

航天力学中的优化理论研究〔之二〕

关于航天器最佳发射轨道的理论 及其他问题的研究

竺苗龙 著



HANGTIAN LIXUEZHONGDE YOUHUALILUN YANJIU



航天力学中的优化理论研究[之二]

关于航天器最佳发射轨道的理论 及其他问题的研究

竺苗龙 著

中国宇航出版社

·北京·

内 容 简 介

本书为关于航天力学中的优化理论研究的学术专著,主要论述了航天器的最佳发射轨道问题,还包含了作者关于航天器返回及轨道改变等方面的理论研究成果。

全书共5章,分别为:引论;发射人造地球卫星的最佳轨道等;返回中的优化和单冲击优化;有关小推力轨道和高速效应;一些有关的问题。书中所论述的内容全部来自作者以及作者及其合作者多年的科研成果。

本书可供从事航天器发射轨道研究的航天科学技术工作者阅读,也可作为高等院校和研究机构相关专业的研究生教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

关于航天器最佳发射轨道的理论及其他问题的研究/
竺苗龙著. —北京:中国宇航出版社,2004.9

(航天力学中的优化理论研究;2)

ISBN 7-80144-872-3

I.关... II.竺... III.航天器—最佳航迹—研究
IV. V412.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 094696 号

责任编辑 仇伟立 装帧设计 姜 旭
责任校对 王 妍 责任印制 任连福

出 版 行 **中国宇航出版社**

地 址 北京市阜成路8号 邮 编 100830
(010)68768548

网 址 www.caphbook.com / www.caphbook.com.cn

经 销 新华书店

发行部 (010)68371900 (010)88530478(传真)
(010)68768541 (010)68767294(传真)

零售店 读者服务部 北京宇航文苑
北京市阜成路8号 北京市海淀区海淀大街31号
(010)68371105 (010)62579190

承 印 北京智力达印刷有限公司

版 次 2004年9月第1版
2004年9月第1次印刷

开 本 1 / 16

规 格 787 × 1092

印 张 11.25

字 数 281千字

书 号 ISBN 7-80144-872-3

定 价 50.00元

本书如有印装质量问题可与发行部调换

前 言

《关于多级火箭结构参数的优化理论及其他问题的研究》(《航天力学中的优化理论研究》[之一])和《关于航天器最佳发射轨道的理论及其他问题的研究》(《航天力学中的优化理论研究》[之二])的写作,现在终于完成了,我内心很激动。

我想起了我的小学老师、中学老师、大学老师以及一些同行中的长辈对我的教育,想起了各级组织和领导对我的培养,想起了我的同事和朋友对我的帮助,想起了我的合作者广宇、吕茂烈等先生过去和我一起的努力。当然我也想起了我的父母和我的家庭对我的关心以及我的孩子们这几年在本书的有关结果中所做的工作。例如《关于多级火箭结构参数的优化理论及其他问题的研究》中的第6章整整一章和其他若干节的内容就是他们和我合作研究的。

本书的全部成果是我与我的合作者自己研究所得,其具体内容曾反映在我们的一系列论文中,因此书中不可避免地会重复提到一些内容。如果去掉这些少量的重复内容,又怕给读者了解全节的内容带来一些不必要的麻烦。考虑再三,还是没有动它。

另外,在《关于多级火箭结构参数的优化理论及其他问题的研究》中,除了关于多级火箭结构参数的优化理论外还包含了其他一些研究成果,例如多级火箭的速度极限、相对论力学中的多级火箭的特征速度表达式等。

同样,在《关于航天器最佳发射轨道的理论及其他问题的研究》中,除了关于航天器最佳发射轨道的理论之外,还有关于返回研究中的成果以及关于轨道改变研究中的成果等。

但是这两本书的主要内容是关于多级火箭结构参数的优化理论和关于航天器最佳发射轨道的理论。它们凝结着我几乎一辈子的汗水和心血。

十几年前,我做梦也在想着把上述这两方面的工作系统化并提高到理论的高度。1994年科学出版社出版了我的《航天力学中的一些理论问题》(英文版),2000年科学出版社又出版了中文版《航天力学中的一些理论问题(2)》。这两本书的内

容实际上就是关于多级火箭结构参数的优化理论和关于航天器最佳发射轨道理论的雏形。

此后,我一直在不间断地完善这两个我称之为“小理论”的论述,同时请国防科技大学的老友们对我的理论做抽样仿真,以便弄明白这两个“小理论”在工程应用中是否有意义?有多大的意义?仿真表明:结果挺好(详见本书的两个实例)。就这样经过多年的努力,我把这两个“小理论”终于搞成现在这个样子而呈献给读者。

尽管奋斗多年,终究能力有限。所以书中不足甚至错误的地方恳请前辈和同行们多多指正,以便我们今后把理论研究和应用工作搞得更好,为国家、为民族作出新的贡献!

