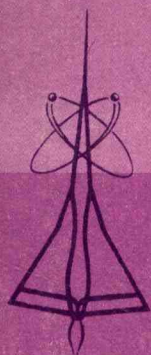


航空高等院校教材

空气动力学数值计算方法

杨岍生 俞守勤 合编
陈再新 黄明恪



航空专业教材编审组

空气动力学数值计算方法

杨岙生 陈再新 合编
俞守勤 黄明恪

航空专业教材编审组

内 容 简 介

本书着重论述了空气动力学中常用的几种数值计算方法。全书共分四章。第一章讲核函数配置法，第二章讲有限基本解影响系数法，第三章讲有限差分法，第四章讲有限元素法。各章都力图在有限篇幅内讲清计算原理、方法并附有若干个算例。读者对象主要是空气动力学专业的高年级本科生和研究生，也可供相邻专业的学生、研究生和从事空气动力学工作的科技人员参考。

空 气 动 力 学 数 值 计 算 方 法

杨岷生 陈再新 合编
俞守勤 黄明格

※

航空专业教材编审组出版
南京航空学院印刷厂印装

※

787×1092 1/16 印张 13.5 字数 345.6 千字

1984年7月第一版 1984年7月第一次印刷 印数 0001—1000 册

统一书号：21128c 定价：1.40 元

前 言

空气动力学数值计算方法是当前空气动力设计和研究中使用的—种较为重要的方法和工具，而且随着计算技术和电子计算机的发展更日益显示其良好的效能。本书力图在有限篇幅内将目前在求解空气动力学线性微分方程和非线性微分方程时广泛应用的四种重要数值方法作扼要的阐述，并对每种方法给出有关空气动力学绕流问题的数值计算的实例，使读者在掌握基本方法的前提下，培养进行空气动力学数值计算的能力。

本书的主要读者对象是航空院校空气动力学专业的本科高年级学生和研究生，可作为教学时数约60学时的教材。也可作为从事空气动力数值计算工作的科技人员的自学参考书。

本书由南京航空学院编写，共分四章。第一章为空气动力学中的核函数配置法，由陈再新同志编写。第二章为空气动力学中的有限基本解影响系数法，由俞守勤同志编写。第三章为空气动力学中的有限差分法，由黄明恪同志编写。第四章为空气动力学中的有限元素法，由杨岷生同志编写。最后，杨岷生教授对全书作了校订。

承北京航空学院朱自强副教授对本书作了审阅，提出了不少宝贵意见，特此致谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，敬希读者批评指正。

编 者

1984年3月

目 录

第一章 空气动力学中的核函数配置法	(1)
§ 1—1 联系 z 向速度和载荷系数的积分方程.....	(1)
[一] 小扰动速度位 φ 和加速位 Ω 的积分关系式.....	(1)
[二] 在谐振运动时,联系下洗速度幅值和载荷系数幅值的积分方程.....	(3)
§ 1—2 核函数处理.....	(7)
[一] 亚音速平面核函数.....	(7)
[二] 超音速平面核函数.....	(16)
§ 1—3 载荷幅值 Δp^* 的多项式级数近似法.....	(20)
[一] 亚音速机翼载荷幅值 Δp^* 的多项式级数近似.....	(20)
[二] 超音速机翼载荷幅值 Δp^* 的多项式近似.....	(21)
§ 1—4 升力面沿弦向与展向控制点和积分点位置的确定.....	(24)
[一] 弦向积分时控制点和积分点的位置.....	(24)
[二] 展向积分时控制弦的位置.....	(26)
[三] 展向积分弦位置的确定及亚音速核函数积分方程的展向积分技术.....	(28)
[四] 超音速核函数积分方程的展向积分技术.....	(31)
§ 1—5 核函数法的数值解示例.....	(32)
[一] 薄翼的谐振运动和边界条件.....	(32)
[二] 确定亚音速可压流中三维机翼定常载荷的核函数法.....	(34)
[三] 超音速三维薄翼定常载荷的数值计算方法.....	(40)
[四] 超音速三维机翼非定常谐振载荷幅值的数值计算方法.....	(47)
附 录 (1-2-53)式的证明.....	(48)
参考资料.....	(49)
第二章 空气动力学中的有限基本解影响系数法	(50)
§ 2—1 有限基本解方法的概述.....	(50)
§ 2—2 计算亚音速定常流中薄翼升力特性的涡格法.....	(51)
[一] 气动模型.....	(51)
[二] 涡和控制点的位置.....	(52)
[三] 机翼上网格的划分.....	(53)
[四] 马蹄涡的诱导速度和影响系数.....	(56)
[五] 机翼环量分布的线性代数方程组的建立.....	(60)
[六] 机翼的有关升力的气动系数.....	(62)
[七] 算 例.....	(63)

