SHUXUEMOXINGJIFANGFA
SHUXUEMOXINGJIFANGFA
SHUXUEMOXINGJIFANGFA
SHUXUEMOXINGJIFANGFA
SHUXUEMOXINGJIFANGFA

数学模型及方法

□李火林 邓声南 甘筱青 主编

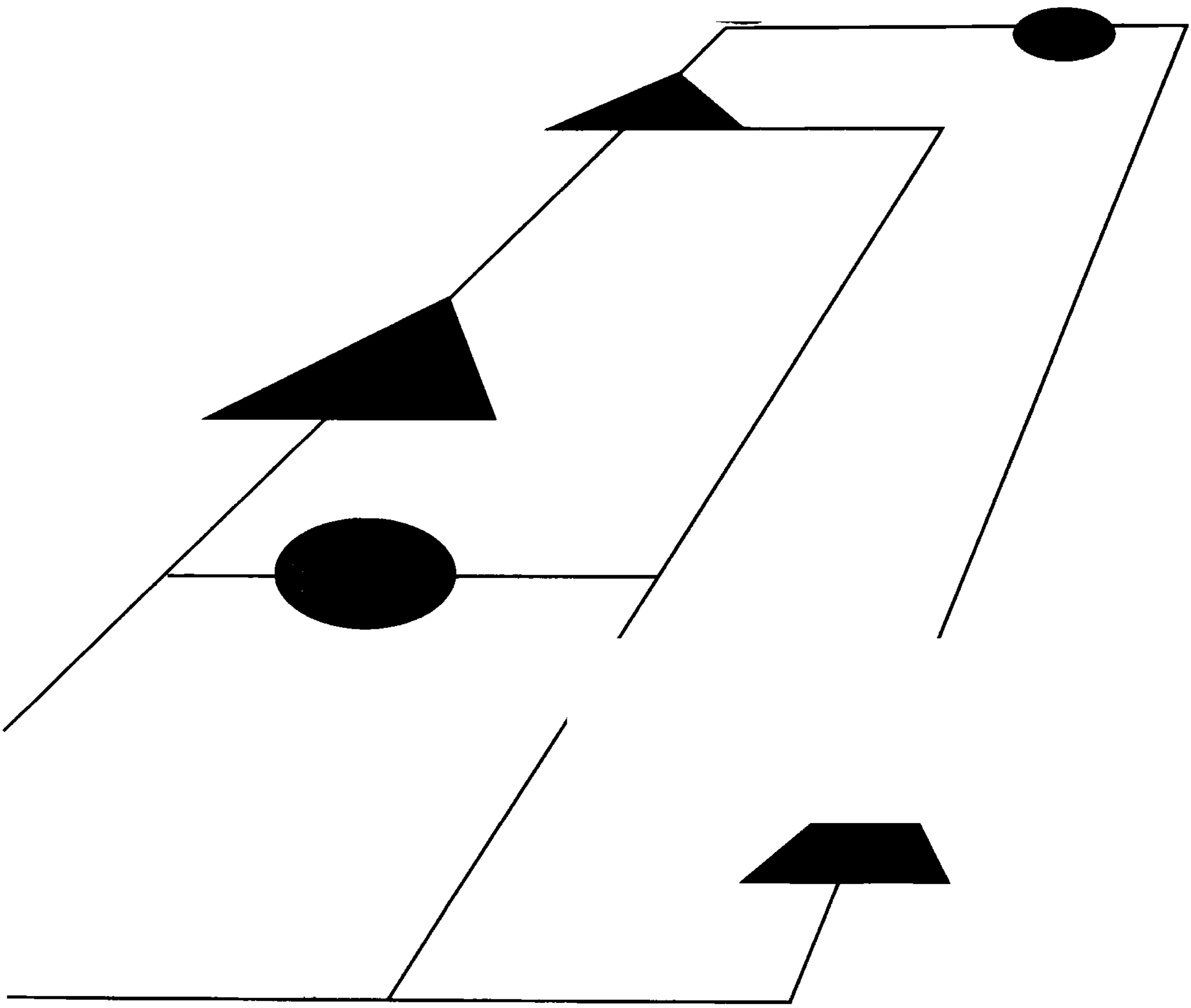
□江西高校出版社

SHUXUEMOXINGJIFANGFA

数学模型及方法

李火林　邓声南　甘筱青　主编

江西高校出版社



书　名:数学模型及方法
主　编:李火林　邓声南　甘筱青
出　版
发　行:江西高校出版社(南昌市洪都北大道 96 号)
经　销:各地新华书店
印　刷:南昌市青云谱印刷厂
开　本:787×1092mm　1/16
印　张:20
字　数:500 千
印　数:5000 册
版　次:1997 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
定　价:21.80 元

ISBN 7-81033-717-3
O·29

邮政编码:330046　电话:(0791)8512093　8513257
(江西高校版图书凡属印刷、装订错误,请随时向承印厂调换)

数学建模，能力开拓；
注重实践，激励新作；
深化教改，前景广阔。

潘际銮书

一九九七年六月廿八日

中国科学院院士、南昌大学校长潘际銮教授题词

前　言

随着科学技术的的迅猛发展和计算机的广泛使用，数学模型越来越受到人们的重视. 这是因为：第一，随着科学技术向更高层次的发展，要求人们解决各类实际问题更加精确化和定量化，而数学模型正是从定性和定量的角度去分析和解决实际问题；第二，计算技术的日新月异，高速、大型计算机的惊人发展，使得过去即使有了数学模型也无法求解的问题迎刃而解；第三，21 世纪，我们面临最大的挑战是人才的培养问题，教育的根本任务是提高人的基本素质，而数学建模在培养学生分析问题和解决问题的能力、创新的思维能力等方面起到很好的作用.