竺苗龙

2002年5月21日

目 录

第 1 章 引论	1
1.1 航天器的发射及发射中的优化	1
1.2 航天器在地心引力场中的惯性运动	3
1.3 航天器在轨道改变和轨道转移及轨道调整中的优化	9
1.4 返回中的优化, 高速效应, 小推力	10
第 2 章 发射人造地球卫星的最佳轨道等	11
2.1 引言	11
2.2 发射人造地球卫星的最佳轨道(I)	14
2.3 一些有关性质的证明	22
2.4 发射人造地球卫星的最佳轨道(II)	31
2.5 发射人造地球卫星的最佳轨道(III)	36
2.6 $\min(v_0 + \Delta v)$ 随 r_0 变化的情况	42
2.7 指标是 $f = v_0 + \Delta v + A$ 时, 双曲轨道和抛物轨道等作为惯性段的排除	44
2.8 发射地球同步卫星的最佳轨道(I)	47
2.9 发射地球同步卫星的最佳轨道(II)	52
2.10 一个关于最佳发射轨道的例子	56
2.11 例子分析(1)	65
2.12 例子分析(2)	70
2.13 例子分析(3)	72
2.14 小结(1)	77
2.15 小结(2)和关于文献[5]的介绍及其他	80
2.16 关于本章内容的初步总结	87
第 3 章 返回中的优化和单冲击优化	92
3.1 飞船返回时一个有关轨道的优化问题	92
3.2 一些有关性质的证明	97
3.3 定向轨道之间的单冲击优化	100

3.4	不定向轨道之间的单冲击优化	103
第4章	有关小推力轨道和高速效应.....	108
4.1	从初始椭圆轨道起飞的恒定径向横向小推力飞船轨道	108
4.2	从椭圆轨道上起飞的恒定切向小推力飞行问题	118
4.3	洛仑兹变换的一个应用	129
第5章	一些有关的问题.....	143
5.1	当 $r_P < r_0 < r_A$ 时直接进入目标轨道不好的又一证明	143
5.2	单冲击优化的应用	145
5.3	关于航天器在最佳发射中双曲惯性段和抛物惯性段的排除等	147
5.4	双冲击时两定向椭圆轨道最佳转移的又一种解法	156
5.5	任意冲击时两定向椭圆轨道间最佳转移的又一种解法	159
5.6	关于文献[4]中两个不定向椭圆轨道间最佳转移一个失误的说明.....	165
参考文献	169

第1章 引论

1.1 航天器的发射及发射中的优化

发射一个低轨道的卫星,可以直接进入目标轨道(见图 1-1)。

发射一个较高轨道的卫星,可以从地面起飞先冲破大气层,到了一定高度后关机,然后作惯性飞行至目标轨道,最后再加速一次进入目标轨道(见图 1-2)。这种发射方式本书中称为三段式发射方式。考虑到能量的优化,惯性轨道所在的平面要与目标轨道所在的平面共面并且惯性轨道与目标轨道相切。

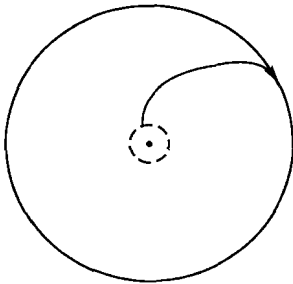


图 1-1 发射轨道示意图(1)

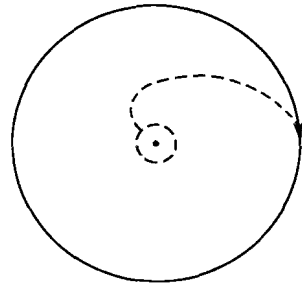


图 1-2 发射轨道示意图(2)

当然,发射一个高轨道的卫星也可以先发射到停泊轨道,然后再由停泊轨道转移至目标轨道(见图 1-3)。同样是由于考虑到能量的优化,停泊轨道所在的平面要与目标轨道所在的平面共面。