§ 2—3 计算亚音速定常流中, 薄翼—圆柱机身组合体升力特性 的涡格镜像法	(65)
[一] 气动模型	(65)
[二] 几何坐标	(66)
[三] 马蹄涡和镜像马蹄涡系的影响系数	(68)
[四] 机身上源(汇)的诱导速度及其强度的确定	(69)
[五] 二维偶极子的诱导速度	(72)
[六] 机翼环量分布线性代数方程组的建立和解法	(72)
[七] 组合体的有关升力的气动系数	(73)
[八] 算 例	(74)
§ 2—4 定常、超音速涡格法	(75)
[一] 奇性的贡献	(75)
[二] 斜马蹄涡的贡献	(77)
[三] 数值计算方法和算例	(80)
§ 2—5 计算亚音速非定常机翼载荷分布的偶极子网格法	(81)
[一] 非定常亚音速升力面理论的奇异积分方程及核函数的计算	(82)
[二] 机翼的气动模型和影响系数	(88)
[三] 影响系数的计算	(89)
[四] 边界条件和复线性方程组的建立	(93)
[五] 算 例	(93)
附 录 升力面的气动模型	(96)
参考资料	(98)

第三章 空气动力学中的有限差分法 (99)

§ 3—1 抛物型方程的有限差分法	(99)
[一] 一维扩散方程	(99)
[二] 有限差分网格	(100)
[三] 导数的有限差分近似	(100)
[四] 有限差分法	(102)
§ 3—2 收敛性、相容性与稳定性	(104)
[一] 收敛性	(104)
[二] 相容性	(104)
[三] 稳定性	(105)
[四] 相当性定理	(106)
[五] 稳定性分析方法	(107)
§ 3—3 一维扩散方程的其他差分格式	(108)
§ 3—4 双曲型方程的有限差分法	(111)
[一] 特征线和依赖区	(111)
[二] CFL 条件	(113)

[三] 举 例	(115)
[四] 一般情形的冯—诺伊曼稳定性分析法	(116)
[五] 人工粘性	(119)
§ 3—5 无粘气体动力学方程组的有限差分解法	(120)
[一] 守恒与非守恒形式的无粘气体动力学方程组	(120)
[二] 守恒的差分格式、二步拉克斯—温德罗夫(Lax—Wendroff)格式	(123)
[三] 多维二步L—W格式	(125)
[四] 麦康马克(MacCormack)差分格式	(128)
§ 3—6 超音速飞行体绕流的有限差分解法示例——激流捕捉法	(132)
[一] 气体动力学方程组	(132)
[二] 有限差分计算格式	(135)
[三] 边界点的计算	(136)
[四] 步长 Δx 的选择	(137)
[五] 关于初始值平面流动参数的确定	(140)
§ 3—7 定常跨音速位流方程的有限差分解法	(140)
[一] 位流方程	(140)
[二] 跨音速小扰动位流方程的有限差分解法	(143)
[三] 跨音速准确位流方程的有限差分格式	(148)
§ 3—8 松弛迭代收敛性的人工时间相依分析方法	(151)
参考资料	(156)

第四章 空气动力学中的有限元素法 (158)

§ 4—1 微分方程的近似解法	(158)
[一] 二次泛函数的极值理论和里兹(Ritz)解法	(158)
[二] 加权余数法(Weighted Residual Method)	(162)
§ 4—2 有限元的插值函数	(165)
[一] 一维元素的插值函数	(166)
[二] 满足一阶连续性要求的平面三角形元素的插值函数	(168)
[三] 满足一阶连续性要求的矩形元素	(172)
[四] 等参线性四边形元素	(173)
§ 4—3 有限元方程及其解法	(176)
[一] 一维问题的有限元方程	(176)
[二] 二维问题的有限元方程	(179)
[三] 有限元方程狄里赫利边界条件的嵌入	(181)
[四] 有限元方程的解法	(183)
§ 4—4 有限元法在空气动力学绕流问题中的应用	(184)
[一] 二维无粘不可压缩有位绕流	(184)
[二] 两平行板之间的圆柱体的二维不可压缩绕流	(186)

IV

[三]	不可压缩无粘流绕翼型的流动.....	(193)
[四]	二维无粘可压缩有位绕流.....	(194)
[五]	薄机型可压缩绕流的非线性小扰动方程的有限元解法.....	(195)
[六]	薄翼型跨音速绕流的有限元解法.....	(201)
参考文献		(206)

第一章 空气动力学中的核函数配置法

偏转操纵面的升力面的定常和非定常升力分布的计算,是飞机静气动弹性和颤振计算的基础。电子计算机的发展,使得有可能采用数值解法对线性积分方程进行精确求解。数值解法有网格法和核函数法两大类。前者的优点在于不需事先假定升力分布型式,但要得到一定的精度,网格数目要比较多,因而确定影响系数的线性代数方程组的阶次较高。核函数法的优点在于配置点的数目可以很少,因此最后求解升力分布函数待定系数的线性方程组的阶次较低,但是它需事先选择好与边界条件和边缘条件相一致的升力分布函数。

