

高等学校辅导教材

线性代数辅导

同济·第四版

清华大学 李永乐 编著
清华大学 周耀耀



国家行政学院出版社

高等学校辅导教材

线性代数辅导

(同济·第四版)

编著 清华大学 李永乐
清华大学 周耀耀

国家行政学院出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数辅导/李永乐, 周耀耀编著. - 北京: 国家行政学院出版社, 2004
ISBN 7-80140-320-7

I. 线… II. ①李… ②周… III. 线性代数-高等学校-自学参考资料
IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 004472 号

线性代数辅导

李永乐 周耀耀 编著

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区长春桥路 6 号

邮政编码: 100089

发行部电话: 68920615, 68929949

新华书店经销

北京市朝阳区印刷厂印刷

*

787 × 960 1/16 开本 17.5 印张 330 千字

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-80140-320-7/O · 27 定价: 16.00 元

前 言

线性代数是一门重要的基础课，它研究的是有限维空间的线性理论，它所涉及到的处理问题的思想、方法和技巧被广泛地应用到科技的各个领域，尤其是随着计算机的发展，这种离散化解决问题的手法尤显重要。

线性代数这门课程的特点是：概念多，符号多，运算法则多（有些法则与大家习惯的数的运算法则有较大的反差），容易引起混淆；内容上纵横交错，前后联系紧密，环环相扣，相互渗透，切入点接口多；对于抽象性和逻辑性有较高的要求。因此，初学者驾驭把握起来有一定困难，不少同学虽用心学习，但收效甚微。为此，我们编写此书希望给同学一些帮助。

本书每章设有**基本内容**，**主要知识网络图**，**重要的定理与公式**，希望能帮助同学把握住该章的核心，通过选编的**典型例题**（约 300 道），或是澄清基本概念与基本运算，或是指出初学者常犯之错误，或是介绍线性代数中常用思路与技巧，并且许多题目给出一题多解，通过这些希望能开阔思路，活跃思维，举一反三，触类旁通。同学做各章设置的**练习题**可达到巩固、理解、提高的目的。在做练习题时，一定要独立思考，动手做题，实在有困难再看提示和参考答案。

编写本书时，我们主要参考了下列大学的线性代数教材：**清华大学、同济大学、西安交通大学、浙江大学、四川大学**以及高教出版社出版的面向 21 世纪课程教材，还有 N. B. 普罗斯库列柯夫著、周晓钟

译的“线性代数习题集”和全国工学、经济学硕士生入学考试试题。

注：本书中带“*”号的试题要求较高，本科生可不必去做。

本书不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编 者

2004年6月于清华园

目 录

第一章 行列式	(1)
§ 1.1 基本内容	(1)
§ 1.2 典型例题分析	(4)
§ 1.3 练习题	(29)
§ 1.4 答案与提示	(30)
第二章 矩阵	(32)
§ 2.1 基本内容	(32)
§ 2.2 典型例题分析	(34)
§ 2.3 练习题	(70)
§ 2.4 答案与提示	(74)
第三章 线性方程组	(80)
§ 3.1 基本内容	(80)
§ 3.2 典型例题分析	(82)
§ 3.3 练习题	(115)
§ 3.4 答案与提示	(119)
第四章 向量空间	(122)
§ 4.1 基本内容	(122)
§ 4.2 典型例题分析	(123)
§ 4.3 练习题	(144)
§ 4.4 答案与提示	(146)
第五章 特征值与特征向量	(148)
§ 5.1 基本内容	(148)
§ 5.2 典型例题分析	(150)
§ 5.3 练习题	(190)
§ 5.4 答案与提示	(192)

第六章 二次型	(198)
§ 6.1 基本内容	(198)
§ 6.2 典型例题分析	(200)
§ 6.3 练习题	(228)
§ 6.4 答案与提示	(230)
第七章 线性空间与线性变换	(233)
§ 7.1 基本内容	(233)
§ 7.2 典型例题分析	(236)
§ 7.3 练习题	(254)
§ 7.4 答案与提示	(257)
附录 2004 年全国攻读硕士学位研究生入学考试	
线性代数试题 (数学一—数学四)	(262)