我国从 1992 年起，由国家教委高教司和中国工业与应用数学学会共同组织，每年在全国大学生中举行一次数学建模竞赛. 我省部分高校于 1995 年和 1996 年，连续两届组队参赛. 在这一活动的带动下，各校纷纷在学生中开设数学模型课程以及参赛前的培训，为了进一步搞好数模教育，江西赛区组委会组织我省有关专家共同编写了本书.

本书的重点是强调如何从实际问题中分清主次，提出合理的假设，用数学的方法建立数学模型. 对涉及到的数学知识，只作一些简单地介绍. 阅读本书一般只需高等数学、线性代数、概率统计的知识，对微分方程、运筹学等方面的有关知识，书中作了一些必要的补充，对涉及到太深的数学知识的模型不予采用.

参加本书编写的有：李火林（第一章）、邱根胜（第二章）、万宝珍、邓声南（第三章）、欧阳长城、金本清、王明文（第四章、第七章）、黄庭松（第五章）、吴阔华（第六章）、于崇智（第八章）、陈钰菊（第九章）、刘南根（第十章）、熊韶辉（第十一章）、甘筱青、马新生（第十二章）、章义来（附录）.

数学模型是一门新型的课程，内容涉及面很广，所用到的知识很多，因此，在内容取舍上难度较大. 由于时间仓促，作者水平有限，书中不足之处在所难免，敬请读者批评指正.

在此，谨向关心本书出版的省教委高教一处和江西高校出版社表示深切的感谢.

编者

1997 年 3 月 20 日

目　录

第一章 概 论

§1 数学建模的意义

随着科学技术的迅猛发展，要求人们在解决各类实际问题时更加精确化和定量化，而数学建模正是从定性和定量的角度去分析和解决实际问题. 例如，为了控制生产过程，需建立一个数学模型，用它来实现有效的控制. 为了准确地预报天气，需要根据气象站和气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料来建立数学模型. 在医学上要求建立一个数学模型指导临床的用药，使药物在人身体内达到最佳的疗效. 在城市建设方面，需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型，为决策城市的发展规划提供科学依据，此外厂家和商家需要根据产品的需求状况、生产条件和成本、贮存费用等信息，建立一个合理的生产和销售的模型，从而获得更大的经济效益. 可以说数学建模渗透到科学技术、工农业生产等各个领域.

何谓数学建模? 至今没有一个公认的权威性的定义. 根据国内比较流行的看法，数学建模是指对于现实世界的某一特定系统或特定的问题，为了一个特定的目的，运用数学的语言和方法，通过抽象和简化建立一个近似描述这个系统或问题的数学结构(数学模型)，运用适当的数学工具以及计算机技术来求解模型，最后将其结果接受实际的检验，并反复修改和完善. 上述过程就是所谓数学建模.

数学建模的全过程如图 1－1 所示.

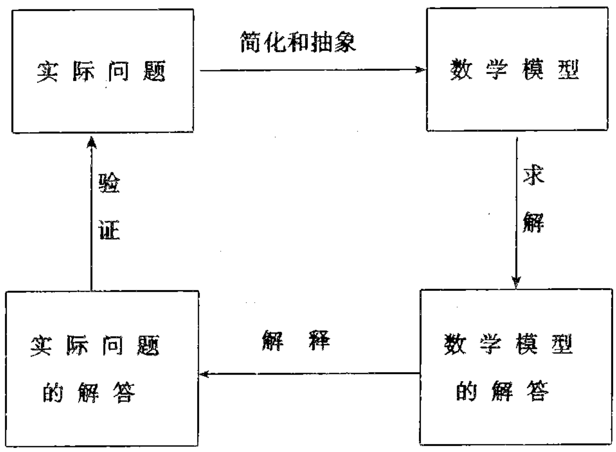


图 1－1

数学建模并不是什么新东西，它的历史可以追溯到几千年前. 早在两千年前，古希腊的埃拉托色尼(Exatothenes)利用不同地点的日影的不同计算了地球的半径. 伊巴谷(Hiparchus)从月蚀中地球的阴影得出地球和月球的距离，这些都是他们用初等几何的方法建立起来的数学模. 在近代科学发展史上，牛顿(Newton)的万有引力定律和麦斯韦尔(Maxwell)的电磁场理论都是数学模型取得巨大成功的范例. 近几十年来数学建模之所以越

来越受到重视，并得到迅速发展，主要有下面几个方面的原因.