本章阐述空气动力学定常和非定常的亚音速与超音速核函数法。在超音速线化流场中,数值计算升力面定常和非定常载荷系数要较相应的亚音速情况为复杂,这是由于在超音速线化流场中通过扰动马赫波时,压强分布要发生不连续变化。它是将载荷系数沿展、弦向展成带权函数的切比雪夫多项式,其系数对定常流为实数,对非定常流则为复数,均是待定的;权函数取自锥型流理论所提供的解析解,它能反映通过扰动马赫波压强分布不连续变化的特性。

由于升力面线性积分方程的核是已知的,通过数值积分,并让其在翼面上有限个控制点处满足翼面边界条件,对所获得的一组确定了系数的代数方程求解,便可完全确定机翼的载荷系数分布。

§ 1—1 联系 Z 向速度和载荷系数的积分方程

[一] 小扰动速度位 φ 和加速位 Ω 的积分关系式

小扰动流场中加速位 Ω 与压强的关系为

$$\Omega = -\frac{p}{\rho_{\infty}} \quad (1-1-1)$$

加速位 Ω 与速度位 φ 的微分关系为

$$\Omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1-1-2)$$

式中 Ω , p , φ 均系 (x, y, z, t) 的函数。在升力面理论中,通常是先得出加速位 Ω 的解,然后再求速度位 φ ,故有必要把 (1-1-2) 式的形式加以改变。(1-1-2) 式是非齐次的一阶偏微分方程。为了获得其首次积分,我们采用非齐次一阶偏微分方程的通常解法,先将它化成为齐次的。设方程 (1-1-2) 的未知函数 φ 与自变量 x, t 的隐函数关系式为

$$f(\varphi, x, t) = 0 \quad (1-1-3)$$

因此

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial \varphi}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial \varphi}} \quad (1-1-4)$$

将 (1-1-4) 式代入 (1-1-2) 式, 并以 $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ 乘两端然后把一切项都移至左端得

$$V_{\infty} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \Omega \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \quad (1-1-5)$$

(1-1-5) 式系齐次一阶偏微分方程, 其相应的常微分方程组为

$$\frac{dx}{V_{\infty}} = \frac{dt}{1} = \frac{d\varphi}{\Omega} \quad (1-1-6)$$

从常微分方程 $\frac{dx}{V_{\infty}} = \frac{d\varphi}{\Omega}$ 解得 (注意在 $x = -\infty$ 时 $\varphi = 0$)

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{V_{\infty}} \int_{-\infty}^x \Omega(x', y, z, t') dx' \quad (1-1-7)$$

从常微分方程 $\frac{dx}{V_{\infty}} = \frac{dt}{1}$ 解得

$$x - x' = V_{\infty}(t - t')$$

或

$$t' = t - \frac{x - x'}{V_{\infty}} \quad (1-1-8)$$

将 (1-1-8) 式代入 (1-1-7) 式得

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{V_{\infty}} \int_{-\infty}^x \Omega\left(x', y, z, t - \frac{x - x'}{V_{\infty}}\right) dx' \quad (1-1-9)$$

或

$$\varphi(x, y, z, t) = -\frac{1}{\rho_{\infty} V_{\infty}} \int_{-\infty}^x p\left(x', y, z, t - \frac{x - x'}{V_{\infty}}\right) dx' \quad (1-1-10)$$

(1-1-9) 式即系小扰动流场中速度位 φ 和加速位 Ω 的积分关系式。

对随时间作谐振运动的情况:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= \varphi^*(x, y, z) e^{i\omega t} \\ p(x, y, z, t) &= p^*(x, y, z) e^{i\omega t} \\ \Omega(x, y, z, t) &= \Omega^*(x, y, z) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-11)$$

式中 φ^* , p^* , Ω^* 仅系坐标的函数, 分别称为速度位、压强和加速位的幅值。将 (1-1-11) 式代入 (1-1-9) 和 (1-1-10) 式得

$$\varphi^*(x, y, z) = \frac{1}{V_{\infty}} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^x \Omega^*(x', y, z) e^{i\omega(t - \frac{x - x'}{V_{\infty}})} dx'$$

或

$$\varphi^*(x, y, z) = -\frac{1}{\rho_\infty V_\infty} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^x p^*(x', y, z) e^{i\omega(t - \frac{x-x'}{V_\infty})} dx'$$