我们知道:从停泊轨道到目标轨道的转移是有一套完整的理论的,所以这种发射问题实际上仍是一个向停泊轨道的发射问题,另外还派生出停泊轨道的大小和形状问题等。

如果把三段式发射方式的中间惯性轨道看作零,那么三段式发射方式就退化为直接进入式的发射。所以本书中讨论发射问题主要就是讨论三段式发射方式问题。

三段式发射方式的第 1 段就是火箭在地面附近的飞行。

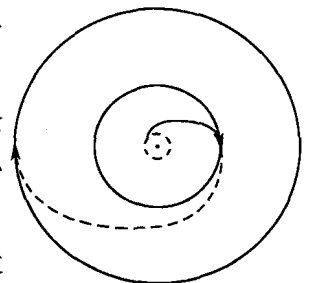


图 1-3 发射轨道示意图(3)

设 V 为火箭在地面附近的轨道上飞行的切向速度；

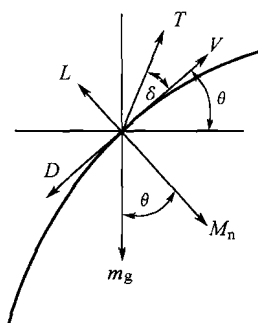


图 1-4 火箭近地飞行分析

θ 为火箭飞行方向与水平线的夹角；

m 为火箭的瞬时质量；

mg 为火箭的重力；

$mg \cos \theta$ 为重力的向心分力；

D 为火箭飞行时所受的空气阻力；

T 为火箭发动机产生的轴向推力；

δ 为推力与火箭飞行方向间的夹角；

L 为火箭在迎面气流作用下产生的升力；

W 为火箭发动机的有效喷气速度。

故得火箭沿轨道切向运动(见图 1-4)的方程为

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{D}{m} - g \sin \theta - W \frac{dm}{dt} \frac{\cos \delta}{m} \quad (1.1-1)$$

又令 S 为火箭沿轨道运动的路程, R 为轨道的曲率半径

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dS}$$

故火箭飞行的向心加速度为

$$\frac{V^2}{R} = V^2 \frac{d\theta}{dS} = V \frac{dS}{dt} \frac{d\theta}{dS} = V \frac{d\theta}{dt}$$

因此火箭的法向运动方程为

$$V \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m} - g \cos \theta - W \frac{dm}{dt} \frac{\sin \delta}{m} \quad (1.1-2)$$

由(1.1-1)和(1.1-2)联立的方程组描述了火箭在离地面附近的轨道上的运动情况。应当

指出,一般火箭发射时, $t = 0$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$; 即火箭是垂直起飞的。这时如果推力也垂直向上, 则 $\delta = 0$; 由于火箭对轨道不倾斜, $L = 0$ 。所以从(1.1-2)得

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \text{ 即 } \theta = \frac{\pi}{2}$$

要使轨道倾斜, 必须使 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ 。改变 θ 角的方法在实际中有多种, 例如小小调节一下推力方向即可在一段时间内使 θ 角改变到给定值。

从(1.1-1)可得

$$dV = -\frac{D}{m} dt - g \sin \theta dt - W \cos \delta \frac{dm}{m}$$

由于火箭发动机产生推力很大, 只须推力方向改变一很小的 δ 角即可改变火箭的飞行方向, 因此可令 $\cos \delta = 1$, 钱学森认为其所引起的误差很小。这样对上式进行积分就得

$$\int_0^{V_1} dV = - \int_0^{t_1} \frac{D}{m} dt - g \int_0^{t_1} \sin\theta dt - W \int_{m_0}^{m_1} \frac{dm}{m}$$

即

$$V_1 = - \int_0^{t_1} \frac{D}{m} dt - g \int_0^{t_1} \sin\theta dt + W \ln \frac{m_0}{m_1} \quad (1.1-3)$$

对 N 级火箭, 显然可得

$$V_N = - \int_0^{t_N} \frac{D}{m} dt - g \int_0^{t_N} \sin\theta dt + \sum_{i=1}^N W_i \ln \frac{m_0^{(i)}}{m_1^{(i)}} \quad (1.1-4)$$

公式中由于推力作用所产生的速度即齐氏速度, 只要知道各级的喷气速度及各级火箭在点火时和熄火时的质量即可计算出来。这样, 把其他两项所损耗的速度大小计算出来就可算出在关机时火箭所具有的速度。

