术在数学上的威力已经得到确认,而在物理上由于 Faddeev - Popov(FP) 的工作,奇性数的引入是不可避免的事情,FP 的工作是在讨论规范场论性质时出现的,在他们的工作中必须引进的鬼态中的一部分要由奇性数描述.Faddeev 的工作得到了同行的肯定,并且在规范场论的量子化中起到重要作用.

超 Lie 群一般不是很容易讨论的,我们代之以超 Lie 代数,这在本书第 6 章中有所涉及.但对于比较简单的超 Lie 群,也可以直接从群本身进行研究,如第 6 章中提及的 OSP(1,2) 群,该群有三个偶性参数 a,b,c,以及另外两个奇性参数 α,β,如果不考虑奇性参数,则只有三个偶性参数,这与普通 Lie 群中的 SU(2) 相当.我们看到在 OSP(1,2) 群中既有偶性生成元的对易关系,也有反对易关系.这充分显示了超 Lie 代数的特性.从这个简单例子着手易于进入超 Lie 代数领域并且加深对它的理解.还有,6.2 节内容也是常见的、较易理解的超代数关系.

以上是本书主要内容的介绍. 群论是大学里难度较大的课程，在高年级时开设，或者在研究生阶段时学习. 由于群论在处理各种复杂问题中日渐显出重要性，所以条件许可的读者在这类学科上花一定的时间是值得的，掌握了一定群论知识之后，在处理有关问题时会看得更清楚，对今后的工作也会有所帮助.

孙宗扬

2010 年 10 月于中国科学技术大学

目　　次

第 1 章　有限群的性质

1.1 群的定义

1.1.1 成群条件

群是指一个集合 G，对于其中的元素 a,b 定义了一个乘法"·"，而 $a \cdot b$（在不引起误会的情况下，也可以简写为 ab）表示 a,b 经乘法"·"操作的结果，它要满足下面四个条件，即：

(1) 对 $\forall a,b \in G$，有 $a \cdot b \in G$；

(2) 存在左单位元 e，对 $\forall a \in G$，有 $e \cdot a = a$（"$\forall a$"是指"任意的 a"）；

(3) 对 $\forall a \in G$，存在左逆元 $a^{-1} \in G$，有 $a^{-1}a = e$，其中 e 是左单位元；

(4) 结合律：对 $\forall a,b,c \in G$，有 $(ab)c = a(bc)$.

当集合 G 在其中元素之间定义了上述操作"·"之后，就构成了群 G，群 G 与集合 G 相比，多了很多特点，下面所讲的两个特点是很重要的.

1.1.2 群的基本性质

下面主要讲述逆元及单位元的性质.

(1) 我们已知 a^{-1} 是 a 的左逆元，$a^{-1}a = e$，现在问 $aa^{-1} = ?$ 由成群条件，有

$$\begin{aligned} aa^{-1} &= e(aa^{-1}) = (a^{-1})^{-1}a^{-1}(aa^{-1}) \\ &= (((a^{-1})^{-1})a^{-1}a)a^{-1} = ((a^{-1})^{-1}(a^{-1}a))a^{-1} = ((a^{-1})^{-1}e)a^{-1} \\ &= (a^{-1})^{-1}(ea^{-1}) = (a^{-1})^{-1}a^{-1} = e \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

上面反复应用了成群条件，由式(1.1.1) 可知，a 的左逆元 a^{-1}，也可以乘到 a 的右边，其结果仍旧是单位元 e，这个性质可叙述为 a 的左逆元也是 a 的右逆元.

由于

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e \tag{1.1.2}$$

因此以后将 a^{-1} 称为 a 的逆元素而无须区分它是a 的左逆元(乘在 a 的左边)还是右逆元(乘在 a 的右边).

