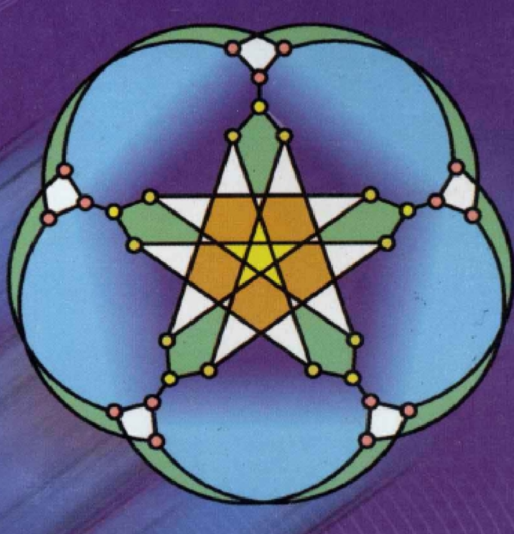
经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准

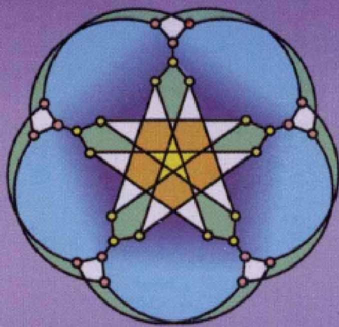
实验教科书

选修系列 4－8

统筹法与图论初步



湖南教育出版社



ISBN 7-5355-4204-2

9 787535 542045 >

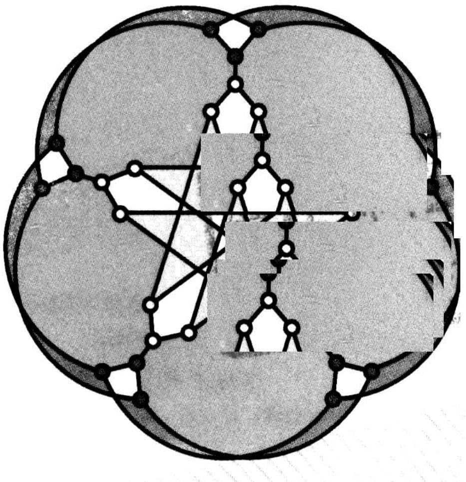
G·4199 定价: 6.55 元

普通高中课程标准

实验教科书

选修系列 4—8

统筹法与图论初步



湖 南 教 育 出 版 社

普通高中课程标准实验教科书
选修系列 4—8
统筹法与图论初步
责任编辑：孟实华　甘　哲　邹伟华
美术编辑：肖　毅
技术插图：徐　航
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 643 号）
网　　址：http://www.hneph.com
电子邮箱：postmaster@hneph.com
湖南省新华书店经销
湖南新华印刷集团有限责任公司(邵阳)印刷
890×1240　16 开　印张：5
2004 年 6 月第 1 版　2004 年 6 月第 1 次印刷
ISBN7—5355—4204—2/G·4199
定　价：6.55 元

主　　编　张景中　陈民众
执行主编　李尚志

本册主编　王树禾
编　　委　郑志明　孟实华

领会统筹与图论的思维方式

——为着提高数学素质

亲爱的同学们：

选修统筹法与图论初步这门课程是明智的．事实上，图论是离散数学的骨干内容，离散数学则是计算机科学技术与网络信息科学的理论基础；统筹法是现代应用数学的重要内容．我国著名数学家华罗庚生前曾长期从事统筹法的研究与推广应用工作，取得了丰硕的理论成果与经济效益．在本课程当中，我们将介绍统筹法的方法与实用．

图论是从哥尼斯堡七桥问题和在正十二面体上周游世界等看似并不重要的数学游戏与数学玩具的讨论之中诞生的，后来发展出诸如脍炙人口的四色问题，即猜想“用四种颜色对任何地图上各国的版图着色，可使邻国异色”等一大批著名的图论问题．这些问题成了图论中会下金蛋的鹅，促进了图论的发展，例如1976年，美国科学家用计算机完成了四色猜想为真的证明，开辟了机器证明的新时代；而诸如货郎问题，即一位货郎担着担子到各村去售货，为他设计一种耗时最少的售货路线；色数问题，即任给一个图，对它的顶进行着色，最少用几种颜色，可使邻顶异色，等等一大批图论问题的求解，遇到了计算复杂度方面的严重困难，至今不能有效地给出解答，促进了算法理论的进展．另一批诸如中国邮路问题等实际问题，也推动了图论与统筹法的进展．