公式中阻力 D 一般表示为

$$D = C_D \rho V^2 S / 2$$

这里 ρ 是空气密度; S 是物体的迎风截面积; V 是物体的运动速度; C_D 是阻力系数, 它跟物体的外形、速度和运动姿态等有关, 由航天器上天前从实验中获得。

优化要考虑的是, 对三段式发射而言第 1 段结束时选择怎样的 r_0, α, V_0 ; 惯性段轨道是何种圆锥曲线弧; 切点选择在何处; 推力大小如何选择等等。目标是损耗的能量最省, 当然也可把费用最省作为指标等。

再则, 如果用停泊轨道式发射, 那么如何选择停泊轨道; 最佳的停泊轨道与三段式的最佳发射轨道有什么关系等也是我们讨论的内容。

当然, 在解决上面问题的基础上, 我们又可去探讨新的问题。例如既要使能量最省又要求时间最省或进入时仍在测控允许的范围等等。

1.2 航天器在地心引力场中的惯性运动

以地心为极点建立极坐标系如图 1-5。

设火箭熄火时对应的时间为 t_0 , 对应的速度为 V_0 , 对应的距地心的距离为 r_0 , 火箭运动方向与径向的夹角为 α , 熄火点在极坐标系中的极角为 $\bar{\theta}$ (这里所指的熄火时是指第一主动段的熄火时)。

由于火箭在自由飞行中无推力作用, 同时在 200 km 以上的高空中其空气阻力可以忽略不计, 故其飞行为一个保守系统

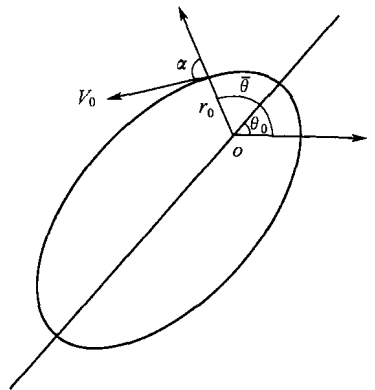


图 1-5 极坐标平面运动图

的运动,系统的总能量不变。

单位质量的物体在 r 处其势能为 $-\frac{\mu^2}{r}$, 其中 $\mu^2 = gR^2$ 。

动能为 $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$

故从机械能守恒可得

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{\mu^2}{r} = \frac{1}{2} V_0^2 - \frac{\mu^2}{r_0} \quad (1.2-1)$$

另外,此时质点作惯性飞行,所受的力只有向心力,故此时质点的动量矩也守恒。

$$r \left(r \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = r^2 \frac{d\theta}{dt} = V_0 r_0 \sin \alpha \quad (1.2-2)$$

由(1.2-2)可得

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r^2} \quad (1.2-3)$$

将(1.2-2),(1.2-3)代入(1.2-1)得

$$\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^4} + \frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2} - \frac{2\mu^2}{r} = V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r} \quad (1.2-4)$$

这个方程很重要,它是本文的出发点。

显然,当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = \pi$ 时,火箭的运动不是背离地心就是指向地心,其轨迹是条直线。

当 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时,把此时的速度 V 分解成径向和横向两个分量。由图 1-5 可见,此时随着 θ 的增大, r 会增大。

另外,从(1.2-4)可得

$$\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{2\mu^2}{r} - \frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2}}{\frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^4}} \quad (1.2-5)$$

因此,当 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时,由(1.2-5)可得

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{2\mu^2}{r} - \frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2}}}{\frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r^2}} \quad (1.2-6)$$

所以

$$d\theta = \frac{\frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r^2}}{\sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{2\mu^2}{r} - \frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2}}} dr = \frac{-d\left(\frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r}\right)}{\sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{2\mu^2}{r} - \frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2}}}$$

$$= \frac{-d\left(\frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r}\right)}{\sqrt{\left(V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}\right) - \left(\frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r} - \frac{\mu^2}{V_0 r_0 \sin \alpha}\right)^2}}$$

对上式进行积分,得

$$\int_{\bar{\theta}}^{\theta} d\theta = \int_{r_0}^r \frac{-d\left(\frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r}\right)}{\sqrt{\left(V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}\right) - \left(\frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r} - \frac{\mu^2}{V_0 r_0 \sin \alpha}\right)^2}}$$

$$\theta - \bar{\theta} = \arccos \frac{\frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r} - \frac{\mu^2}{V_0 r_0 \sin \alpha}}{\sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}}} - \arccos \frac{V_0 \sin \alpha - \frac{\mu^2}{V_0 r_0 \sin \alpha}}{\sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}}}$$

