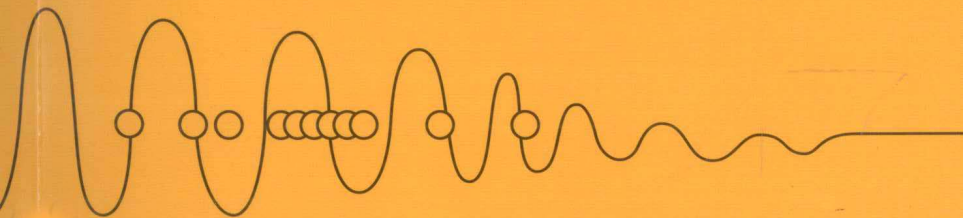


付宝连◎著

弹性力学混合变量的 变分原理及其应用

Variational Principles
with Mixed Variables
in Elasticity
and Their Applications



国防工业出版社

National Defense Industry Press

弹性力学混合变量的 变分原理及其应用

Variational Principles with Mixed Variables
in Elasticity and Their Applications

付宝连 著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学混合变量的变分原理及其应用/付宝连著.
—北京:国防工业出版社,2010.7
ISBN 978-7-118-06836-8

I. ①弹... II. ①付... III. ①弹性力学-变量-研究
IV. ①O343

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第106421号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 15 $\frac{3}{4}$ 字数 398 千字

2010年7月第1版第1次印刷 印数 1—2500册 定价 40.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

本书是作者长期教学经验及科研成果的积累与总结。

全书共分 11 章。

第 1 章介绍变分法的基本知识。

第 2 章和第 4 章分别论述了小挠度直梁和小挠度矩形板混合变量的最小势能原理、最小余能原理；混合变量的最小势作用量原理及最小余作用量原理；混合变量的虚功原理、虚余功原理以及混合变量的广义变分原理。

第 5 章~第 8 章是本书混合变量变分原理应用的重点。具体地应用混合变量的最小势能原理、余能原理以及混合变量最小势作用量原理于求解一系列边界条件矩形板(包括复杂边界条件的悬臂矩形板)的平衡、稳定和振动问题,并给出了相应的数据和图表,以供使用参考。

第 3 章和第 9 章分别建立了大挠度梁和大挠度弯曲薄板混合变量的相应原理。

第 10 章和第 11 章分别阐述了三维问题直角坐标系小位移理论及有限位移理论的混合变量的相应变分原理。

小位移理论的功的互等定理以及由作者本人所建立的有限位移理论的功的互等定理是构建上述混合变量变分原理的桥梁,因此,在相应章节中都首先予以介绍。

本书在付梓之际,特别要感谢著名科学家钱伟长先生长期

地关心、指导和帮助。本书的出版得到了燕山大学学术著作出版基金的资助及校领导和科技处领导的关心和帮助;得到了中国工程院院士杜善义和钟群鹏的支持,傅惠民教授和陈万吉教授的帮助;同时还得到了诸多同仁和好友的关怀和鼓励,在此一并表示感谢!

本书是关于弹性力学混合变量变分原理的专著,书中包括大量的理论推导及数值计算,疏漏及不妥之处在所难免,敬请读者和专家学者不吝指正。

作者

于燕山大学(秦皇岛)

目 录

绪论	1
第 1 章 变分法的一些基本知识	8
1.1 泛函及泛函的变分运算	8
1.2 变分法的基本预备定理及欧拉方程	12
1.2.1 变分法基本预备定理	12
1.2.2 欧拉方程和自然边界条件	13
1.3 拉格朗日乘子法	15
1.3.1 求函数条件极值的拉格朗日乘子法	16
1.3.2 求泛函条件极值的拉格朗日乘子法	18
第 2 章 弯曲直梁混合变量的变分原理	20
2.1 直梁的基本公式	20
2.2 直梁变形的应变能及余能	22
2.3 直梁的功的互等原理	24
2.3.1 直梁修正的功的互等定理	24
2.3.2 直梁修正的功的互等定理具体证例	28
2.3.3 直梁贝蒂功的互等定理	29
2.4 直梁混合变量的最小势能原理	30
2.4.1 直梁的最小势能原理	30
2.4.2 直梁混合变量的最小势能原理的推导	32
2.5 直梁的广义势能原理	37
2.6 直梁混合变量的最小余能原理	39
2.6.1 直梁的最小余能原理	39
2.6.2 直梁混合变量的第一(最小)余能	