第一，计算机技术日新月异. 高速、大型计算机的惊人发展，使得过去即使有了数学模型也无法求解的课题（如石油勘探的数据处理，大型水坝的应力计算，中长期天气预报）迎刃而解. 计算机技术为数学建模在工程技术、经济竞争中的应用起到了如虎添翼的作用.

第二，数学科学向一切领域渗透. 随着科学技术的飞速发展和计算技术日新月异，各科技领域进入了定量化和精确化的阶段. 例如，1991 年美国国家研究委员会发表的题为《数学、科技和经济竞争》的权威报答[1]. 报告就美国五个重点工业部门（飞机制造、半导体和计算机、石油、汽车、通讯）中数学的影响和作用进行了分析，大量事例表明：从产品规划、研究、设计、制造、生产过程控制和优化、提高产品质量、市场分析、销售、库存、运输乃至产品的维修的各环节中，数学大有作为，因此数学建模的重要性迫切性也日益显著.

第三，数学课程教学改革的需要. 21 世纪我们面临最大的挑战是人才的培养问题，既要培养有突出成就、有竞争力的学科带头人，又要提高全体人民的文化科技素质，不管那个方面最根本的是提高人的基本素质. 这里的"素质"是指一个人对客观世界及其事物的反映和认识所据有的悟性及潜能，其发展是以先天的生理遗传为基础，而以后天的环境和教育为条件的. 一般来说，人的先天的生理条件差别不大，其智力发展的差别形成的关键在后天的塑造. 从这个意义上说，近年来各高校兴起的数学模型教育和数学建模竞赛，对启发和挖掘学生认识和处理数形规律、逻辑关系及抽象事物的悟性和潜能来说起到了很好的作用. 此外，中国传统的教育是知识传授型的，按照这个传统，整个教学过程和考核过程往往只注意知识的接受，而忽略能力的培养，特别是创造性思维能力的培养，而数学建模十分注重实践性和创新性，可以说它是数学课程由知识传授型向能力培养型转的一个突破口.

§2　建模的范例

为了使初学者对数学建模的内容、方法和步骤有一个概括地了解，下面介绍几个简单的范例，说明从实际问题到数学模型的过程，重点是如何作出合理的、简化的假设以及如何用数学的语言确切地表述实际问题，并且用模型求解的结果怎样去解释实际现象.

例 1　贷款购房问题

随着计划经济向社会主义市场经济的转型，住房也将作为商品推向市场. 多数工薪阶层的人不可能有那么多的钱一次付清购房款，必须向银行贷款，这就是摆在我们每个家庭面前的一个经济决策问题. 由于每个家庭的收入，现有存款数，要购住房的面积，贷款的期限和利率等诸多因素的不同. 另外，不能将所有的存款和每月总收入全部用来购房，这样就失去了经济上的应急应变能力，如何选择一个最优方案，这就需要利用数学建模解决这个问题.

分析　这个问题中起作用的因素很多，但住户最关心的是在自己每月的总收入中能拿出多少钱来还银行的贷款，这就是我们在建模中要抓住主要的因素. 为简单起见，假设张某要购买三室一厅的住房一套，根据自己的存款情况，决定向银行贷款 50 000 元. 同时假设贷款期限为 20 年，月利率为 $r = 0.0083$，设 x 是张某每月还银行的钱，P_n 为第 n 个月尚欠银行的钱. 根据假设应有 $0 \leqslant n \leqslant 240$，显然

$$P_0 = 50\ 000$$

$$P_1 = P_0(1 + r) - x$$

$$P_2 = P_1(1 + r) - x$$

$$= [P_0(1+r)-x](1+r)-x$$
$$= P_0(1+r)^2 - x[(1+r)+1]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n = P_0(1+r)^n - x[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)+1]$$
$$= P_0(1+r)^n - \frac{x}{r}[(1+r)^n-1] \tag{1.1}$$

公式(1.1)就是贷款购房的数学模型.下面要根据题设求出 x 的值,由题设 $P_0 = 50\ 000$ 元,当 $n = 240$ 时,表示贷款还清,即 $P_{240} = 0$,所以

$$50\ 000(1+0.008\ 3)^{240} = \frac{x}{0.008\ 3}[(1+0.008\ 3)^{240}-1] \tag{1.2}$$

由(1.2)中解出 $x \doteq 489$ 元.如果在每月的总收入中扣除还银行的贷款之外,剩余较多,在充分留有余地的情况下,可加大贷款数或缩短贷款期限,反之则减少贷款数或延长贷款期限.总之,在购房之前要利用公式(1.1)计算出若干个方案,再作一个决策.

例 2　淋雨问题

某人出门未带雨伞,中途避雨,问走多快才会少淋雨?