由于 $t = \frac{x}{V_\infty}$, 而 $t - \frac{x-x'}{V_\infty} = \frac{x'}{V_\infty}$, 故

$$\left. \begin{aligned} \varphi^*(x, y, z) &= \frac{1}{V_\infty} e^{-i\omega(\frac{x}{V_\infty})} \int_{-\infty}^x \Omega^*(x', y, z) e^{i\omega(\frac{x'}{V_\infty})} dx' \\ \varphi^*(x, y, z) &= -\frac{1}{\rho_\infty V_\infty} e^{-i\omega(\frac{x}{V_\infty})} \int_{-\infty}^x p^*(x', y, z) e^{i\omega(\frac{x'}{V_\infty})} dx' \end{aligned} \right\} \quad (1-1-12)$$

〔二〕 在谐振运动时, 联系下洗速度幅值和载荷系数幅值的积分方程

当坐标系固定在运动物体上时, 流场小扰动加速位 $\Omega(x, y, z, t)$ 所满足的方程为

$$(1-M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{2V_\infty}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial t} - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = 0 \quad (1-1-13)$$

对谐振运动,

$$\Omega(x, y, z, t) = \Omega^*(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (1-1-14)$$

代入 (1-1-13) 式得

$$(1-M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial z^2} - 2i \frac{\omega}{V_\infty} M_\infty^2 \frac{\partial \Omega^*}{\partial x} + M_\infty^2 \frac{\omega^2}{V_\infty^2} \Omega^* = 0 \quad (1-1-15)$$

如果再令

$$\Omega^* = \Omega_1^* e^{[i M_\infty^2 \omega x / V_\infty (1-M_\infty^2)]} \quad (1-1-16)$$

将 (1-1-16) 式代入 (1-1-15) 式得

$$(1-M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Omega_1^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_1^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_1^*}{\partial z^2} + \frac{M_\infty^2 \omega^2}{V_\infty^2 (1-M_\infty^2)} \Omega_1^* = 0 \quad (1-1-17)$$

对亚音速流, 将坐标作如下变换:

$$x' = x, \quad y' = \sqrt{1-M_\infty^2} y, \quad z' = \sqrt{1-M_\infty^2} z \quad (1-1-18)$$

则 (1-1-17) 式就变成

$$\frac{\partial^2 \Omega_1^*}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Omega_1^*}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Omega_1^*}{\partial z'^2} + C^2 \Omega_1^* = 0, \quad (1-1-19)$$

其中令

$$C^2 = \frac{M_\infty^2 \omega^2}{V_\infty^2 (1-M_\infty^2)^2}.$$

因此它的积分解式（海尔霍姆茨解式）为

$$4\pi\Omega_1^*(x', y', z') = \iint_S \left[\frac{e^{-iCR'}}{R'} \cdot \frac{\partial \Omega_1^*}{\partial n'} - \Omega_1^* \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{e^{-iCR'}}{R'} \right) \right] dS \quad (1-1-20)$$

其中 R' 为界面 S 上动点 (ξ', η', ξ') 到定点 (x', y', z') 的距离

$$R' = \sqrt{(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 + (z' - \xi')^2}$$

n' 为界面 S 的外法向。

对薄翼情况，界面 S 包括薄翼上、下表面，设 n' 系上表面外法向。设薄翼上表面的 Ω_1^* 值记作 Ω_{1u}^* ，下表面的 Ω_1^* 值记作 Ω_{1l}^* ，则 (1-1-20) 式可写成

$$4\pi\Omega_1^*(x', y', z') = \iint_{S_{yi}} \left[\frac{e^{-iCR'}}{R'} \cdot \frac{\partial}{\partial n'} (\Omega_{1u}^* - \Omega_{1l}^*) - (\Omega_{1u}^* - \Omega_{1l}^*) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{e^{-iCR'}}{R'} \right) \right] dS \quad (1-1-21)$$

式中 S_{yi} 为机翼平面面积。

由于 Ω_1^* 为 n' 的奇函数，亦即薄翼上下表面 Ω_1^* 是反对称的，因此 (1-1-21) 式中

$$\frac{\partial}{\partial n'} (\Omega_{1u}^* - \Omega_{1l}^*) = 0 \quad (1-1-22)$$

将 (1-1-22) 式代入 (1-1-21) 式得

$$-4\pi\Omega_1^*(x', y', z') = \iint_{S_{yi}} (\Omega_{1u}^* - \Omega_{1l}^*) \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{e^{-iCR'}}{R'} \right] d\xi' d\eta' \quad (1-1-23)$$

按 (1-1-18) 式将坐标系 (x', y', z') 变回到原来的 (x, y, z) 坐标系，就得

$$-4\pi\Omega_1^*(x, y, z) = \iint_{S_{yi}} (\Omega_{1u}^* - \Omega_{1l}^*) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{e^{-iCR}}{R} \right] d\xi d\eta \quad (1-1-24)$$