原理	41
2.6.3 直梁混合变量的第二余能原理	45
2.7 直梁的广义余能原理	47
2.8 直梁混合变量的最小势作用量原理及 最小余作用量原理	48
2.8.1 直梁的最小势作用量原理	48
2.8.2 直梁混合变量的最小势作用量原理	50
2.8.3 直梁的最小余作用量原理	53
2.8.4 直梁混合变量的最小余作用量原理	55
2.9 直梁混合变量的虚功原理和虚余功原理	58
2.9.1 直梁的虚功原理	58
2.9.2 直梁混合变量的虚功原理	58
2.9.3 直梁的虚余功原理	59
2.9.4 直梁混合变量的虚余功原理	60
2.9.5 弹性动力学直梁混合变量的虚功原理和 虚余功原理	60
2.10 直梁混合变量变分原理的应用	61
2.10.1 混合变量最小势能原理的应用	61
2.10.2 混合变量第二余能原理的应用	71
2.11 直梁混合变量最小势作用量原理的应用	72
2.11.1 一端固定另一端简支的直梁	72
2.11.2 两端固定的直梁	74
2.11.3 悬臂梁	77
第3章 大挠度弯曲直梁混合变量的变分原理	80
3.1 大挠度直梁的基本公式	80
3.2 大挠度直梁的功的互等定理	83
3.3 大挠度直梁混合变量的最小势能原理	87
3.3.1 大挠度直梁的最小势能原理	87
3.3.2 大挠度直梁混合变量最小势能原理的推导	90
3.4 大挠度直梁的广义势能原理	93

3.5	大挠度直梁混合变量的余能原理	95
3.5.1	大挠度直梁的驻值余能原理	95
3.5.2	大挠度直梁混合变量的驻值余能原理	97
3.6	大挠度直梁的广义余能原理	101
3.7	大挠度直梁混合变量的最小势作用量原理及 驻值余作用量原理	102
3.7.1	大挠度直梁最小势作用量原理	102
3.7.2	大挠度直梁混合变量的最小势作用量原理	104
3.7.3	大挠度直梁驻值余作用量原理	107
3.7.4	大挠度直梁混合变量的驻值余作用量原理	109
3.8	大挠度直梁混合变量的虚功原理和虚余功原理	112
3.8.1	大挠度直梁的虚功原理	112
3.8.2	大挠度直梁混合变量的虚功原理	112
3.8.3	大挠度直梁的虚余功原理	113
3.8.4	大挠度直梁混合变量的虚余功原理	114
3.8.5	弹性动力学大挠度直梁混合变量的 虚功原理和虚余功原理	115
第4章	弯曲矩形板混合变量的变分原理	117
4.1	弯曲矩形板混合变量的最小势能原理	117
4.2	弯曲矩形板混合变量的余能原理	123
4.2.1	混合变量的第一余能原理	123
4.2.2	混合变量的第二余能原理	130
4.3	弯曲矩形板的广义变分原理	132
4.3.1	弯曲矩形板的广义势能原理	132
4.3.2	弯曲矩形板混合变量的广义势能原理	133
4.3.3	弯曲矩形板的广义余能原理	134
4.3.4	弯曲矩形板混合变量的广义余能	135
4.3.5	广义势能和广义余能的关系	136
4.4	弯曲矩形板混合变量的虚功原理和虚余功原理	137
4.4.1	弯曲矩形板混合变量的虚功原理	137

4.4.2	弯曲矩形板混合变量的虚余功原理	138
4.5	弯曲矩形板混合变量的最小势作用量原理及 最小余作用量原理	139
4.5.1	弯曲矩形板混合变量的最小势作用量原理 ...	139
4.5.2	弯曲矩形板混合变量的最小余作用量原理 ...	144
第5章	应用混合变量最小势能原理于求解	
	弯曲矩形板的平衡问题	149
5.1	一边固定一边自由另两邻边简支的矩形板	149
5.2	两对边固定另两对边自由矩形板的弯曲	153
5.3	四边固定矩形板的弯曲	156
5.4	四角点支承的矩形板	162
5.5	一集中载荷作用下两邻边固定另两邻边自由的 矩形板	171
5.6	悬臂矩形板	179
5.7	两对边简支一边固定一边自由的矩形板	187
5.8	均载两邻边固定两邻边自由的矩形板	191
第6章	应用混合变量最小势能原理于求解	
	矩形板的稳定问题	198
6.1	两邻边简支一边固定另一边自由的矩形板	198
6.2	四边固定的矩形板	203
6.3	四角点支承的矩形板	207
6.4	两邻边固定另两邻边自由的矩形板	213
第7章	应用混合变量的余能原理于求解	
	弯曲矩形板的平衡问题	221
7.1	四边简支矩形板	221
7.2	均载作用四边固定的矩形板	230
7.3	四角点支承的矩形板	233
7.4	均载作用两邻边固定另两邻边自由的矩形板	237
第8章	应用混合变量的最小势作用量原理于求解	
	弯曲矩形板的振动问题	245