第一章 行列式

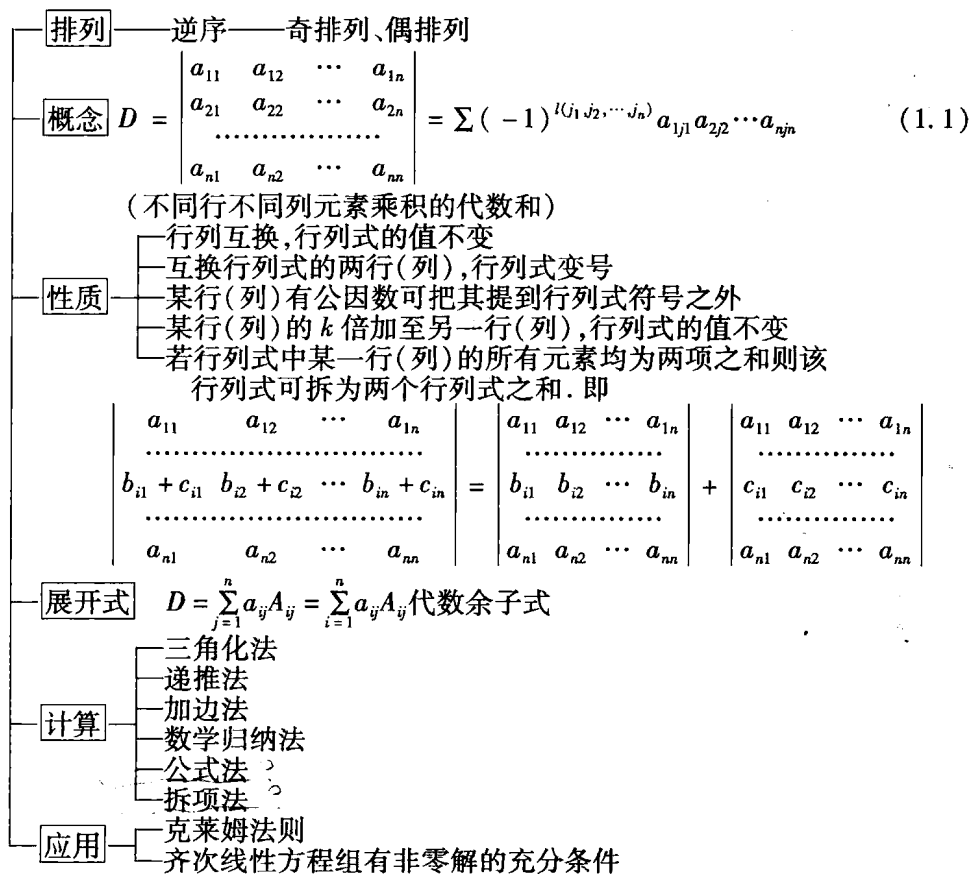
§ 1.1 基本内容

行列式是一个重要的数学工具,在线性代数中有较多的应用.

应当在理解 n 阶行列式的概念,掌握行列式性质的基础上,熟练地计算 3 阶、4 阶行列式,也要会计算简单的 n 阶行列式.

计算行列式的基本方法是用按行(列)展开公式,通过降阶来实现,但在展开之前往往先运用行列式的性质,对行列式作恒等变形,以期有较多的零或公因式,这样可简化计算. 计算时的常用技巧有:三角化法、公式法、递推法、数学归纳法等.

一、主要知识网络图



【评注】 ① 由于 n 级排列共有 $n!$ 个, 其中奇排列与偶排列的个数相同, 因此 n 阶行列式含有 $n!$ 项, 其中带正号与带负号的各占二分之一.

② 虽然可用定义来计算行列式的值,但多数情况下是烦乱的,计算行列式主要用行列式的按行(列)展开公式,通过降阶来实现,但在用展开式之前往往先利用行列式的性质对其作恒等变形,以期减少计算工作量.