学习统筹法与图论，不但能获得一些数学知识和方法，借以解决某些理论问题和实用问题，更重要的是它能培养我们的形象思维与抽象思维的能力，提高我们的数学悟性和数学机敏性．以对人的科学素质之培养提高而论，它是青少年需要接受的极富教育价值的数学科目之一．图论与统筹法中的问题，外表状似通俗简朴，例如四色猜想，可以在两三分钟之内向街上随机遇到的行人（哪怕是一位文盲）讲清

楚题意，还有与四色问题一样提法简明的不少问题，却都隐藏着非平凡的难度！你们在做统筹法与图论习题的过程当中，一定会感悟到在统筹法和图论问题面前必须全力以赴严肃认真地思考．这里极少有代入公式或有现成解法可用的机会，有的问题必须百思而解，有的问题恐怕反复思索也难以解答．

统筹法与图论当中充满了美丽的图示、高明的技巧、精彩的推理、绝妙的算法和广泛的应用，充分体现了数学崇尚理性、崇尚抽象、崇尚艺术性、崇尚实用的现代思想和价值连城的文化价值与实用价值，它的这些美好的科学形象对青少年产生了挥之不去的诱惑力，同学们正值好奇心强、思维敏捷、活泼贪玩的年龄，最有条件把统筹法与图论学好，英国大数学家哈代说："数学是年轻人的游戏．"

选修统筹法与图论课程，是体验如何"做数学"的好机会，是独立思考和发挥创新能力的好机会，它并不比任何传统的初等数学难学，但它却可以引导我们开拓数学视野，接受现代数学的思维方式，树立把实际问题化成图论模型或用统筹法去解决实际问题的思想．

祝愿同学们在统筹法与图论的学习当中收获知识、收获快乐、增长非本能的智慧和科学灵气．

作　者

2004 年 5 月

目录

第1章 统筹法

在错综复杂的工艺过程中，任务多了，几百几千甚至有好几万个；关系多了，千头万绪．往往由于一两个零件没有完成，耽误了一架复杂机器的出厂时间；也往往抓得不是关键，连夜三班，急急忙忙，完成这一环节之后，还得等待旁的部件才能装配．

——华罗庚《统筹法平话》

1.1 统筹问题实例与统筹图

什么是统筹问题？什么是**统筹图**（plan as a whole graph）？为了对这些问题有一个直观的认识，让我们首先从一些最简单的具体问题谈起.

图 1-1

一日，某医院送来一位车祸急诊病人，那时已是半夜子时，院长立即用电话通知赵医生与钱医生马上骑自行车来医院抢救病人. 赵医生从家到医院骑自行车需 20 分钟，钱医生从家到医院骑自行车需要 35 分钟，如图 1-1 所示. 赵医生与钱医生必须同时在场才能开始手术；问病人最早何时可以接受赵、钱二位医生的急救？我们从图 1-1 看出，关键问题是钱医生来得慢，他在路上即使没有半点耽搁，最早也只能在 0 点 35 分开始手术；赵医生接到通知后也应赶快起床向医院赶过去，但他可以不像钱医生那样紧张，只要不迟于 0 点 15 分离开家，就不会因为自己迟到而耽误了手术.

上面的子夜抢救实例就是一个统筹问题. 钱医生家到医院是关键路径，钱医生最早可动身的时间是 0 点，最迟可动身时间也是 0 点，不然就会耽误抢救，而赵医生最早可动身时间是 0 点，最迟必须动身时间是 0 点 15 分，不然也会耽误抢救；赵医生去医院最迟与最早的所谓“时差”为 $15-0=15$ 分钟，即只允许赵医生在路上因故耽搁 15 分钟.

下面让我们再看一个统筹问题的实例.