令

$$\arccos \frac{V_0 \sin \alpha - \frac{\mu^2}{V_0 r_0 \sin \alpha}}{\sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}}} = A_1$$

则

$$\theta - \bar{\theta} + A_1 = \arccos \frac{\frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r} - \frac{\mu^2}{V_0 r_0 \sin \alpha}}{\sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}}}$$

$$\cos[\theta - (\bar{\theta} - A_1)] = \frac{\frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r} - \frac{\mu^2}{V_0 r_0 \sin \alpha}}{\sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}}}$$

$$r = \frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{\frac{\mu^2}{V_0 r_0 \sin \alpha} + \sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}} \cos[\theta - (\bar{\theta} - A_1)]} \quad (1.2-7)$$

将(1.2-7)式与极坐标系下的圆锥曲线方程

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (*)$$

相比较,可得

$$p = \frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{\mu^2} \quad (1.2-8)$$

$$e = \frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{\mu^2} \cdot \sqrt{\frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha} - \left(\frac{2\mu^2}{r_0} - V_0^2 \right)} \quad (1.2-9)$$

$$\theta_0 = \bar{\theta} - A_1 \quad (1.2-10)$$

下面我们仅讨论 $V_0 < \sqrt{\frac{2\mu^2}{r_0}}$ 的情况, 显见当 $V_0 \geq \sqrt{\frac{2\mu^2}{r_0}}$ 时, 其结果也是类似的, 但是当 $V_0 \geq \sqrt{\frac{2\mu^2}{r_0}}$ 时, 此时所对应的双曲线、抛物线虽是一段, 但是无限。对于 $V_0 < \sqrt{\frac{2\mu^2}{r_0}}$ 的情况, 虽然此时画出的轨迹对应 $[\bar{\theta}, \theta_0 + \pi]$ 这一部分, 但实际上, 它把一个完整的椭圆都描述出来了, 而且方位也确定了。

如果熄火点的速度方向如图 1-7 所示, 经过类似的分析和探讨, 我们仍有

$$p = \frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{\mu^2}$$

$$e = \frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{\mu^2} \cdot \sqrt{\frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha} - \left(\frac{2\mu^2}{r_0} - V_0^2 \right)}$$

$$\theta_0 = \bar{\theta} - A_1$$

在实际上, 它还是图 1-6 的那个椭圆, 方位也一致。但对应画出的轨迹则仅是图 1-7 所示的那一段。

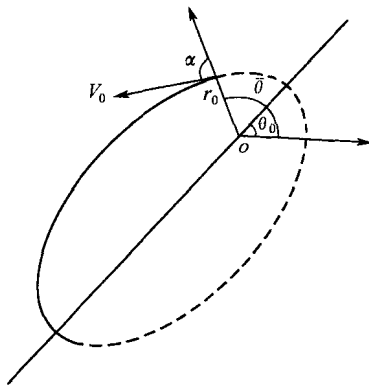


图 1-6 极坐标平面运动图 ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

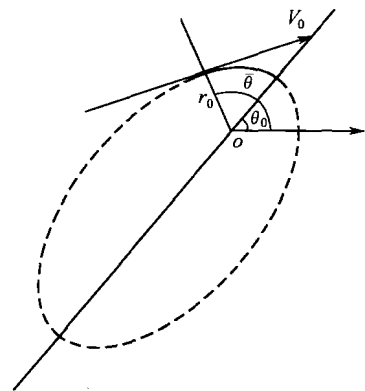


图 1-7 熄火点速度方向(1)

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 且熄火点的速度方向如图 1-8 所示时, 我们仍可由 (1.2-4) 类似推得

$$r = \frac{V_0 r_0}{\frac{\mu^2}{V_0 r_0} + \sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2} \cos(\theta - \bar{\theta})}}$$