8.1	两邻边固定一边自由一边简支的矩形板	245
8.2	四边固定的矩形板	254
8.3	两邻边固定另两邻边自由的矩形板	263
8.4	悬臂矩形板	274
8.5	弯曲矩形板的固有频率	286
第9章	大挠度弯曲薄板混合变量的变分原理	296
9.1	大挠度板的基本方程	296
9.1.1	大挠度板的连续方程	296
9.1.2	大挠度板的微分平衡方程	299
9.1.3	大挠度矩形板的边界条件	303
9.2	大挠度板的变形能原理	304
9.3	大挠度板的功的互等定理	313
9.4	由大挠度板的变形能原理及功的互等定理 导出势能原理和余能原理	322
9.5	由大挠度板的变形能原理及功的互等定理 导出已知边界值变化的变分原理	328
9.5.1	由大挠度板的变形能原理及功的互等定理 导出已知边界位移变化的势能原理	328
9.5.2	由大挠度板的变形能原理及功的互等定理 导出已知边界力变化的余能原理	332
9.6	大挠度板混合变量的最小势能原理	336
9.7	大挠度板混合变量的驻值余能原理	343
9.8	大挠度板的广义变分原理	352
9.8.1	大挠度板的广义势能原理	352
9.8.2	大挠度板混合变量的广义势能原理	353
9.8.3	大挠度板的广义余能原理	354
9.8.4	大挠度板混合变量的广义余能原理	355
9.8.5	广义势能和广义余能的关系	356
9.9	大挠度板混合变量的最小势作用量原理及 驻值余作用量原理	358

9.9.1	大挠度板的最小势作用量原理	358
9.9.2	大挠度板混合变量的最小势作用量原理	360
9.9.3	大挠度板的驻值余作用量原理	362
9.9.4	大挠度板混合变量的驻值余作用量原理	366
9.10	大挠度板混合变量的虚功原理及虚余功原理	369
9.10.1	大挠度板的虚功原理	369
9.10.2	大挠度板混合变量的虚功原理	369
9.10.3	大挠度板的虚余功原理	370
9.10.4	大挠度板混合变量的虚余功原理	370
9.10.5	弹性动力学大挠度板混合变量的虚功原理 及虚余功原理	371
第10章	小位移弹性理论混合变量的变分原理	373
10.1	笛卡儿张量符号及相关基本方程	373
10.2	功的互等定理	378
10.3	混合变量的极值变分原理	381
10.3.1	混合变量的最小势能原理	381
10.3.2	混合变量的最小余能原理	386
10.4	广义变分原理	391
10.4.1	广义势能原理	391
10.4.2	混合变量的广义势能原理	392
10.4.3	广义余能原理	392
10.4.4	混合变量的广义余能原理	393
10.4.5	广义势能和广义余能的关系	393
10.5	混合变量的最小势作用量原理及 最小余作用量原理	394
10.5.1	最小势作用量原理	394
10.5.2	混合变量的最小势作用量原理	395
10.5.3	最小余作用量原理	397
10.5.4	混合变量的最小余作用量原理	398
10.6	混合变量的虚功原理及虚余功原理	400

10.6.1	虚功原理	400
10.6.2	混合变量的虚功原理	401
10.6.3	虚余功原理	402
10.6.4	混合变量的虚余功原理	403
10.6.5	弹性动力学混合变量的虚功原理及 虚余功原理	403
10.7	混合变量极值变分原理与经典极值变分原理 的比较	404
10.7.1	混合变量最小势能原理与最小势能原理 的比较	404
10.7.2	混合变量最小余能原理与最小余能原理 的比较	405
第 11 章	有限位移弹性理论混合变量的变分原理	407
11.1	直角坐标系有限位移弹性力学基本方程的 推导	407
11.1.1	应变分析	407
11.1.2	平衡方程	411
11.1.3	静力边界条件	412
11.2	有限位移理论的变形能原理	414
11.3	有限位移理论的功的互等定理	415
11.4	有限位移理论的极(驻)值变分原理	418
11.4.1	最小势能原理	418
11.4.2	驻值余能原理	419
11.5	由有限位移理论的变形能原理及功的互等定理 导出势能原理及余能原理	422
11.6	由有限位移理论的变形能原理及功的互等定理 导出已知边界值变化的变形能原理	424
11.7	有限位移理论混合变量的变分原理	426
11.7.1	混合变量的最小势能原理	426
11.7.2	混合变量的驻值余能原理	428