(2) 对左单元 e 而言,$\forall a \in G, ea = a$.现在计算 ae,有

$$ae = a(a^{-1}a) = (aa^{-1})a = ea = a \quad \Rightarrow \quad ae = ea = a \tag{1.1.3}$$

式(1.1.3)表明左单位元e也可称为右单位元,即对 $\forall a \in G, ae = a$,因此今后不再区分左单位元还是右单位元,只称之为单位元.

注　群 G 中所有元素被认为是不相等的(即彼此不同的).如果 $a, b \in G$ 是两个不同的元素,则有 $a \neq b$;如果有 $a = b$,则认为 b 与 a 是同一个元素.

推论　(1) 如果 e_1, e_2 都是 G 的单位元,则 $e_1e_2 = e_2$,同时有 $e_1e_2 = e_1 \Rightarrow e_1 = e_2$,即单位元只有一个.

(2) 设 a_1^{-1} 及 a_2^{-1} 都是 a 的逆元,则有

$$a_1^{-1}a_2^{-1}a = a_1^{-1}(a_2^{-1}a) = a_1^{-1}$$

但从另一方面看,又有

$$\begin{aligned} a_1^{-1}a_2^{-1}a &= a_1^{-1}(a_2^{-1}a) = a_1^{-1}(aa_2^{-1}) \\ &= (a_1^{-1}a)a_2^{-1} = a_2^{-1} \quad \Rightarrow \quad a_1^{-1} = a_2^{-1} \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

式(1.1.4)表明 a 只能有一个逆元素,结合着成群条件,有下述推论:对 $\forall a \in G$,存在 a 的唯一逆元素 a^{-1}.

1.1.3　有限群

定义 1.1　有限群 G 是指G 是群,但 G 集合中的元素个数是有限的.

有限群阶:有限群 G 的元素个数g 称作有限群G 的阶,或简称为群阶.

有限群 G 可记为$G = \{G_1, G_2, \cdots, G_g\}$,这里 $G_l \in G$ ($l = 1, 2, \cdots, g$, g 为群阶),特别记 G_1 是群 G 中的单位元.

群 G 中两个子集合H', H'' 的相乘记为$H' \cdot H''$,其相乘结果是 G 中的一个子集合 H''',记为

$$H' \cdot H'' = H''' = \{t \mid t = a \cdot b, a \in H', b \in H''\} \tag{1.1.5}$$

公式(1.1.5)的含义是 H''' 中的元素t 要符合性质$t = a \cdot b$,这里 a 是H' 中元素,b 是H'' 中元素.如果 H', H'' 都是有限集合,H''' 的生成可作为如下操作的结果:设 H' 的元素为 H_l' ($l = 1, 2, \cdots, h'$, h' 是集合 H' 中元素的个数),H'' 的元素为 H_m''($m = 1, 2, \cdots, h''$, h'' 是集合H'' 中元素的个数),即

$$\begin{aligned} H' &= \{H_1', H_2', \cdots, H_{h'}'\} \\ H'' &= \{H_1'', H_2'', \cdots, H_{h''}''\} \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

首先将 H'_1（这里 H'_1不一定代表单位元）与 H'' 相乘得如下元素集合

$$H'_1 \cdot H'' = \{H'_1 H''_1, H'_1 H''_2, \cdots, H'_1 \cdot H''_{h''}\} \tag{1.1.7}$$

由于群的性质，这一组元素是彼此不同的，其次构造

$$H'_2 \cdot H'' = \{H'_2 H''_1, H'_2 H''_2, \cdots, H'_2 H''_{h''}\} \tag{1.1.8}$$

上式也有 h'' 个不同的元素，但其中的元素可能会有一些与式(1.1.7) 中的元素相同，将相同的元素剔除，而将不同的元素添加到式(1.1.7) 中，如此一直做下去，到 $H'_{h'} \cdot H''$ 为止，将所有不同的元素收集到一起，就是 $H' \cdot H''$.

1.1.4　群的实例

(1) 单元素群：$G = \{e\}$，即只由一个单位元生成一个群.