分析　显然这个问题的条件与提法不十分明确,例如,人是沿直线走还是绕道行走,走多长的距离?雨的速度多大?此外,淋雨量与人的体形也有关,严格地说,这个问题复杂,此处我们需要作一些简化,只考虑一个特定的人在雨中沿直线从一处向另一处行走,中途不避雨.假设雨的速度已知,问人行走的速度多大才能使淋雨量最小?

选择空间直角坐标系,用 $(u,0,0)$ 表示人的速度,(v_x,v_y,v_z) 表示雨的速度,l 表示行走的距离,行走的时间为 l/u.由于人的外形比较复杂,我们假设人体为长方体,其前后面,双侧面和顶部的面积分别为 S,L,T,对一个特定的人来说它是常量.显然在单位时间内淋雨量为:

$$|u-v_x|S + |0-v_y|L + |0-v_z|T$$

总淋雨量为:

$$R(u) = \frac{l}{u}(|u-v_x|S + |v_y|L + |v_z|T).$$

此处 $|v_y|L + |v_z|T = a$ 是一个常量,不妨设 $S = 1$,则

$$R(u) = \frac{l}{u}(|u-v_x| + a) \tag{1.3}$$

问题抽象成如下的数学问题:

已知 l,v_x,a 求 u 为何值时 $R(u)$ 最小?

该问题是一元函数求极值,可以用导数的方法或分析函数性质的方法来求解.下面分两种情况讨论:

(1)　当 $v_x > 0$ 时,

$$R(u) = \begin{cases} \dfrac{l}{u}(v_x - u + a) = \dfrac{l(v_x+a)}{u} - l, & (u \leqslant v_x) \\ \dfrac{l}{u}(u - v_x + a) = \dfrac{l(a+v_x)}{u} + l, & (u > v_x) \end{cases}.$$

当 $v_x > a$ 时,$R(u)$ 的图形如图 1－2 所示,当 $v_x < a$ 时,$R(u)$ 的图形如图 1－3 所示.易知,仅当 $v_x > a, u = v_x$ 时,才使 $R(u)$ 取最小值 la/v_x.

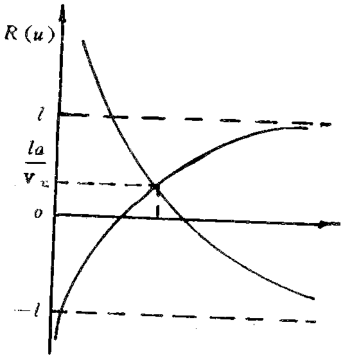


图 1－2

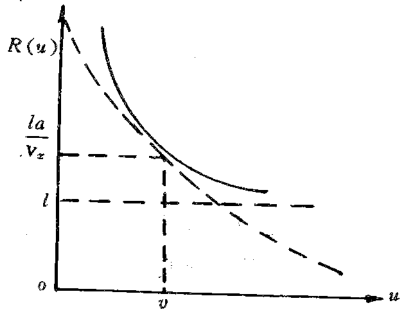


图 1－3

(2) 当 $v_x < 0$ 时,

$$R(u) = \frac{l}{u}(u + |v_x| + a) = \frac{l(a + |v_x|)}{u} + l.$$

$R(u)$ 的图形如图 1－4 所示,不论 v_x 取何值,都没有最小值.

对于 $v_x = a$ 和 $v_x = 0$ 的情况,读者自己讨论.

问题的结论:仅当 $v_x > a > 0$,应取 $u = v_x$ 可以使前后不淋雨,则总淋雨量最小,其他情况都应使 u 尽可能大.

例 3 新产品销售问题

一种新产品刚问世,厂家和商家总是采取各种手段促进销售,比如不惜血本大做广告或有奖销售等.都希望这种新产品销售速度快,销售量大,从而获取更多的利润.

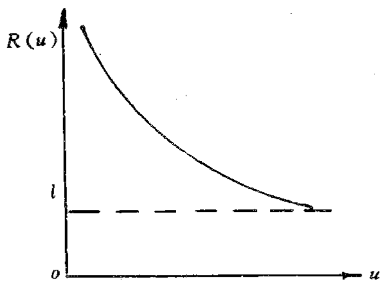


图 1 4

该问题就是要建立一个数学模,从中分析出一些有用的结果,以指导厂家的生产和商家的进货,这里以电冰箱销售为例.

模型 Ⅰ 设时刻 t 已出售的电冰箱为 $x(t)$,一般来说销售的速度与销售量是成正比的,即

$$\frac{dx}{dt} = kx(t) \quad (k > 0) \tag{1.4}$$

设 $t = 0$ 时,$x(0) = x_0$.也就是说在出售之前就有 x_0 台电冰箱投入使用,譬如说出售之前免费赠送给用户,这是一种常见的促销手段.式(1.4)是一个一阶微分方程,它的解为

$$x(t) = x_0 e^{kt} \tag{1.5}$$

实际调查表明销售量 $x(t)$ 在开始阶段的增长情况与(1.5)式十分相符,但在(1.5)式中,令 $t \to +\infty$,则 $x(t) \to +\infty$,这显然与事实不符,如果用模型 Ⅰ 的结果去指导厂家生产和商家进货,将会产生产品的大量积压,模型 Ⅰ 的缺点就在于没有考虑到该产品的销售量在一个城市或一个地区,它有一个饱和量.