二、主要定理

【定理 1.1】 (行列式按行(列)展开公式) n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad (1.2)$$

或 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$

【定理 1.2】 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余乘积之和等于零, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j), \quad (1.3)$$

或 $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 \quad (j \neq k).$

【定理 1.3】 (克莱姆法则) 如果线性方程组

[illegible]

的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}. \quad (1.4)$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组的常数项替代后所得到的 n 阶行列式.

【定理 1.4】 如果齐次线性方程组

[illegible]

有非零解,则它的系数行列式必为零.

三、重要公式

1. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{2n} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \quad (1.5)$$

2. 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \quad (1.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \quad (1.7) \end{aligned}$$

3. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j). \quad (1.8)$$

§ 1.2 典型例题分析

一、 n 阶行列式的概念

【例 1.1】 求下列排列的逆序数：

(1) 21736854；

(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

【分析】 求一个排列的逆序数可以有两种思路：

思路一：按此排列的次序分别算出每个数的后面比它小的数的个数，然后求和。

思路二：按自然数的顺序分别算出排在 1, 2, 3, $\cdots$ 前面的比它大的数的个数，再求和。

【解法一】（用思路一）

2 的后面有 1 小于 2，故 2 的逆序数为 1。

1 的后面没有小于 1 的数，1 的逆序数为 0。

7 的后面有 3, 6, 5, 4 小于 7，故 7 的逆序数为 4。依此方法逐个计算。可知此排列的逆序数 $\tau(21736854) = 1 + 0 + 4 + 0 + 2 + 2 + 1 + 0 = 10$ 。

【解法二】（用思路二）

1 的前面比 1 大的数有 1 个 2，故 1 的逆序数是 1。

2 排在首位没有逆序。

3 的前面有一个 7 比 3 大，逆序数为 1。

依此计算，得 $\tau(21736854) = 1 + 0 + 1 + 4 + 3 + 1 + 0 + 0 = 10$ 。

(2) 此排列的前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$ 之间没有逆序，后 n 个数 $246\cdots(2n)$ 之间也没有逆序，只是前 n 个数与后 n 个数之间才有逆序，用思路一易见。

$$\begin{aligned}\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)) \\ &= 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + 0 + 0 + \cdots + 0 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1).\end{aligned}$$

【例 1.2】 已知 $a_{3j} a_{12} a_{41} a_{2k}$ 在 4 阶行列式中带负号，求 j 与 k 。

【分析】 本题有两种方法，一是先将该项的行指标按自然顺序排好，然后再用列指标应当是奇排列（因为该项带负号）来确定 j 与 k 。另一方法是直接计算行的逆序数与列的逆序数，使其和为奇数来定 j 与 k 。

【解法一】 由于 $a_{3j} a_{12} a_{41} a_{2k} = a_{12} a_{2k} a_{3j} a_{41}$ ，而 2, k , j , 1 是 1 至 4 的排列，故

j 与 k 只能取自 3 和 4.

若 $j = 3, k = 4$, 则

$$\tau(2431) = 1 + 2 + 1 = 4$$

是偶排列, 与该项带负号不符, 故 $j = 4, k = 3$.

【解法二】 同前, 若 $j = 3, k = 4$, 则该项为 $a_{33}a_{12}a_{41}a_{24}$, 此时, 行指标与列指标的逆序数之和

$$\tau(3142) + \tau(3214) = 3 + 3 = 6$$

是偶数, 与该项带负号不符, 可见 $j = 4, k = 3$.

【注】 若 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} = a_{1 k_1} a_{2 k_2} \cdots a_{n k_n}$, 则

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}.$$

但 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 与 $\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)$ 不一定相等, 它们只是奇偶性相同, 这一点不要混淆.

【例 1.3】 写出 4 阶行列式中含 $a_{11}a_{23}$ 的项.

【分析】 行列式是不同行不同列元素乘积的代数和, 含 $a_{11}a_{23}$ 的项应当有形式 $a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$, 由此分析 j_3, j_4 的取值及该项所带的正负号.