(2) Z_2 群：有两个元素，$Z_2 = \{1, -1\}$，乘法"•"是普通数字乘法，单位元是"1"，各元素即为"1"和"-1"，它们的逆元素是其本身.

(3) $Z_m = \{e^{in2\pi/N} \mid n = 0, 1, \cdots, N-1\}$：这个群称为 N 边形群，乘法是普通的复数乘法.

(4) $U(1) = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \text{ 为实数}\}$：乘法是普通复数乘法，这个群称为 $U(1)$ 群或单位圆周群，其几何图像是半径 r 为 1 的单位圆，见图 1.1.

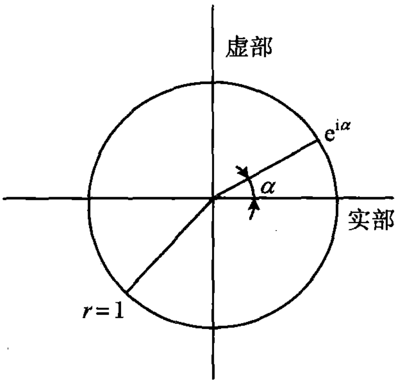


图 1.1　单位圆周群 $U(1)$

(5) $\widetilde{S_2} = \{a + a'\theta \mid a \neq 0; a, a' \text{ 为实数}; \theta^2 = 0\}$：这里 θ 称为反易数(或格氏数) 单位，$\widetilde{S_2}$ 群的乘法是形式上的普通数的四则乘法，各加项可以互相对调，同一项中为 a, a' 等与 θ 的乘积，它们在相乘中的顺序可以互相对调，各加项不为零的必要条件是没有 θ 或只有一个 θ，当一加项中的 θ 因子有两个或两个以上时，此项为 0.

为了阐述 $\widetilde{S_2}$ 中各元素的乘法，我们指出 $x = a + a'\theta \in \widetilde{S_2}$ $(a \neq 0)$ 的逆元素是 $x^{-1} = (a - a'\theta)/a^2$. 实际上

$$x \cdot x^{-1} = (a + a'\theta)\frac{1}{a^2}(a - a'\theta) = \frac{1}{a^2}(a^2 - aa'\theta + a'\theta a - a'\theta a'\theta) = 1$$

所以 x^{-1} 确是 x 的逆元素. 在上式的推导过程中，我们利用了关系

$$-aa'\theta + a'\theta a = 0 \quad \text{及} \quad a'\theta a'\theta = 0$$

第一个关系显然成立，第二个关系因为其左方含有两个 θ 因子.

(6) $\widetilde{S_3}=\{a+b_1\theta_1+b_2\theta_2+b_{12}\theta_1\theta_2 \mid a\neq 0, a, b_1, b_2, b_{12}$ 为实数；$\theta_1^2=\theta_2^2=0, \theta_1\theta_2=-\theta_2\theta_1\}$：$\widetilde{S_3}$ 群中有两个格氏数 θ_1,θ_2，除了它们自身平方为零（$\theta_1^2=\theta_2^2=0$）之外，还有 θ_1,θ_2 之间乘法顺序的反交换关系

$$\theta_1\theta_2=-\theta_2\theta_1 \tag{1.1.9}$$

除此之外，$\widetilde{S_3}$ 的乘法与 $\widetilde{S_2}$ 的相似，$\widetilde{S_3}$ 群中的乘法是形式上的普通数的四则乘法，但需要注意保持各个加项中各因子的先后顺序，利用四则运算的乘法分配律展开的最后结果中，各加项可以互相对调，在同一加项是 a_1,b_1 等实数及 θ_1,θ_2 等反易数的连乘积，在这个乘积中实数相互之间可以对调，实数与 θ_1 与 θ_2 也可以对调，但当对调 θ_1,θ_2 时要应用规则(1.1.9)，加项不为零的条件是不含 θ_1,θ_2，或只含一个 θ_1 或 θ_2，或只含一个因子 $\theta_1\theta_2=-\theta_2\theta_1$，当加项中含有两个或两个以上的 θ_1（或 θ_2），则此项为 0. 为了例证上述的乘法，我们指出 $x=a+b_1\theta_1+b_2\theta_2+b_{12}\theta_1\theta_2\in\widetilde{S_3}$ $(a\neq 0)$ 的逆元素是 $x^{-1}=(a-b_1\theta_1-b_2\theta_2-b_{12}\theta_1\theta_2)/a^2$，实际上