将上式与极坐标系下的圆锥曲线方程

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

相比较,可得

$$p = \frac{V_0^2 r_0^2}{\mu^2}$$

$$e = \frac{V_0 r_0}{\mu^2} \cdot \sqrt{\frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2} - \left(\frac{2\mu^2}{r_0} - V_0^2\right)}$$

$$\theta_0 = \bar{\theta}$$

它对应的轨迹,是图 1-8 所示的半个椭圆。

如果速度方向如图 1-9 所示,这时我们可类似推得

$$p = \frac{V_0^2 r_0^2}{\mu^2}$$

$$e = \frac{V_0 r_0}{\mu^2} \cdot \sqrt{\frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2} - \left(\frac{2\mu^2}{r_0} - V_0^2\right)}$$

$$\theta_0 = \bar{\theta}$$

它对应的轨迹,是图 1-9 所示的半个椭圆。

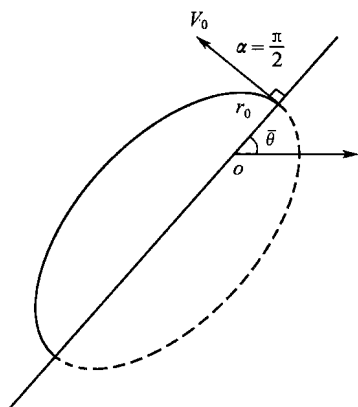


图 1-8 熄火点速度方向($\alpha = \frac{\pi}{2}$)

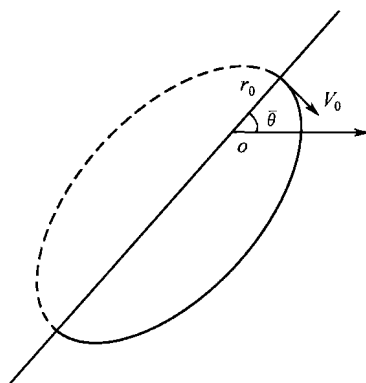


图 1-9 速度方向示意

至此,对于 $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ 的情况,我们完全讨论好了。

现在来看 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 的情况。

先看熄火点速度方向如图 1-10 所示时的情况,由于此时 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,所以我们取

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{2\mu^2}{r} - \frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{r^2}}}{\frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{r^2}}$$

类似可推得

$$r = \frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{\frac{\mu^2}{V_0 r_0 \sin \alpha} + \sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha} \cos[\theta - (\bar{\theta} + A_2)]}}$$

其中

$$A_2 = \arccos \frac{V_0 \sin \alpha - \frac{\mu^2}{V_0 r_0 \sin \alpha}}{\sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu^2}{r_0} + \frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}}}$$

将上式与极坐标系下的圆锥曲线方程

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

相比较,我们又可得

$$p = \frac{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}{\mu^2}$$

$$e = \frac{V_0 r_0 \sin \alpha}{\mu^2} \cdot \sqrt{\frac{\mu^4}{V_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha} - \left(\frac{2\mu^2}{r_0} - V_0^2\right)}$$

$$\theta_0 = \bar{\theta} + A_2$$

此时,它对应的轨迹也仅是图 1-10 所示的那一段,但在实际上,它也是把一个完整的椭圆轨道描述出来了,而且方位也完全确定了。

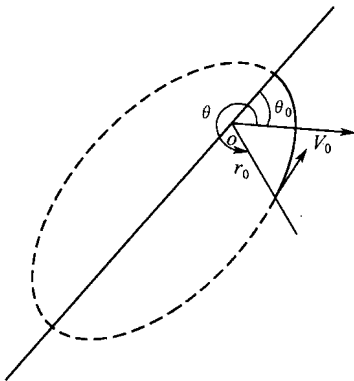


图 1-10 熄火点速度方向 $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$

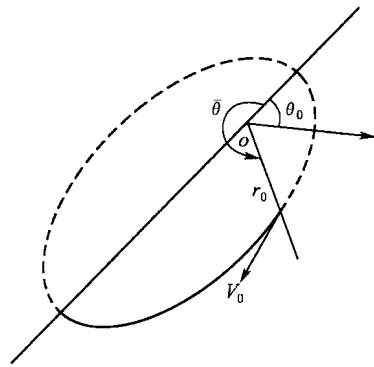


图 1-11 熄火点速度方向(2)