【解】 因为含 $a_{11}a_{23}$ 的项可写为 $a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$, 其中 $13j_3j_4$ 是 1 至 4 的排列. 所以 j_3, j_4 取自 2 和 4. 可见共有两项含 $a_{11}a_{23}$.

若 $j_3 = 2, j_4 = 4$, 则

$$\tau(1324) = 1$$

是奇排列, 故该项带负号为: $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

若 $j_3 = 4, j_4 = 2$, 利用对换改变排列的奇偶性, 知 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 带正号. 即 4 阶行列式中, 含 $a_{11}a_{23}$ 的项是: $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}, a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

【例 1.4】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ x & 2 & x & 1 \\ x & 1 & 0 & x \end{vmatrix} \quad \text{展开式中 } x^4 \text{ 与 } x^3 \text{ 的系数.}$$

【分析】 按行列式定义, 行列式中每一项都是不同行不同列元素的乘积. 那么, 要构成 x^4 必须各行各列都要含 x , 因此只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$, 而对于 x^3 , 可判断该项必不含 a_{11} , 若含 a_{12} , 则可由 $a_{33}a_{41}a_{24}, a_{33}a_{44}a_{21}$ 分别构成, 若不含 a_{12} , 则可由 $a_{22}a_{33}a_{41}a_{14}$ 构成, 可见含 x^3 的共有三项.

【解】 按行列式定义, 有且只有 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ 四元素相乘才出现 x^4 , 故 x^4 的系数是 2.

对于 x^3 , 则有 $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}, a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}, a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 三项, 此时各项的系数分别

是 $a_{24} = -1, a_{21} = 1, a_{14} = 2$ 即 $-x^3, x^3, 2x^3$ 又各项逆序数分别是 $\tau(2431) = 4, \tau(2134) = 1, \tau(4231) = 5$, 故所带符号为正、负、负. 因此 x^3 的系数是 -4 .

【例 1.5】 证明

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}. \quad (1.9)$$

【证明】 由于行列式的一般项为 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 所带符号是 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$. 因为第一行除了 a_{1n} 外其它数均为 0, 因此欲要得到非 0 项, 第一行必取 a_{1n} , 即 $j_1 = n$, 这样第二行不能选 a_{2n} (因为每列只能选一个数), 故只能选 a_{2n-1} . 类似地, 第三行只能取 $a_{3n-2}, \cdots$. 因此这个行列式只有唯一的一项

$$a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

有可能不为 0, 而这一项列指标的逆序数为

$$\begin{aligned} \tau(n, n-1, \cdots, 1) &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 0 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1). \end{aligned}$$

因此, 右下三角行列式的值为 $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$.

【评注】 上(下)三角行列式的值是主对角线元素的乘积(参见 1.5), 而右下(左上)三角行列式的值是副对角线元素的乘积并且带有正负号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (参见 1.9), 这两个公式要分清.

【例 1.6】 已知 n 阶行列式 D 中有 $n^2 - n + 1$ 个 0, 证明 $D = 0$.

【证明】 因为 n 阶行列式 D 中共有 n^2 个元素, 现在其中有 $n^2 - n + 1$ 个 0, 故非 0 元素共有 $n - 1$ 个. 按行列式定义

$$D = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

因此, $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{nj_n}$ 这 n 个元素中至少有一个是 0, 故行列式 $D = 0$.

【例 1.7】 证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

【证明】 由题设知, 当 $k \geq 3$ 时, $a_{3k} = a_{4k} = a_{5k} = 0$, 而行列式 D 中的一般项是

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}.$$

由于 j_3, j_4, j_5 互不相同且取自于 1 至 5, 故其中至少有一个要大于或等于 3, 那么 $a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$ 中至少有一个为 0, 所以 D 的展开式中每一项都是 0, 故行列式 $D = 0$.