式中 $R^2 = (x - \xi)^2 + (1 - M_\infty^2) [(y - \eta)^2 + (z - \xi)^2]$

将 (1-1-24) 式通过 (1-1-16) 式换回到 Ω^* 得

$$\begin{aligned} -4\pi\Omega^*(x, y, z) &= \iint_{S_{yi}} e^{-iM_\infty^2 \omega \xi / V_\infty (1 - M_\infty^2)} \cdot (\Omega_u^* - \Omega_l^*) \cdot \\ &\quad \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{1}{R} \exp [iM_\infty^2 \omega x / V_\infty (1 - M_\infty^2) - iCR] \right\} d\xi d\eta \\ &= \iint_{S_{yi}} (\Omega_u^* - \Omega_l^*) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{R} \exp \left(\frac{iM_\infty^2 \omega (x - \xi)}{V_\infty (1 - M_\infty^2)} - iCR \right) \right] \cdot d\xi d\eta \end{aligned} \quad (1-1-25)$$

由于

$$\Omega_u^* - \Omega_l^* = (p_l^* - p_u^*) / \rho_\infty = \frac{\Delta p^*}{\rho_\infty}$$

故

$$\Omega^*(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{y_1}} \frac{\Delta p^*}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{1}{R} \exp \left[\frac{iM_\infty^2 \omega(x-\xi)}{V_\infty(1-M_\infty^2)} - iCR \right] \right\} d\xi d\eta \quad (1-1-26)$$

因此薄翼流场中任一点 (x, y, z) 的加速位幅值, 可看成是由在机翼平面 S_{y_1} 上, 分布强度为当地载荷幅值 $\Delta p^*(\xi, \eta, \xi)/\rho_\infty$ 的亚音速谐振加速位偶极子 (或称谐振压力偶极子) 所诱导而得到。

显然, 对超音速情况, 薄翼流场中任一点的加速位幅值, 可看成是由在薄翼平面上, 分布强度为当地载荷幅值 $\Delta p^*/\rho_\infty$ 的超音速谐振加速位偶极子所诱导而得到, 它可写为

$$\Omega^*(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\Delta p^*}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{1}{R} \exp[-i\mu'(x-\xi)] \cos KR \right\} d\xi d\eta \quad (1-1-27)$$

式中

$\mu' = \frac{\omega M_\infty}{a_\infty(M_\infty^2 - 1)}$, $K = \frac{\omega}{a_\infty(M_\infty^2 - 1)}$, 其中 Σ 是点 (x, y, z) 的前马赫锥与 S_{y_1} 相交部分的机翼面积。如果薄翼位于 $z=0$ 平面, 则从(1-1-26)式可见, 位于薄翼上点 $(\xi, \eta, 0)$ 、偶极轴与 z 向平行、强度为单位载荷的亚音速谐振加速位偶极子在点 (x, y, z) 所引起的加速位幅值为

$$4\pi\Omega_0^*(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{R} \exp[iM_\infty^2 \omega(x-\xi)/V_\infty(1-M_\infty^2) - iCR] \right\} \quad (1-1-28)$$

将(1-1-28)式代入(1-1-12)式(注意(1-1-28)式右端为 $(x-\xi)$ 等的函数)得相应的速度位幅值为

$$4\pi\varphi_0^*(x, y, z) = \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial}{\partial z} e^{-i\omega \frac{x-\xi}{V_\infty}} \int_{-\infty}^{x-\xi} \left\{ \frac{1}{R} \exp \left[i\omega \left(\frac{\lambda}{V_\infty} + \frac{M_\infty \lambda}{a_\infty(1-M_\infty^2)} - \frac{R}{a_\infty(1-M_\infty^2)} \right) \right] \right\} d\lambda \quad (1-1-29)$$

式中

$$R = \sqrt{\lambda^2 + (1-M_\infty^2)[(y-\eta)^2 + z^2]}$$

将(1-1-29)式对 z 微分可得位于 $z=0$ 平面薄翼上点 $(\xi, \eta, 0)$ 处、偶极轴与 z 向平行、强度为单位载荷的亚音速谐振加速位偶极子在点 (x, y, z) 所产生的 z 向速度分量的幅值 $W_0^*(x, y, z)$ 为

$$\begin{aligned} 4\pi W_0^*(x, y, z) &= 4\pi \frac{\partial}{\partial z} \varphi_0^*(x, y, z) \\ &= \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial^2}{\partial^2 z} e^{-i\omega \frac{x-\xi}{V_\infty}} \int_{-\infty}^{x-\xi} \left\{ \frac{1}{R} \exp \left[i\omega \left(\frac{\lambda}{V_\infty} + \frac{M_\infty \lambda}{a_\infty(1-M_\infty^2)} - \frac{R}{a_\infty(1-M_\infty^2)} \right) \right] \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (1-1-30)$$