$$\begin{aligned}
xx^{-1} &= (a+b_1\theta_1+b_2\theta_2+b_{12}\theta_1\theta_2)\cdot\frac{1}{a^2}(a-b_1\theta_1-b_2\theta_2-b_{12}\theta_1\theta_2)\\
&= \frac{1}{a^2}(a^2-ab_1\theta_1-ab_2\theta_2-ab_{12}\theta_1\theta_2+b_1\theta_1a-b_1\theta_1b_1\theta_1\\
&\quad -b_1\theta_1b_2\theta_2-b_1\theta_1b_{12}\theta_1\theta_2+b_2\theta_2a-b_2\theta_2b_1\theta_1-b_2\theta_2b_2\theta_2\\
&\quad -b_2\theta_2b_{12}\theta_1\theta_2+b_{12}\theta_1\theta_2a-b_{12}\theta_1\theta_2b_1\theta_1\\
&\quad -b_{12}\theta_1\theta_2b_2\theta_2-b_{12}\theta_1\theta_2b_{12}\theta_1\theta_2)=1
\end{aligned}$$

在最后一个等式过程中，我们利用了关系

$$\begin{aligned}
&-ab_1\theta_1+b_1\theta_1a=-ab_2\theta_2+b_2\theta_2a=0\\
&b_1\theta_1b_1\theta_1=b_2\theta_2b_2\theta_2=0\\
&-b_1\theta_1b_2\theta_2-b_2\theta_2b_1\theta_1=-b_1b_2(\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_1)=0
\end{aligned}$$

(7) 三文字置换群 S_3：它共有六个元素，按照流水顺序可记成

$$a_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$a_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad a_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad a_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

即 $S_3=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$. 下面给出 S_3 中的乘法"·". 若设

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3\\l_1&l_2&l_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}l_1&l_2&l_3\\m_1&m_2&m_3\end{bmatrix}$$

这里，$(l_1\ l_2\ l_3)$ 或 $(m_1\ m_2\ m_3)$ 均是 $(1\ 2\ 3)$ 的某种排列，$\begin{bmatrix}l_1&l_2&l_3\\m_1&m_2&m_3\end{bmatrix}$ 表示一种

置换方式(即置换群的一个元素),它表示将 l_1 换成 m_1:$l_1 \to m_1$;其余 $l_2 \to m_2$,$l_3 \to m_3$,依此类推,当然

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 & l_1 & l_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = \cdots$$

因为它们表示同一种置换方式.定义 a 与 b 的乘积为

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \tag{1.1.10}$$

具体例子如下

$$\begin{aligned} a_2 a_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = a_4 \quad \Rightarrow \quad a_2 a_3 = a_4 \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

(8) 满秩 2×2 复数矩阵构成的群 GL(2,C):这个群称为一般二阶复线性群,两个属于 GL(2,C) 的元素 A 及 B 是 2×2 矩阵,其位点(entry)上的数值是复数.所谓满秩是指各元素的行列式不为零:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad \det B = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} \neq 0$$

GL(2,C) 中的乘法是矩阵的乘法,记 $C = A \cdot B$,即

$$\begin{aligned} C = A \cdot B &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

C 矩阵上的位点值(或位值)

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} \quad (i,j = 1,2) \tag{1.1.12}$$