校田径运动会今天下午闭幕，下午 4 点开始还有男女 100 米决赛，男女跳高和男女铅球决赛要进行；女子 100 米决赛结束后紧接着是男子 100 米决赛；由于用同一个跳高架，女子跳高结束后才能开始男子跳高，男女铅球则可在两个场地同时进行. 凭运动会的经验，一般情况是跳高项目占用时间最多，因为同一个高度上每个跳高运动员

允许3次试跳，3次跳不过才被淘汰，大家都跳过至多3次之后，把横杆提升2～3厘米，再进行下一轮的试跳. 而且运动员每跳一次之后，往往要把运动鞋的带子松开，穿上长运动服，轮到他跳时，又慢慢把长衣服脱去，系好鞋带，稍事活动，甚至要走来走去去度量助跑的步点等等，遇到径赛场上有项目进行时，一般要等人家闯线后才开始助跑试跳，以免影响跳高运动员的注意力，尤其到只剩下一两位优秀跳高运动员，面临破记录试跳时，更是从容不迫，往往要耗用很多时间试跳一次.

从上述分析，我们知道，要在晚饭前结束全部项目，关键是女子跳高与男子跳高这两个项目的时间必须控制好，必要时要指令每位运动员必须在多少分钟内完成一次试跳. 事前预计各项目的时间安排是

(1) 16：00，女子100米决赛，男女铅球，女子跳高开始.

(2) 女子100米结束时男子100米才可以开始入场.

(3) 女子跳高结束时男子跳高才可以开始.

(4) 女子铅球、男子铅球、男子100米和男子跳高先后结束.

(5) 运动会闭幕.

各项目预计耗时为：

男女100米各30分钟，男女跳高各50分钟，男女铅球各40分钟.

我们把男女100米决赛、男女铅球决赛和男女跳高决赛这几个事项和过程画成下面的统筹图（见图1-2）.

诸如子夜抢救、运动会等看似不会有多少数学含量的平凡生活当中，居然能寓含一种精美有用的数学内容. 留心你身边的每一件事，数学的工夫一部分在数学之外.

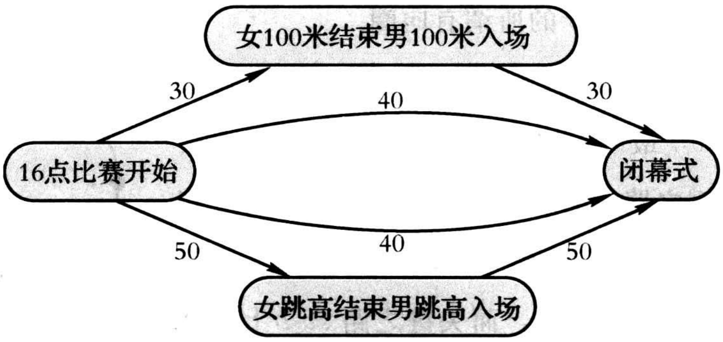


图1-2

图1-2中各条带箭头的线（曲线或直线）段分别表示一项比赛的过程，它旁边写的30，40，50等时间是相应的比赛所需的时间（分钟），例如从“16点比赛开始”到“女100米结束男100米入场”间的

箭头线代表用30分钟进行了女100米决赛这个过程.

如果用字母来表示各个事项，则可令

s：16 点比赛开始，

v_1：女 100 米结束男 100 米入场，

v_2：女跳高结束男跳高入场，

t：闭幕式.

则图 1-2 变成图 1-3，s，v_1，v_2，t 也可以用一个点表示，称为顶点.

我们把形如图 1-3 的图称为有向加权图，有向是指每条联络两个事项的曲（直）线段有箭头指示方向，这种有向线段称为有向边；各有向边旁写的数（这里代表所需的时间）称为该边的权数或权重，简称权，各边带有权的有向图就是有向加权图.

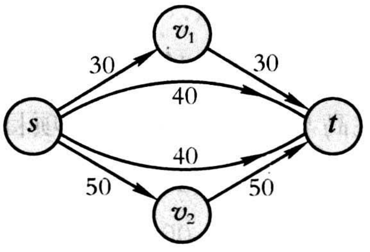


图 1-3

在有向图中形如图 1-4 的结构称为一条有向路，

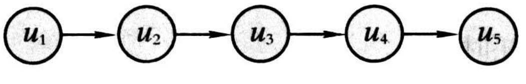


图 1-4

记之为 $P(u_1, u_5)$，u_1 是起点，u_5 是终点.