模型 Ⅱ 设需求量的上界为 M,则尚未使用电冰箱的用户为 $M - x(t)$,而销售速度应与销售量 $x(t)$ 和 $M - x(t)$ 的乘积成正比,记比例系数为 $c < 0$,则

$$\frac{dx}{dt} = cx(M - x) \tag{1.6}$$

用分离变量法解微分方程(1.6)得

$$x(t)=\frac{1}{1+ae^{-CMt}} \tag{1.7}$$

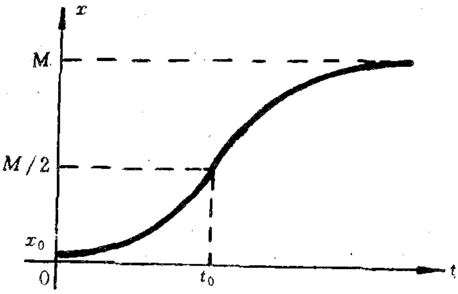


图 1－5

式(1.6)常称为Logistic模型，而式(1.7)称为Logistic曲线或增长曲线，如图1－5所示.

由(1.7)式求出$x'(t)$，$x''(t)$，并可求出t_0，使$x(t_0)=\frac{M}{2}$. 并且

(1) 当$t<t_0$时，$x''(t)>0$，即$x'(t)$单调上升；

(2) 当$t>t_0$时，$x''(t)<0$，即$x'(t)$单调下降.

结果表明，在销售量小于最大需求的一半时，销售速度是不断增大的，销售量达到最大需求量一半时，该产品最为畅销，其后销售速度将开始下降，调查表明，模型 Ⅱ 最接近销售的实际情况，商品的销售大体接近Logistic曲线.

例4 核式器竞赛问题

美国和前苏联是世界上两个最大的核式器拥有的国家，他们都宣称为了保卫自己的安全，防备对方的“核讹作”，就是说在遭到对方第一次攻击后要保证有足够的核式器能保存下来，以便给对方以改命的还击. 为此，双方展开了一场核式器的竞赛，其方法主要有：

(1) 增加自己的核式器，从数量上压倒对方；

(2) 发展反弹道导弹和多弹头导弹；

(3) 加固导弹库或建造核潜艇来保护导弹. 不管用什么办法，这样做下去，双方都感到负担过重，也就是说双方拥有的核式器是无限地增长下去，还是存在一个暂时的平衡状态?这里介绍一个数学模型来回答这个问题.

设甲乙双方的核式器数目分别为x和y，x和y均为实数. 从甲方看仅当拥有的核式器数x以某个确定的函数关系超过乙方的核式器数y，即当$x>f(y)$时，甲方才感到自己的安全. $x=f(y)$称为甲方的安全线. 同理，当$y>g(x)$时，乙方才感到安全，$y=g(x)$称为乙方安全线，在xoy平面上画出$x=f(y)$与$y=g(x)$的曲线(如图1－6所示). 在甲方安全线$x=f(y)$的右方称为甲方安全区，在乙方安全线$y=g(x)$的左方称为乙方安全区. 如果两条安全线相交的话，交点$M(x_m,y_m)$称为平衡点，两个安全区的公共区域称为双方安全区，或称稳定区域.

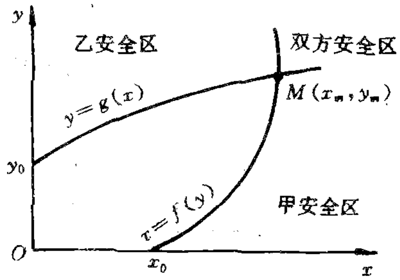


图1－6 双方的安全线、安全区和平衡点

这两条安全线显然均为单调上升曲线. 在双方各自的安全区内，各自认为自己是确保安的，在双方的安全区内双方都感到安全. $x=f(y)$上x轴上的截距x_0的含意是，当乙方的核式器全部用完时，甲方只要有x_0数量的核式器就可以给乙方致命的还击以确保自己的安全. 同理$y=g(x)$在y轴上的截距y_0的含意是与甲方一样. 由于核式器竞赛无限地发展下去，双方都感到沉重负担，双方都关心当任一方第一次全力打击不可能摧毁对方的全部核式器假设条件下，这样的稳定区域是否存在?从几何上说就是这两条安全线是否相交?下面将

来证明 $x=f(y)$ 与 $y=g(x)$ 在上述假设条件下必相交，也就是说存在这样的平衡点和稳定区域.