关系式(1.1.12) 即是矩阵的乘法规则.注意到 C 矩阵的行列式

$$\begin{aligned} \det C = {} & C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \\ & = (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21})(A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) \\ & \quad - (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22})(A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) \end{aligned}$$

$$= A_{11}B_{22}(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}) + A_{12}A_{21}(B_{21}B_{12} - B_{22}B_{11})$$
$$= (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})$$
$$= \det A \cdot \det B \neq 0$$

所以 $C \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$，满足乘法的基本要求. $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ 中单位元 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，即单位矩阵，而任一矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 的逆是

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \tag{1.1.13}$$

故 $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \neq 0$. 结合律可直接验证(习题 2).

在 $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ 群中两个元素的乘积 $A \cdot B$，其次序不是始终可以交换的，即存在着这样的 A 及 B，有

$$A \cdot B \neq B \cdot A \tag{1.1.14}$$

如果群 G 中存在若干元素，使得式(1.1.14) 成立，则 G 称为非交换群或非阿贝尔(non-Abelian) 群；反之，如果群 G 中任何两个元素的乘积顺序都是可交换的，即

$$A \cdot B = B \cdot A, \quad \forall A, B \in G \tag{1.1.15}$$

则 G 称为阿贝尔(Abel) 群或交换群.

(9) SU(2)(二阶酉群)：由元素 $\begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix}$($aa^* + bb^* = 1$，这里 a，b 是可以在一定范围内选择的复数，a^*，b^* 分别是 a，b 的共轭复数) 组成，也称作 A_1 群. 从构造方式上可以看到，SU(2) 群是 $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ 的一部分.

习　　题

1. 求出 SU(2) 中元素 $A = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}$ 的逆元素 A^{-1}.
2. 验证 $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ 群中元素 A,B,C 的乘法满足结合律 $(AB)C = A(BC)$.
3. 证明 SU(2) 群是非阿贝尔群.
4. 设三元素置换群 S_3(参见实例(7)) 中有两个子集

$$H' = \{a_2, a_3\}, \quad H'' = \{a_2, a_6\}$$

按照 1.1 节中所述的实际操作程序求出 $H''' = H' \cdot H''$.

（答：$H''' = \{a_1, a_5, a_4\}$.）

5. 证明实例(5) 的$\widetilde{S_2}$ 群是阿贝尔群；实例(6) 的$\widetilde{S_3}$ 是非阿贝尔群.

1.2　群的简单性质

1.2.1　子群

设 G 为一群，H 是 G 的子集合，$H \subset G$，如果对其中各元素而言，用 G 中的乘法"•"，使得 H 构成一群，则称 H 为 G 的子群.

设 G 是有限群，则 H 也是有限群，设 G 的群阶为 g，H 的群阶为 h，则 h 必然整除 g，可记为

$$g = kh \quad (k \text{ 为整数}) \tag{1.2.1}$$

式(1.2.1) 表示，子群中元素的个数必定是原群中元素的个数的一个因子，现在来证明这一结论.

证明　设 G 中的元素为 G_i $(i = 1,2,\cdots,g)$，注意子群 H 也是子集，因此按照 1.1 节的集合乘法，可以定义

$$G_i \cdot H \quad (i = 1,2,\cdots,g) \tag{1.2.2}$$

易知，G_iH 是 G 中的子集，这些子集彼此之间可以完全不同，或者完全相同，或者部分元素相同(参见 1.1 节习题 4). 现在由于 H 不仅是子集，而且是子群，因此各个 G_iH 之间可以完全不同，或者完全相同，而不存在部分元素相同的情况.