在有向加权图 1-3 中，每个顶点都在 s 到 t 的一条有向路上，此图中没有形如图 1-5 的所谓有向圈.

在图 1-3 中，各有向路上的总耗时，以 $P(s,t)=sv_2t$ 最多，这条路对于提前结束运动会是一条关键之路，必须想办法缩短这条关键之路上的耗时，如果去督促 sv_1t 这条有向路上男女 100 米比赛的耗时减少，而关键之路 sv_2t 上的耗时不变，运动会还是只能在 100 分钟后才能结束，督促男女铅球比赛过程（分别对应有向路 st）缩短时间，不改变跳高所用的时间同样也是不管用的，如果把男女跳高压缩成和男女 100 米一样，也是各用 30 分钟，则运动会可以在 17：00 结束，比原

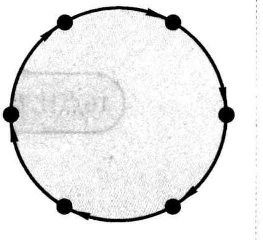


图 1-5

按原计划，男子跳高的最早可开始时间是 4：50，即女子跳高结束之时乃男子跳高的最早开始时间；同时 4：50也是男子跳高最迟必须开始时间；而女子 100 米决赛则未必在 4：00开始，这个项目即使在4：40开始也不会使闭幕拖延，4：40 是女子 100 米最迟必须开始的时刻，不然运动会就不能按计划结束. 女子 100 米最迟必须开始时间与最早可开始时间的时差为 40 分钟.

来预计的在下午 5 点 40 分结束提前 40 分钟.

再看一个日常生活中的实例. 有客人来访，请喝茶. 暖瓶里已无开水，于是清洗不锈钢烧水壶和茶壶茶碗，点火烧水，拿来茶叶，水开后泡茶送客人喝. 可能有三种“备茶”的方式.

方式 1 先去洗烧水壶和茶壶茶碗，拿来茶叶，一切就绪后，再拿烧水壶灌水去烧，等烧开后再泡茶.

方式 2 洗净烧水壶，灌上凉水去烧，坐等水开之后才急匆匆找茶叶和洗茶壶茶碗.

方式 3 洗净烧水壶，灌上凉水，放在煤气灶上烧，在等待水开的时间内去找茶叶和清洗茶具.

以上三种方式哪种最优，明眼的人一看便知，方式 1 与方式 2 不如方式 3 好，前两种方式“窝工”. 如果把方式 3 画成有向图，则得图 1-6.

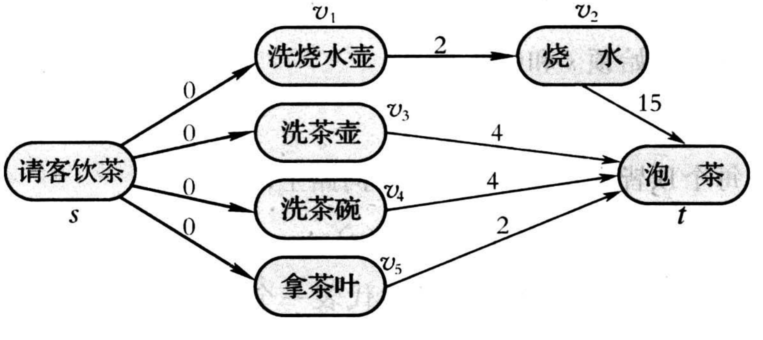


图 1-6

我们画出了一个每个顶皆在由始顶 s 到止顶 t 的有向路上的有向图，且此图无有向圈. 每个顶代表一个事项，一条边代表一个工序，边旁的权是执行此工序的耗时，有的工序要求只有前期某些工序完成后才能开始，例如从烧水到泡茶这道工序，图 1-6 中用有向边 v_2t 表示，这道工序要求洗烧水壶到烧水，即有向边 v_1v_2 这道工序完成之后才能“开工”.