为了证明 $x=f(y)$ 和 $y=g(x)$ 相交，只需证明对任意 $r>0$，$y=rx$ 必与二者之一比如 $x=f(y)$ 相交. 此处 $x=f(y)$ 从 $(x_0,0)$ 开始，以递增到无穷的斜率向上弯曲. 乙方的全力打击不能摧毁甲方全部核武器这一条件意味着，若乙方核武器数目 y 是甲方核武器数目 x 的 r 倍，即 $y=rx$，则不论 r 多大，当乙方以全部核武器袭击甲方时，甲方每枚核武器保存下来的概率 $p(r)$ 仍然大于零. 于是甲方平均保存的核武器数目为 $xp(r)$，而根据对 x_0 的解释，只要 $xp(r)>x_0$，甲方就可以确保安全. 记 $x_r=x_0/p(r)$，则在乙方拥有核武器的数目是甲方的 r 倍时，甲方只需拥有 x_r 就是安全的，x_r 正是直线 $y=rx$ 与曲线 $x=f(y)$ 交点的横坐标，这就证明了 $x=f(y)$ 必与 $y=rx$ 相交. 同理，$y=rx$ 必与曲线 $y=g(x)$ 相交，所以 $x=f(y)$ 与 $y=g(x)$ 必相交于 $M(x_m,y_m)$.

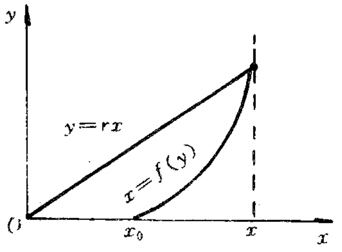


图 1－7
$x=f(y)$ 与 $y=rx$ 相交

下面我们讨论，如果某一方使用加固核基地以防御袭击，两条安全线和稳定区域和平衡点如何变化?

假设甲方采用加固核基地手段，则它的核武器更不容易遭受突然袭击，这将使甲方任一枚核武器保存下来的概率 $p(r)$ 增大，而 x_0 不变，所以 $x_r=x_0/p(r)$ 将减小，即甲安全线 $x=f(y)$ 向左移动，记 $x=f_1(y)$（如图 1－8 所示），平衡点 M 移到 M_1.

如果甲方又发展反弹道导弹和多弹头导弹，这是乙方给甲方以毁灭性打击的最小的核武器数 y_0 将上变至 y_0'，于是乙安全线上移为 $y=g_1(x)$，平衡点由 M_1 移至 M_2.

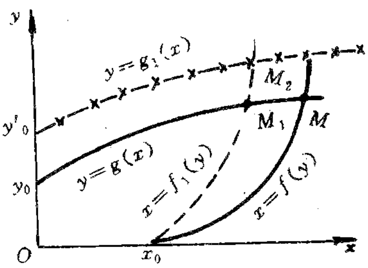


图 1－8　甲方加固核基地，发展反弹道导弹时平衡点的移动

显然，乙方也可以采用甲方同样的手段对付甲方，这表示核武器竞赛将升级.

§3　数学建模的特点、方法、步骤和分类

一、数学建模的特点

从上节几个简单的例题中就可以看出，数学建模是解决实际问题一项重要的手段，为了更好地使用这个方法，还必须注意它自身一些特点.

1. 模型的复杂性和多样性. 数学建模与某门课程中某单元的"应用题"有着显著的差异. "应用题"多数是出自于所谓物理领域（例如力学、电学等学科及机电、土木、冶金等工程技术），它解题的方法一般局限于本章或本门课程，它的结果往往有唯一正确的答案. 而数学建模的复杂性与多样性远远超过"应用题". ① 数学模型的问题不仅来自于物理领域，而且还大量来自于非物理领域（诸如经济、人口、交通、生态、医学、社会等领域）. ② 由于建模者

的知识、经验、能力的差异，从而导致观察、分析、理解的不同，同一个实际问题可以建立不同的数学模型. ③ 同一个数学模型由于使用数学工具不同，得到的结果也不尽相同，各有千秋，无所谓绝对“对”与“错”，它们都是从一个侧面反映了实际问题，只有通过实践检验才能评判出它们的优劣. ④ 由于实际问题是多种多样的，不可能要求把各种模型做成预制品供建模时使用，此外，也无法归纳出若干普遍适用的建模准则和技巧，往往建模者的想象力，洞察力，判断力和创新思维能力，甚至灵感等在建模过程中所起的作用比一些具体的数学知识更大.

2. 模型实用上的可行性. 一般来说总是希望所建立的模型尽可能反映现实问题，但是一个非常逼真的模型在数学上是难于处理的，即使数学上能处理，但应用时所需要的“费用”相当高，这样也没有太大的实用价值. 因此，在建模时不能过分要求所建立的模型完全真实地 反映现实问题，只要能近似地反映实际问题，其所得到的结果能为实际问题提供一个分析、预报、决策和控制的依据就行.

3. 模型的渐进性. 它指的是两个方面，一方面是一个复杂的实际问题的模型通常不可能一次成功，需要经过建模过程的反复迭代、简化、抽象、计算、论证、检验等，以便获得越来越满意的模型. 另一方面是在科学发展的过程中随着人们认识和实践能力的提高，各门学科中数学模型也存在着一个不断完善和推陈出新的过程. 从 19 世纪力学、热学、电学等许多学科由牛顿力学模型主宰，到 20 世纪爱因斯坦相对论模型的建立，是模型渐进性一个明显的例论.