11.8	有限位移理论的广义变分原理	432
11.8.1	有限位移的广义势能原理	432
11.8.2	有限位移混合变量的广义势能原理	433
11.8.3	有限位移的广义余能原理	433
11.8.4	有限位移混合变量的广义余能原理	434
11.8.5	广义势能和广义余能的关系	435
11.9	有限位移理论混合变量的最小势作用量原理及驻值余作用量原理	436
11.9.1	有限位移理论的最小势作用量原理	436
11.9.2	有限位移理论混合变量的最小势作用量原理	437
11.9.3	有限位移理论的驻值余作用量原理	438
11.9.4	有限位移理论混合变量的驻值余作用量原理	439
11.10	有限位移理论的虚功原理及虚余功原理	441
11.10.1	有限位移的虚功原理	441
11.10.2	有限位移混合变量的虚功原理	442
11.10.3	有限位移的虚余功原理	442
11.10.4	有限位移混合变量的虚余功原理	443
11.10.5	弹性动力学有限位移混合变量的虚功原理和虚余功原理	444
	附录	445
	参考文献	470

Contents

Foreword	1
Chapter 1 Some fundamental knowleges of variational method	8
1.1 Functionals and variational calculus of the functionals	8
1.2 Fundamental Lemma of variational methods and Euler's equations	12
1.2.1 Fundamental lemma of variational calculus	12
1.2.2 Euler's equation and natural boundary conditions	13
1.3 Lagrange's multipleir method	15
1.3.1 Lagrange's multiplier method solving condition extreme value of functions	16
1.3.2 Lagrange's multiplier method solving condition extreme value of functionals	18
Chapter 2 Variational principles with mixed variables of bending of straight beams	20
2.1 Fundamental formulas of straight beams	20
2.2 Strain energy and complementary energy of deformation of straight beams	22
2.3 Reciprocal theorem of straight beams	24
2.3.1 The corrected reciprocal theorem of straight beams	24
2.3.2 A concrete example for the corrected reciprocal theorem of straight beams	28

2. 3. 3	Betti ' s reciprocal theorem of straight beams	29
2. 4	Principle of minimum potential energy with mixed variables of straight beams	30
2. 4. 1	Principle of minimum potential energy of straight beams	30
2. 4. 2	Derivation of principle of minimum potential energy with mixed variables of straight beams	32
2. 5	Gneralized principle of potential energy of straight beams	37
2. 6	Principle of minimum complementary energy with mixed variables of straight beams	39
2. 6. 1	Principle of minimum complementary energy of straight beams	39
2. 6. 2	First principle of complementary energy with mixed variables of staight beams	41
2. 6. 3	Second principle of complementary energy with mixed variables of straight beams	45
2. 7	Generalized principle of complementary energy of straight beams	47
2. 8	Principle of minimum potential action and principle of minimum complementary action with mixed variables of straight beams	48
2. 8. 1	Principle of minimum potential action of straight beams	48
2. 8. 2	Principle of minimum potential action with mixed variables of straight beams	50
2. 8. 3	Principle of minimum complementary action of straight beams	53
2. 8. 4	Principle of minimum complementary action with mixed	

variables of straight beams	55
2. 9 Principles of virtual work and virtual complementary work with mixed variables of straight beams	58
2. 9. 1 Principle of virtual work of straight beams	58
2. 9. 2 Principle of virtual work with mixed variables of straight beams	58
2. 9. 3 Principle of virtual complementary work of straight beams	59
2. 9. 4 Principle of virtual complementary work with mixed variables of straight beams	60
2. 9. 5 Principle of virtual work and principle of virtual complementary work with mixed variables of straight beams in elastodynamics	60
2. 10 Applications of the variational principles with mixed variables of straight beams	61
2. 10. 1 Applications of the principle of minimum potential energy with mixed variables	61
2. 10. 2 Applications of the second principle of complementary energy with mixed variables	71
2. 11 Applications of the principle of minimum potential action with mixed variables of straight beams	72
2. 11. 1 Straight beam with one end clamped and the other end simply supported	72
2. 11. 2 Straight beam with two ends clamped	74
2. 11. 3 Cantilever beam	77
Chapter 3 Variational principles with mixed variables of bending of straight beams with large deflection	80

3. 1	Fundamental formulas of straight beams with large deflection	80
3. 2	Reciprocal theorem of straight beams with large deflection	83
3. 3	Principle of minimum potential energy with mixed variables of straight beams with large deflection	87
3. 3. 1	Principle of minimum potential energy of straight beams with large deflection	87
3. 3. 2	Derivation of principle of minimum potential energy with mixed variables of straight beams with large deflection	90
3. 4	Generalized principle of potential energy of straight beams with large deflection	93
3. 5	Principle of complementary energy with mixed variables of straight beams with large deflection	95
3. 5. 1	Principle of stationary complementary energy of straight beams with large deflections	95
3. 5. 2	Principle of stationary complementary energy with mixed variables of straight beams with large deflection	97
3. 6	Generalized principle of complementary energy of straight beams with large deflection	101
3. 7	Principle of minimum potential action and principle of stationary complementary action with mixed variables of straight beams with large deflection	102
3. 7. 1	Principle of minimum potential action of straight beams with large deflection	102