从请客饮茶到泡完茶为止，最多用 2＋15＝17 分钟的时间，是 $\boxed{\text{请客饮茶}} \xrightarrow{0} \boxed{\text{洗烧水壶}} \xrightarrow{2} \boxed{\text{烧水}} \xrightarrow{15} \boxed{\text{泡茶}}$ 这条有向路上各工序耗时（边权）之和. 这是一条关键之路，欲让客人早些喝茶，只有缩短

洗水壶和烧水这两道工序是关键工序，只有这两道工序的耗时缩短，才可使客人早点饮茶.

欲运筹帷幄者必先精通数学.

这条路上的工序的耗时，例如把煤气闸门开大些，可以把烧水时间 15 分钟缩短成 10 分钟，总耗时由 17 分钟缩减到 12 分钟.

可以说开运动会安排项目和每个项目的耗时或请客喝茶是生活中的“系统工程”，我们要统一地规划审核一下，一个过程必须放在另外哪些过程完成之后进行，最早可以何时开始，最迟何时必须开始才不至于耽误总工期，总工期如何求出等等问题都需要统筹计算. 我们用诸如图 1-2 与图 1-6 来表达一个系统工程的流程，这种图叫作统筹图. 从这种图上，我们能算出应缩短哪些工序上的耗时才能使总工期缩短等必须十分关心的关键问题的答案. 这在经济建设与科研攻关等庞大的系统工程当中，显得尤其重要，因为赶工一天也许会因此收入一笔赶工费，误工一日则可能按合同被处以大笔罚金. 我们需要有一种有效的数学方法（有效算法）来解决这种问题，这种数学方法就是统筹法，它是一种先进的数学方法.

一般地，称下述有向加权图 G 为一个统筹图：

1. 存在起始顶 s 和终止顶 t.
2. G 中无有向圈.
3. 每个顶皆在从 s 到 t 的某有向路上.
4. 对每个边 $e\in E(G)$，加权 $l(e)$.

约定：(1) 统筹图上的每条边代表一个过程或称工序；(2) 以 s 为尾的边代表的过程可以马上开始；(3) 不是 s 的顶 v 仅当以 v 为头的有向边代表的过程全部完成时，以 v 为尾的边代表的过程才能开始；(4) $l(e)$代表过程 e 的耗时（权).

绘制统筹图可按下述步骤进行.

(1) 在最右侧画一个顶点 t，代表竣工事项. 例如图 1-6 中的 泡茶 即为 t.

(2) 在 t 的左侧画上代表所有表示 t 的“紧前”工序的有向边，这些边的头在 t，再画上这些边的尾部顶点 $v_1^{(1)},v_2^{(1)},\cdots,v_k^{(1)}$，例如图 1-6 中的 v_2，v_3，v_4，v_5.

(3) 对于 $v_1^{(1)},v_2^{(1)},\cdots,v_k^{(1)}$ 中的每一个顶，犹如 (2) 中的 t 一样对待，分别在它们的左侧画上所有代表以 $v_i^{(1)}(i=1,2,\cdots,k)$为头的工

序，依此类推.

(4) 在最左侧画一个顶 s 为开工事项. 如果(3)结束时只有一个无紧前工序的顶，则此顶即为 s，不然，以 s 为尾，向每个无紧前工序的顶点画一有向边，且令这种边权为零，见图 1-6.

这里仅给出一个比较“规矩”的办法，你可以不按这种办法办，而想出一个变通的更妙的办法来画出你面对的具体问题的统筹图.

1.2 关键工序、关键路和工序的最早可开工时间

在一项系统工程当中，有的工序，只要它所用的时间出现任何延误，则会使全工程的峻工时间推迟，这种工序称为关键工序. 例如请客饮茶当中的烧水到泡茶的工序，在统筹图 1-6 中那条权为 15 分钟的有向边 v_2t，就是关键工序.

对于给定的一个复杂的统筹图，关键工序在哪里？如何在合理的时间内把它们找到？

一个重要的问题是首先要概算从开工到竣工最短需要多长时间.