实际上，如果 G_lH 子集和 G_mH 子集有部分元素相同，例如有个元素 A 为这两个子集所共有，按照上述讨论，在 H 中有个元素 $H_{\bar{l}}$，使得

$$G_lH_{\bar{l}} = A \tag{1.2.3}$$

同时还可以选择元素 $H_{\bar{m}} \in H$，使得

$$G_mH_{\bar{m}} = A \tag{1.2.4}$$

从式(1.2.3) 及(1.2.4)，有 $G_lH_{\bar{l}} = G_mH_{\bar{m}}$，推出 $G_l = G_mH_{\bar{m}}H_{\bar{l}}^{-1}$，这样

$$G_lH = G_mH_{\bar{m}}H_{\bar{l}}^{-1}H \tag{1.2.5}$$

注意，H 是群，因此对于任何 $H_j \in H$，有

$$H_j \cdot H = H \tag{1.2.6}$$

实际上，对 $H_l \in H$，有 $H_jH_l \in H$. 因为 H 是群，于是有

$$H_j \cdot H \subset H \tag{1.2.7}$$

反过来，对 $H_m \in H$，有 $H_m = H_j \cdot H_j^{-1}H_m$，由于 $H_j^{-1}H_m \in H$，故 $H_m = H_j \cdot H_j^{-1}H_m \in H_jH$，推出

$$H \subset H_j \cdot H \tag{1.2.8}$$

由式(1.2.7) 及(1.2.8)，有

$$H = H_j \cdot H, \quad \forall H_j \in H \tag{1.2.9}$$

将结论式(1.2.9) 应用到式(1.2.5)，由于 H 是群，所以 $H_mH_l^{-1} \in H$，式(1.2.5) 可改写为

$$G_lH = G_mH \tag{1.2.10}$$

上式表明 G_lH 和 G_mH 中只要有一个元素相同，它们就完全相同，即在各个 G_iH $(i = 1,2,\cdots,g)$ 中只有部分元素相同的两个集合不存在，而存在的只有两者完全相同或者两者完全不同的情况.

现在我们对式(1.2.2) 的 $G_i \cdot H$ 进行考察，从 $G_1 \cdot H$ 开始逐个考察. 如果 G_2H 与 G_1H 完全相同，则将 G_2H 剔除，然后考察 G_3H…… 设 G_1H 之后第一个保留下来的集合是 $G_{i_2}H$；然后再考察剩下的 G_lH，与 $G_{i_1}H$(即 G_1H) 和 $G_{i_2}H$ 都完全不同的集合记为 $G_{i_3} \cdot H$，如此一直检查下去，将所有的 $G_l \cdot H$ 检查完毕，最后留下一组彼此完全不同的集合

$$G_{i_1} \cdot H(\text{即 } G_1 \cdot H),\ G_{i_2} \cdot H,\ \cdots,\ G_{i_k} \cdot H \tag{1.2.11}$$

我们注意到，G 中任何一个元素 G_j 都一定包含在式(1.2.11) 的某个集合中，因为如果 G_j 不在其中，则 G_jH 在挑选过程中必然被选上，而 $G_j = G_j \cdot H_1 \subset G_j \cdot H$，得到矛盾. 由于任意 G_j 要出现式(1.2.11) 的一个集合之中，故各集合之和 $G_{i_1}H \cup \cdots \cup G_{i_k}H \supset G$，另外各个子集 $G_{i_1}H \subset G, G_{i_2}H \subset G, \cdots$，故有 $G_{i_1}H \cup G_{i_2}H \cup \cdots \cup G_{i_k}H \subset G$，因此

$$G_{i_1}H \cup G_{i_2}H \cup \cdots \cup G_{i_k}H = G \tag{1.2.12}$$

由于式(1.2.12) 左边各个子集的元素个数为 h，并且它们之间都是彼此完全不同的，因此左边元素的个数为 $k \cdot h$，而它即是群 G 的阶 g，所以

$$g = kh \tag{1.2.13}$$

结论式(1.2.1) 证毕.

1.2.2 三元素置换群 S_3 的子群

我们以三元素置换群 S_3 为例，研究它的子群. S_3 的定义见 1.1.4 小节的实例(7)，其中各元素的乘法规则已在那里给出. 现在将 S_3 的任意两个元素 A，B 的乘