4. 模型应用的广泛地. 模型是现实对象的抽象化、理想化的产物，它不为对象的所属领域所独有，它可以转移到其他领域，例如本章例 3 中介绍的 Logistic 模型，它也可以用到人口的增长等其他领域，也就是说数学建模与其他数学分支一样具有应用的广泛性.

最后，我们还必须指出：

5. 模型的局限性. 主要是指：① 因为在建模时对实际问题进行了简单化和理想化，从而模型的结果只是相对的近似的. 如果要用模型的结果对实际问题进行分析、预测、决策和控制时，对那些被忽视简化的因素要适当加以考虑. ② 由于人们的认识和科技发展水平的限制，有一些实际问题内部机理复杂，影响因素众多，测量手段不够完善，难于建立有实用价值的模型，例如生铁冶炼过程. 还有些问题尚未发展到寻求数量规律的阶段，也谈不上建立模型，例如中医诊断过程.

二、数学建模的方法和步骤

数学建模的方法大体上分两大类，一类是机理分析法，一类是模拟法（或称测试分析法）. 所谓机理分析法就是根据实际问题的特性，找出反映内部机理规律的变量以及它们之间的关系和类型，用数学结构的式子表达出来，如果实际问题中变量之间的关系是确定性变量，则建模时所用数学工具多数是微积分、微分方程、运筹学等；如果实际问题中变量之间的关系是随机变量，则建模时多数用概率、统计以及与它们有关的一些数学方法. 另一类问题是内部机理规律无法直接寻求，找不到反映实际问题的变量之间的关系，只是可以测量出输入与输出的数据，我们可以在多次测量的数据基础上运用统计分析法，按照事先确定的标准在某一类模型中选出一个与数据拟合得最好的模型，这就是所谓模拟法（或称测试分析法）. 不管用什么方法，建立模型的步骤大致可归纳为：

1. 调查研究. 在建模之前首先要对所要解决的问题实际背景、特征、内在的联系有深刻

的了解，明确建模的目的和要求，并收集建模必需的各种信息、数据等，在调查研究的基础上，初步确定建立什么样的模型（离散模型、连续模型、随机模型等）以及所用的数学工具（微分方程、图论、概率统计等）. 再根据初步确定的模型的类型和所使用的方法，有目的地更合理地收集数据，阅读有关的书籍以及向有关专家或从事实际工作的人请教，做好建模前充分准备工作.

2. 模型假设. 实际问题错综复杂，涉及面非常广，因此在建模时要面面俱到，无所不包是不可能的，也是必要的，因此一个模型，只要能反映所需的某一个侧面就行了. 在建模之前根据实际问题的特征和建模的目的，对问题进行必要的、合理的简单化、理想化、抓住主要的因素，忽略次要的因素，在相对比较简单的情况下，理清变量之间的关系，对模型作出假设，这一步在建模时很关键，因为假设作得不合理或过份简单，会导致模型的失败；如果假设作得过份详细，把各方面的因素都考虑进去，下一步就无法进行. 因此对模型的假设要不断进行修改补充.

3. 建立模型. 在调查研究和对模型作出合理假设的基础上，确定模型中关键的变量是什么性质（确定性和随机性）以及准备用什么数学工具之后，再根据实际问题内在联系，变量之间的相互关系，用数字、图表、符号、公式把它们表达出来，经过数学上的分析、推理、论证、得到一个定量（或定性）的关系，就形成数学模型. 显然同一个问题，由于建模者知识、经验、能力的差异，可以得到不同的模型.

4. 模型求解. 不同的模型要用不同的方法求解，例如解方程、画图形、逻辑推理、数值计算等方法，特别要用先进的计算机技术来为模型求解服务. 在求解中要注意到模型中变量之间的关系对解的稳定性的影响以及误差分析.

5. 模型检验、修改与应用. 模型求解的结果，必须通过实践来检验，这一步十分重要，如果模型计算出的结果与实际的数值比较吻合，则模型是合理的、适用的. 反之，如果模型的与实际数值相差太大，则模型不合理和不适用，这时需要对模型进行修改，特别是模型的假设要进行修改、补充、重新建立模型，这种过程要反覆进行，才能获得较满意的结果. 数学模型已经渗透到工程技术、自然科学、生命科学、环境科学、社会科学等领域，充分运用数学建模这个工具，将会为促进工农业生产和科技的进步起到重要的作用.

三、数学模型的分类

由于数学模型本身是复杂多样的，再加上建模者知识、经验、能力的差异，同一个问题，可以用不同的方法建立不同模型，因此，要严格绝对的分类是不可能的，也是没有必要的，甚至对建立一个好的模型来说是不利的. 但对一个初学者，在对实际问题进行调查研究分析的基础上初步确定模型的类型以及所用的数学工具，这对建模会有一定的帮助. 数学模型常用的按下列几种方式分类.

1. 按模型中主要的变量是离散的、连续的、确定的、随机的将模型分为离散模型、连续模型、确定性模型、随机性模型.