【例 1.8】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & f \end{vmatrix} \quad \text{之值.}$$

【分析】 按行列式定义, D 的一般项是 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$, 由于行列式中有较多的 0, 该项若不为 0, 则必有

$$j_1 = 3, \quad j_2 = 1.$$

而 j_3 可取 2 或 4, j_4 可取 3 或 4. 但因 j_1, j_2, j_3, j_4 是 1 至 4 的排列, 互不相同, 则必有

$$j_4 = 4, \quad j_3 = 2.$$

所以在 D 的 $4!$ 项中, 仅有一个非 0 项.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } D &= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \\ &= (-1)^{\tau(3124)} abcf = abcf. \end{aligned}$$

【例 1.9】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2000 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2001 \end{vmatrix} \quad \text{之值.}$$

【分析】 行列式 D 中有大量的 0, 对于 D 的一般项

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

若该项不为 0, 必有

$$j_1 = 2000, \quad j_2 = 1999, \quad \cdots, \quad j_{2000} = 1, \quad j_{2001} = 2001.$$

逆序数 $\tau(2000, 1999, \cdots, 2, 1, 2001) = \frac{1}{2} 2000 \cdot 1999$ 为偶数.

故 $D = 2001!$

【评注】 对行列式要认识到它是不同行不同列元素乘积的代数和, 要处理好每项所带的正负号, 它是由排列的奇偶性所决定的. 这里的行列式有较多的 0, 因而可以用定义法来分析论证, 以加深对概念的理解, 但即使有如此多的 0, 我们仍应当用行列式的性质, 展开公式来计算, 以减少工作量. 对于一般的行列式若用定义法来计算几乎是不现实的.

二、 n 阶行列式的计算

【例 1.10】 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{之值.}$$

【分析】 本题的行列式没有太多的规律,因而用展开公式来计算,但要先利用行列式的性质将其恒等变形,让其某行(或列)有较多的零.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } D & \xrightarrow[c_4 - 5c_1]{c_2 + 2c_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & 7 & 5 & -20 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -2 & -7 \end{vmatrix} \\ & = (-1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 7 & 5 & -20 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{r_2 - 5r_1} - \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -8 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix} \\ & = -(-8)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = 120. \end{aligned}$$

【评注】 r_i 表示行列式的第 i 行, c_j 表示行列式的第 j 列,对换 i 行与 j 行记成 $r_i \leftrightarrow r_j$,第 i 行乘以 k 记成 kr_i , i 行的 k 倍加至 j 行记成 $r_j + kr_i$,类似有列变换的记号.用行列式展开式时,不要丢掉正负号.这是初学时常犯的错误.

【例 1.11】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{之值.}$$

【分析】 为简化计算可利用行列式的性质去掉行列式里的分母,转化为整数的运算.

【解】 (三角化法)

$$\begin{aligned}
 D &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\sum r_i} \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{5}{16} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}} \frac{5}{16} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{5}{16}. \quad (\text{由(1.5)})
 \end{aligned}$$

【评注】 如果行列式各列元素和相等都是 a , 一个常用的办法是将各行均加至第一行, 则第一行有公因数 a 可提到行列式记号之外.

对行列式作恒等变形, 化其为上三角或下三角行列式利用公式(1.5) 是常用技巧.

【例 1.12】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix} \quad \text{之值.}$$

【解】 (三角化法)

$$\begin{aligned}
 D &\xrightarrow{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (\text{由(1.5)})
 \end{aligned}$$

【评注】 逐行(列)相加减的技巧应当知道.

【例 1.13】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad \text{之值, 其中 } a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

【分析】 这是“爪”型行列式, 这一类行列式通常是用提取公因式法化其为三角形.

【解】 第 i 行提出 $a_{i-1} (i = 2, 3, \cdots, n+1)$, 得

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2 - r_3 - \cdots - r_n} \prod_{i=1}^n a_i \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^n a_i \left(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right). \quad (\text{由(1.5)})$$

【例 1.14】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{之值.}$$

【分析】 由于第一行与第二行之和有公因数 $a+b+c$, 这样就可转化为范德蒙行列式.

【解】 (公式法)