因此, 强度为当地载荷幅值 $\frac{\Delta p^*}{\rho_\infty}(\xi, \eta, 0)$ 的亚音速谐振加速位偶极子 (沿 $z=0$ 平面上薄翼区域分布), 在翼面上某点 $(x, y, 0)$ 所产生的总 z 向速度幅值为

$$W^*(x, y, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\rho_\infty V_\infty} \iint_{S_{y_1}} \Delta p^*(\xi, \eta) e^{-\frac{i\omega(x-\xi)}{V_\infty}} d\xi d\eta.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-\infty}^{x-\xi} \left\{ \frac{1}{R} \exp \left[i\omega \left(\frac{\lambda}{V_\infty} + \frac{M_\infty \lambda}{a_\infty(1-M_\infty^2)} - \frac{R}{a_\infty(1-M_\infty^2)} \right) \right] \right\} d\lambda$$

$$\text{令 } x_0 = x - \xi, \quad y_0 = y - \eta, \quad r = \sqrt{(1-M_\infty^2)[(y-\eta)^2 + z^2]}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{V_\infty(1-M_\infty^2)}$$

上式变成

$$W^*(x, y, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\rho_\infty V_\infty} \iint_{S_{y_1}} \Delta p^*(\xi, \eta) e^{-\frac{i\omega x_0}{V_\infty}} d\xi d\eta.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-\infty}^{x_0} \frac{e^{-i\bar{\omega}(\lambda - M_\infty \sqrt{\lambda^2 + r^2})}}{\sqrt{\lambda^2 + r^2}} d\lambda$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho_\infty V_\infty} \iint_{S_{y_1}} \Delta p^*(\xi, \eta) K(x_0, y_0) d\xi d\eta \quad (1-1-31)$$

式中

$$K(x_0, y_0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-\frac{i\omega x_0}{V_\infty}} \int_{-\infty}^{x_0} \frac{e^{i\bar{\omega}(\lambda - M_\infty \sqrt{\lambda^2 + r^2})}}{\sqrt{\lambda^2 + (1-M_\infty^2)(y_0^2 + z^2)}} d\lambda \quad (1-1-32)$$

方程 (1-1-31) 是关于亚音速未知载荷幅值 $\Delta p^*(\xi, \eta)$ 的第一类积分方程, $K(x_0, y_0)$ 是积分方程的核, 称其为亚音速平面核函数, 它表示位于点 $(\xi, \eta, 0)$ 处强度为单位载荷的一亚音速谐振加速位偶极子在点 $(x, y, 0)$ 处所产生的 z 向速度幅值。由于点 $(\xi, \eta, 0)$ 和 $(x, y, 0)$ 都是在同一平面上, 故称该函数为平面核函数。

同理, 从 (1-1-27) 式可求得强度为当地载荷幅值 $\frac{\Delta p^*(\xi, \eta)}{\rho_\infty}$ 的超音速谐振加速位偶极子 (沿 $z=0$ 平面薄翼区域分布) 在翼面上某点 $(x, y, 0)$ 所产生的总 z 向速度幅值为

$$W^*(x, y, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\rho_\infty V_\infty} \iint_{\Sigma} \Delta p^*(\xi, \eta) e^{-i\omega x_0/V_\infty} d\xi d\eta.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{R} e^{-i\mu\lambda} \cos KR d\lambda \right] \quad (1-1-33)$$

式中 $\mu = \frac{\omega}{V_\infty(M_\infty^2 - 1)}$ 。由于当 $\lambda < Br$ 时, 加速位偶极子位于点 $(x, y, 0)$ 前马赫锥之外,

对点 $(x, y, 0)$ 不产生影响, 因此上式对 λ 的积分下限可换成为 Br , 这样

$$W^*(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi\rho_\infty V_\infty} \iint_{\Sigma} \Delta p^*(\xi, \eta) K(x_0, y_0) d\xi d\eta \quad (1-1-34)$$

式中核函数 $K(x_0, y_0)$ 为

$$K(x_0, y_0) = 2 \lim_{z \rightarrow 0} e^{-i\omega x_0/V_\infty} \int_{Br}^{x_0} e^{-i\mu\lambda} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{\cos KR}{R} \right] d\lambda \quad (1-1-35)$$

本章所研究的核函数配置法 (简称核函数法) 就是以积分方程 (1-1-31) (对亚音速)、(1-1-34) (对超音速) 为出发方程, 研究在已知核函数情况下, 根据翼面上选定控制点 (即所谓配置点) 处的绕流边界条件, 数值求解该积分方程未知载荷幅值 Δp^* 分布的方法。