对于熄火点速度方向如图 1-11 所示时的情况,类似地我们又可推得相仿的结论。此时它对应的轨迹应是图 1-11 所示的那一部分。

1.3 航天器在轨道改变和轨道转移及轨道调整中的优化

轨道改变和轨道转移的情况分别如图 1-12 和图 1-13 所示。

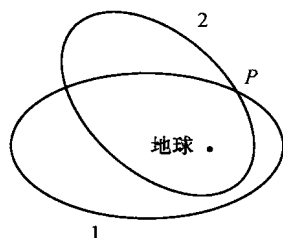


图 1-12 轨道改变

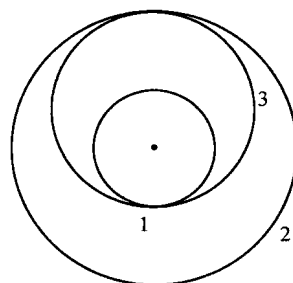


图 1-13 轨道转移

如果轨道 1 与轨道 2 不共面且只有一个交点,那么在交点处进行单冲击可使航天器由轨道 1 改变为轨道 2。

如果轨道 1 与轨道 2 共面,显然这时就有两个交点。在那个交点处进行单冲击使航天器由轨道 1 改变成为轨道 2 就有一个优化的问题(参见图 1-12)。

在轨道调整中如果也出现类似问题,那么显然我们可以类似地进行优化。

至于轨道转移,那优化问题就更为人们所知。

我们知道:从一个圆周轨道转移到另一个圆周轨道,如果仅仅考虑双冲击过渡,那么霍曼(Water Hohmann)早就指出霍曼转移轨道为最佳(参见图 1-13)。

后来 Lawdan 等人研究过两个定向的轨道之间的转移问题,但办法很复杂。

不小的实际背景是要解决圆轨道与椭圆轨道之间的最佳转移问题,这实际上是两个不定向轨道之间的最佳转移问题。巴尔(Barrar)等人的研究包含了这类问题,得到的结果也很漂亮,即从能量的角度来看,冲击的次数不是 2 就是 3;当然还给了判别方法。这就是说冲击的次数不是越多越好,再多的冲击一定不好。

三冲击过渡如图 1-14 所示。

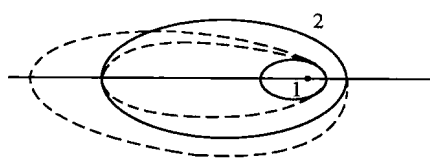


图 1-14 三冲击过渡

考虑到飞行时间和点火次数以及 2 次冲击和 3 次冲击具体所消耗的能量比较,所以工程上一般还是采用两冲击转移即霍曼转移。

1.4 返回中的优化,高速效应,小推力

返回是进入的特殊情况,它是指目标天体为地球的进入情况。

假设航天器由太空(例如从月球)返回地球引力圈内标定极径为 γ_0 的一点 Q 时所具有的速度为 V_Q ,方向角 α 可在意控制。在 Q 处受到一个逆向的冲击,速度降至 V_0 ,然后在地球引力作用下自由飞行;在到达自由飞行段终点时速度已变成 V'_T ,在那里再受一次逆向的冲击使飞船速度降至 V_T ,从而进入预定的低轨道运行。

这里也有优化的问题,我们在本书的正文中已详细叙述了。

而从一个低轨道上返回地球,工程上已基本解决了。即大致经过:调姿—制动—过渡—再入走廊—着陆几个阶段,如图 1-15 所示。

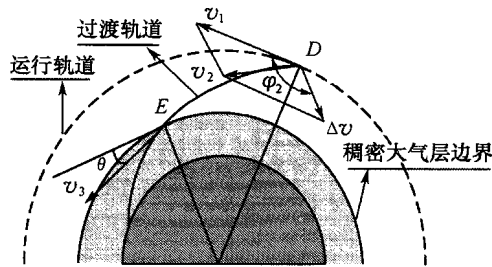


图 1-15 航天器返回示意图

这里,关键的问题是如何利用大气层问题:既不要让阻力引起的过载太大,又不要让航天器受热太多或太强而受损甚至烧毁,同时又要利用大气的阻力使航天器平安地返回到指定的地方。

至于对高速效应的考虑,我们也得到了一些结果。例如在 $Oxyz$ 系统内的人看到的圆锥曲线或直线……在另一个高速的系统 $O'x'y'z'$ 系统内的人看来会是什么……正文都作了详细的叙述。

当然前面我们主要是在大推力情况下考虑的。在小推力的情况下,如果起飞轨道是一个圆轨道,其优化问题国内外都已取得了很多成果。如果起飞轨道是椭圆轨道,本书的有关部分就是我们对其优化问题作了一些探讨后所得的结果。