2. 按建模所用的方法可分类为：初等模型、几何模型、微分方程模型、图论模型、规划论模型、马氏链模型等.

3. 按模型的应用领域分类；如人口模型、交通模型、生态模型、经济模型等.

4. 按模型中的变量是否考虑时间因素的影响分为静态模型与动态模型.

还有其他的分类，在此不一一列举.

习题一

1. 什么是数学模型?并举例说明建立数学模型的必要性.

2. 为了培养想象力，洞察力和判断力考察对象时除了从正面分析外，常常需要从侧面或反面思考，试尽可能迅速地回答下列问题:

(1)37 支球队进行冠军争夺赛，每轮比赛中出场的每两支球队中胜者及轮空者进入下一轮，直至比赛结束，问共需进行多少场比赛?

(2) 甲乙两站之间有电车相通，每隔10分钟甲乙两站相互发一趟车，但发车时刻不一定相同. 甲乙之间有一中间站丙站，某人每天在随机的时刻到达丙站，并搭乘最先经过丙站的那趟车，结果发现100天中约有90天到达甲站;仅有10天到达乙站，问开往甲乙站的电车经过丙站的时刻表是如何安排的.

(3) 一男孩和一女孩分别在离家 2 000 米和 1 000 米且方向相反的两所学校上学，每天同时放学后分别以 4 千米/小时和 2 千米/小时的速度步行回家. 一小狗以 6 千米/小时的速度由男孩处奔向女孩，又从女孩处奔向男孩，如此往返直至回到家中，问小狗奔波了多少路 程?如果男孩和女孩上学时小狗也往返奔波在他们之间，问当他们到达学校时小狗在何处?

3. 如果银行存款利率为 5.5%，问如果要求到 2010 年本利积累为 100 000 元，那末在 1990 年应在银行存入多少元?而到 2 000 年的本利积累为多少元?

4. 某城市的人口模型为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{25}x - \frac{1}{25 \times 10^6}x^2,$$

如果不考虑该市的流动人口的影响以及非正常死亡，设该市 1990 年人口总数为 8 000 000 人，试求该市未来的人口总数，当 $t \to \infty$ 时发生什么情况.

第二章　初等模型及方法

本章介绍的模型都比较简单，主要是通过实例，讨论如何用简单的数学方法来建立实际问题的数学模型.

解决实际问题，应尽可能地用简单的方法建立数学模型. 因为方法简单明了，更易被人们所理解接受和采用. 事实上，衡量一个模型的好坏并不以所应用的知识的深浅为标准，而全在于它的应用效果. 通过本章所列举的实例，读者将会看到，即使运用简单的数学方法也可以解决一些饶有兴味的实际问题，有些问题表面上看来甚至与数学毫无关系. 需要强调的是，善于建立数学与实际的问题的联系是至关重要的. 希望本章所给出的一些建模方法对读者有所帮助.

§1　比例方法

对于实际问题，建立数学模型的方法很多，其中最简单的一种就是比例方法；也就是找出反映问题主要变量之间的比例关系，由此对问题进行分析、讨论，得到一些有意义的结论.

例 1　动物的身长与体重

四足动物的躯干的长度（不包括头、尾）与它的体重有什么关系，这个问题有一定的现实意义.

动物的生理构造因种类不同而异，如果陷入生物学对复杂的生理结构的研究，将很难得到什么有使用价值的模型. 这里我们在十分粗略的假设基础上，借助力学的某些结果，建立动物身长和体重的比例关系.

为了使问题简化，不考虑动物的头尾，将四足动物的躯干视为质量为 m 的圆柱体，为了利用一些现有结果，我们作如下的假设.

假设　动物躯体为一支撑在四肢上的弹性梁.

若动物躯体的长度为 l，直径为 d，断面面积为 S，体重为 f，δ 为躯干在自重作用下的最大弯曲，如图 2－1 所示.

由假设，动物躯干看成一根支撑在四肢上的弹性梁. 由弹性理论知

$$\delta \propto \frac{fl^3}{sd^2} \qquad (2.1)$$

因 $f \propto m \propto sl$，所以

$$\delta \propto \frac{l^4}{d^2} \text{ 或 } \frac{\delta}{l} \propto \frac{l^3}{d^2} \qquad (2.2)$$

$\frac{\delta}{l}$ 称为动物的相对下垂度，从生物学角度知，

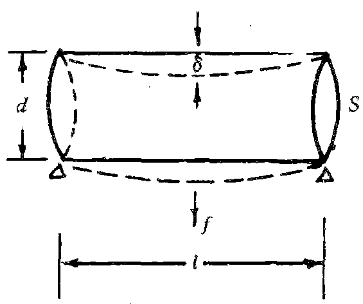


图 2－1

$\frac{\delta}{l}$ 一定存在一个上限，若超过这个上限，动物和躯体将会残废、变形而被淘汰（四肢无法支撑）；当 δ/l 远小于这个界限，四肢的材料超过了支撑躯体的