§ 1-2 核函数处理

为了便于数值积分, 必须对积分方程 (1-1-31) 和 (1-1-34) 中的核函数进行适当处理。兹按亚音速和超音速两种情况分别叙述于下。

[一] 亚音速平面核函数

方程 (1-1-32) 已给出亚音速平面核函数 $K(x_0, y_0)$, 其积分可写成两个积分之和, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_0} \frac{e^{i\bar{\omega}(\lambda - M_\infty \sqrt{\lambda^2 + r^2})}}{\sqrt{\lambda^2 + r^2}} d\lambda &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\bar{\omega}(\lambda - M_\infty \sqrt{\lambda^2 + r^2})}}{\sqrt{\lambda^2 + r^2}} d\lambda \\ &+ \int_0^{x_0} \frac{e^{i\bar{\omega}(\lambda - M_\infty \sqrt{\lambda^2 + r^2})}}{\sqrt{\lambda^2 + r^2}} d\lambda = F_1 + F_2 \end{aligned} \quad (1-2-1)$$

式中 F_1 可改写成

$$F_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-i\bar{\omega}(\lambda + M_\infty \sqrt{\lambda^2 + r^2})}}{\sqrt{\lambda^2 + r^2}} d\lambda \quad (1-2-2)$$

$$F_2 = \int_0^{x_0} \frac{e^{i\bar{\omega}(\lambda - M_\infty \sqrt{\lambda^2 + r^2})}}{\sqrt{\lambda^2 + r^2}} d\lambda \quad (1-2-3)$$

将 (1-2-1) 式代入 (1-1-32) 式

$$K(x_0, y_0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-\frac{i\omega x_0}{V_\infty}} (F_1 + F_2) \quad (1-2-4)$$

一、 F_1 的估算

由于

$$\frac{e^{-i\bar{\omega} M_\infty \sqrt{\lambda^2 + r^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + r^2}} = \int_0^\infty J_0(T\lambda) \frac{e^{-\sqrt{T^2 - M_\infty^2 \omega^2}}}{\sqrt{T^2 - M_\infty^2 \omega^2}} T dT \quad (1-2-5)$$

式中 $J_0(T\lambda)$ 为第一类零阶贝塞尔函数, 其定义为

$$J_0(T\lambda) = 1 - \frac{(T\lambda)^2}{2^2} + \frac{(T\lambda)^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{(T\lambda)^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (1-2-6)$$

由于

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_0(T\lambda) \frac{e^{-r\sqrt{T^2 - M_\infty^2 \bar{\omega}^2}}}{\sqrt{T^2 - M_\infty^2 \bar{\omega}^2}} T dT &= \int_{M_\infty \bar{\omega}}^\infty J_0(T\lambda) \frac{e^{-r\sqrt{T^2 - M_\infty^2 \bar{\omega}^2}}}{\sqrt{T^2 - M_\infty^2 \bar{\omega}^2}} T dT \\ &- i \int_0^{M_\infty \bar{\omega}} J_0(T\lambda) \frac{e^{-i\sqrt{M_\infty^2 \bar{\omega}^2 - T^2}}}{\sqrt{M_\infty^2 \bar{\omega}^2 - T^2}} T dT \end{aligned} \quad (1-2-7)$$

将 (1-2-7) 式代入 (1-2-5) 式, 并令 (1-2-7) 式右边第一个积分中的 $\sqrt{T^2 - M_\infty^2 \bar{\omega}^2} = \tau$, 对第二个积分令 $\sqrt{M_\infty^2 \bar{\omega}^2 - T^2} = \tau$, 则得

$$\begin{aligned} \frac{e^{-i\bar{\omega} M_\infty \sqrt{\lambda^2 + r^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + r^2}} &= \int_0^\infty e^{-r\tau} J_0(\lambda \sqrt{\tau^2 + M_\infty^2 \bar{\omega}^2}) d\tau \\ &- i \int_0^{M_\infty \bar{\omega}} e^{-i\tau} J_0(\lambda \sqrt{M_\infty^2 \bar{\omega}^2 - \tau^2}) d\tau \end{aligned} \quad (1-2-8)$$

将 (1-2-8) 式代入 (1-2-2) 式得

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^\infty e^{-i\bar{\omega}\lambda} d\lambda \left[\int_0^\infty e^{-r\tau} J_0(\lambda \sqrt{\tau^2 + M_\infty^2 \bar{\omega}^2}) d\tau \right. \\ &\quad \left. - i \int_0^{M_\infty \bar{\omega}} e^{-i\tau} J_0(\lambda \sqrt{M_\infty^2 \bar{\omega}^2 - \tau^2}) d\tau \right] \end{aligned} \quad (1-2-9)$$