观察请客饮茶的统筹图 1-7（是图 1-6 的简写），

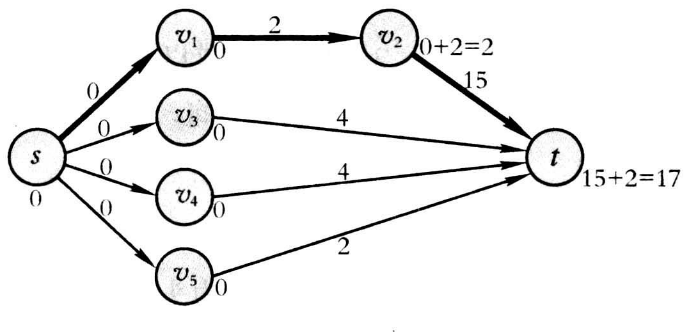


图 1-7

我们把 s 给以标志 0，表示想给客人喝茶这一事项是开始时间，v_1，v_3，v_4，v_5 标志成 0，表示事项 v_1，v_3，v_4，v_5 最早可开工时间是 0，这时 v_2 与 t 未标志，还不能标志出 t 事项最早可开工时间，因为还不知道 v_2 的最早可开工时间，必须先标志 v_2 的最早可开工时间. 到达 v_2 的工序的尾部已被标志成 0，所以 v_2 标志成 $0+2=2$，即 v_2 最早可开工时间是第 2 分钟(以 s 开始时为 0 分钟)，至此，达 t 的一切工序之尾部皆已标志，t 应标$\{2+15,4+0,4+0,2+0\}$中的最大值，即

要等最后进窝的那只小鸡进窝之后，才能盖上鸡笼.

t 标志 17，表示 t 的最早开始时间为第 17 分钟. 为什么取最大值呢? 因为必须等达到 t 的各工序都完成时，即最慢的那个工序完成时，t 事项才可开始.

由这个实例提醒我们，为求得竣工的最早时间，可以用下面的算法.

关键路算法（critical path method（CPM））

（1）标志 s 为 $\lambda(s)=0$，其他顶未标志.

（2）找统筹图中的一个顶 v，v 未标志，而以 v 为头的有向边之尾都已标志，把 v 标成 $\lambda(v)$，$\lambda(v)$ 是 $\{l(u_1v)+\lambda(u_1),l(u_2v)+\lambda(u_2),\cdots,l(u_{k_0}v)+\lambda(u_{k_0})\}$ 中的最大值，其中 u_1v，u_2v，…，$u_{k_0}v$ 是以 v 为头的一切有向边. 如果 $\lambda(v)=l(u_{k_1}v)+\lambda(u_{k_1})$，则把有向边 $u_{k_1}v$ 染成红色，其中 $1\leqslant k_1\leqslant k_0$.

（3）$v=t$ 时，执行完(2)时止，从 s 到 t 的有向红色路即为一条**关键路**（critical path），$\lambda(t)$ 为竣工需要的最短时间. 若 $v\neq t$，则转而再执行(2).

例如图 1-7 中的粗实线即为一条红色关键路.

这个算法的耗时是 G 的边数的常数倍，这种耗时为图的边数与顶数的一个多项式的算法是有效算法.

定理 1 在关键路算法中，$\lambda(v)$ 是到完成以 v 为头的一切工序所用的最少时间，即事项 v 可以开始的最早时间，也是 v 的紧前工序的最迟到达时间.

全班最后一个（迟到）同学到校之时，才是可以集合出发全班去旅游之时.

***证明** 先证算法(2)中的顶 v 的存在性，若这种 v 不存在，则对每个未标志的顶 v，皆可找到一边，以 v 为头，但此边以另一未标志的顶为尾，我们把统筹图用 G 表示，G 的顶数有限，则在 G 中能找到有向回路，与统筹图中无有向回路相违.

不证步骤（2）中所称的 v 的存在性，整个算法就失去了可行性的保障.

下面用对标志次数的数学归纳法证明 $\lambda(v)$ 是 v 的最早可开工时间. 第一次标志的是 s，标成 $\lambda(s)=0$，命题自然成立. 假设对前 k 次标志的顶，其顶标 $\lambda(v)$ 是 v 的最早可开工时间，即以 v 为头的全部过程（工序）皆完成所用的最少时间；考虑第 $k+1$ 次标志的顶 v_{k+1}，由算法的步骤（2）知，$\lambda(v_{k+1})$ 是

$$\{l(u_1v_{k+1})+\lambda(u_1),l(u_2v_{k+1})+\lambda(u_2),\cdots,l(u_{k_0}v_{k+1})+\lambda(u_{k_0})\}$$