(1-2-9) 式的右边是两个对 λ 和对 τ 的二重积分, 由于这两个积分的被积函数在积分域内不存在本性奇点, 因此可以交换积分顺序而得

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^\infty e^{-r\tau} d\tau \left[\int_0^\infty e^{-i\bar{\omega}\lambda} J_0(\lambda \sqrt{\tau^2 + M_\infty^2 \bar{\omega}^2}) d\lambda \right] \\ &- i \int_0^{M_\infty \bar{\omega}} e^{-i\tau} d\tau \left[\int_0^\infty e^{-i\bar{\omega}\lambda} J_0(\lambda \sqrt{M_\infty^2 \bar{\omega}^2 - \tau^2}) d\lambda \right] \end{aligned} \quad (1-2-10)$$

由于积分

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-i\bar{\omega}\lambda} J_0(\lambda \sqrt{\tau^2 + M_\infty^2 \bar{\omega}^2}) d\lambda &= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \beta^2 \bar{\omega}^2}} \\ \int_0^\infty e^{-i\bar{\omega}\lambda} J_0(\lambda \sqrt{M_\infty^2 \bar{\omega}^2 - \tau^2}) d\lambda &= \frac{-i}{\sqrt{\tau^2 + \beta^2 \bar{\omega}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-11)$$

式中

$$\beta^2 = 1 - M_\infty^2$$

将 (1-2-11) 式代入 (1-2-10) 式

$$F_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{\tau^2 - \beta^2 \bar{\omega}^2}} d\tau - \int_0^{M_\infty \bar{\omega}} \frac{e^{-i r \tau}}{\sqrt{\tau^2 + \beta^2 \bar{\omega}^2}} d\tau \quad (1-2-12)$$

(1-2-12) 式右边的第一个积分可写成:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{\tau^2 - \beta^2 \bar{\omega}^2}} d\tau = \int_{\beta \bar{\omega}}^\infty \frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{\tau^2 - \beta^2 \bar{\omega}^2}} d\tau - i \int_0^{\beta \bar{\omega}} \frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{\beta^2 \bar{\omega}^2 - \tau^2}} d\tau \quad (1-2-13)$$

对上式右边第一个积分, 令 $\tau = \beta \bar{\omega} \cosh \theta$, 因此

$$\int_{\beta \bar{\omega}}^\infty \frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{\tau^2 - \beta^2 \bar{\omega}^2}} d\tau = \int_0^\infty e^{-\beta \bar{\omega} r \cosh \theta} d\theta = K_0(\beta \bar{\omega} r) \quad (1-2-14)$$

式中 $K_0(\beta \bar{\omega} r)$ 是以 $\beta \bar{\omega} r$ 为变量的第二类零阶改良贝塞尔函数

$$\begin{aligned} K_0(\beta \bar{\omega} r) = & -\left\{ \ln \frac{1}{2}(\beta \bar{\omega} r) + \gamma \right\} I_0(\beta \bar{\omega} r) + \frac{\frac{1}{4}(\beta \bar{\omega} r)^2}{(1!)^2} \\ & + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}(\beta \bar{\omega} r)^2\right)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}(\beta \bar{\omega} r)^2\right)^3}{(3!)^2} + \dots \end{aligned} \quad (1-2-15)$$

式中 $\gamma = 0.5772157$, 称为欧拉常数。 $I_0(\beta \bar{\omega} r)$ 见后面 (1-2-17) 式。 K_0 在 $\beta \bar{\omega} r = 0$ 时具有奇性。

对 (1-2-13) 式右边的第二积分, 令 $\tau = \beta \bar{\omega} \cos \theta$, 因此

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta \bar{\omega}} \frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{\beta^2 \bar{\omega}^2 - \tau^2}} d\tau &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\beta \bar{\omega} r \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta \bar{\omega} r \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} [I_0(\beta \bar{\omega} r) - L_0(\beta \bar{\omega} r)] \end{aligned} \quad (1-2-16)$$

式中 $I_0(\beta \bar{\omega} r)$ 为以 $\beta \bar{\omega} r$ 为变量的第一类零阶改良贝塞尔函数, $L_0(\beta \bar{\omega} r)$ 为以 $\beta \bar{\omega} r$ 为变量的零阶改良斯图夫函数

$$\begin{aligned} I_0(\beta \bar{\omega} r) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} \beta \bar{\omega} r\right)^{2m}}{m! \Gamma(m+1)} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{4}(\beta \bar{\omega} r)^2}{(1!)^2} + \frac{\left[\frac{1}{4}(\beta \bar{\omega} r)^2\right]^2}{(2!)^2} + \frac{\left[\frac{1}{4}(\beta \bar{\omega} r)^2\right]^3}{(3!)^2} \end{aligned} \quad (1-2-17)$$

$$L_0(\beta \bar{\omega} r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} \beta \bar{\omega} r\right)^{2m+1}}{\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)} \quad (1-2-18)$$

将 (1-2-14) 和 (1-2-16) 式代入 (1-2-13) 式得