国内名校骨干教师

2012

百题大过关

吃透百题闯三关 * 事半功倍定过关

高考数学

第二关

核心题

张瑞炳◎主编

华东师范大学出版社

2012
百题大过关

高考数学

第二关　核心题

主　编：张瑞炳

编写者：
吴　迅　张瑞炳　赖平民　邱天文
陈文清　陈海烽　连生核　章少川
李生华　祝国华　杨福能　许若男
谢　钧

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学百题大过关. 第二关. 核心题/张瑞炳主编.
—上海：华东师范大学出版社，2011.3
(百题大过关)
ISBN 978-7-5617-8506-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①中学数学课—高中—习题集—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 042486 号

高考数学百题大过关

第二关 核心题

主　　编　张瑞炳
策划组稿　倪　明　舒　刊
项目编辑　舒　刊
审读编辑　郜　田　刘　艺
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　常熟市文化印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　15.5
字　　数　388 千字
版　　次　2011 年 5 月第一版
印　　次　2011 年 5 月第一次
印　　数　16000
书　　号　ISBN 978-7-5617-8506-5/G·5019
定　　价　27.00 元

出 版 人　朱杰人

丛书前言

图书市场上有关小升初及中、高考的复习用书不胜其多,不少书的训练题或失之偏少,或庞杂无度。同时选择几种作参考,往往重复不少,空白依旧甚多,费时费钱还未必能完全过关。怎样在有限的时间里得到充分而有效的训练?怎样使训练达到量与质的最完美匹配?依据对小学毕业班、初三和高三优秀教师的调研,总结出“百题过关”的复习理念。为此,我们邀请经验丰富的教师担任作者,每本书或每个考点精心设计一百道互不重复且具有一定梯度的训练题,以求用最快的速度,帮助学生完全过关。

丛书共26种,涵盖小升初及中、高考语文、数学、英语的全部题型。

丛书具有四大特点:

一、丰富性。丛书涉及的内容囊括了小升初及中、高考所有知识点,覆盖面广,内容丰富。

二、层次性。题目排列杜绝杂乱无章和随意性,一般分为三个层次:第一,精选历年来的相关考题;第二,难度稍小的训练题;第三,难度稍大的训练题。这样编排既能让读者了解近年来小升初及中、高考的命题特点及其走向,又能得到渐次加深的足够量的训练。

三、指导性。为了方便使用本丛书的老师和同学,对有一定难度的题目,丛书不仅提供参考答案,还力求作最为详尽的解说,目的在于让读者知其然,更知其所以然。同学们有了这套书,就等于请回了随时可以请教的老师。

四、权威性。丛书的编写者都是国内名校骨干教师,有些还是参加国家教育部“名师工程”的著名特级教师,在各地享有盛名。他们丰富的教学实践经验和深厚的理论修养,为本丛书在同类书中胜人一筹打下扎实基础。

愿这套高质量的丛书能帮助考生顺利闯过小升初及中、高考大关,也愿考生以小升初及中、高考为新起点,步入美好的未来。

华东师范大学出版社教辅分社

目录

知识整合篇

思想方法篇

知识整合篇

专题一 集合与常用逻辑用语

解题策略

纵观近几年来高考数学试题，涉及集合问题的考查一般有两种形式：一是考查集合的有关概念、集合之间的关系和运算等；二是考查学生对集合思想的理解与应用，往往与其他数学知识融为一体. 高考对逻辑用语的考查，主要是对命题真假的判断、命题四种形式的判断、充要条件的判断、全称量词和特称量词的应用，多以其他数学知识为载体，具有较强的综合性. 解答集合有关问题，理解集合的意义是关键，其次注意集合中元素的互异性，空集是任何集合的子集等问题，此外还要注意转化与化归，分类与整合，数形结合等数学思想的运用. 命题真假的判断，先应分清所给命题是简单命题还是复合命题，若是复合命题则依据复合命题真值表来判定. 充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既非充分又非必要条件的判定必须坚持“双向”考查的原则，也可以转化为判断原命题与其等价的逆否命题的真假.

1 集合的相关概念

(1) 解答集合问题，首先要正确理解集合的有关概念，特别是集合中元素的三要素；对于用描述法给出的集合 $\{x \mid x \in P\}$，要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 P；要重视发挥图示法的作用，通过数形结合直观地解决问题.

(2) 注意空集 $\varnothing$ 的特殊性. 在解题中，若未能指明集合非空时，要考虑到空集的可能性，如 $A \subseteq B$，则有 $A=\varnothing$ 或 $A \neq \varnothing$ 两种可能，此时应分类讨论.

例 1 设 $A=\{(x, y) \mid y^2-x-1=0\}$，$B=\{(x, y) \mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x, y) \mid y=kx+b\}$，问是否存在 k、$b \in \mathbf{N}$，使得 $(A \cup B) \cap C=\varnothing$？若存在，求出 k、b 的值；若不存在，请说明理由.

思路分析：由集合 A 与集合 B 中的方程联立构成方程组，用判别式对根的情况进行限制，可得到 b、k 的范围，又因 b、$k \in \mathbf{N}$，进而可得 b、k 的值.

解：因为 $(A \cup B) \cap C=\varnothing$，所以 $A \cap C=\varnothing$ 且 $B \cap C=\varnothing$.

由 $\begin{cases} y^2=x+1, \\ y=kx+b, \end{cases}$ 消去 y，得 $k^2x^2+(2bk-1)x+b^2-1=0$.

因为 $A \cap C=\varnothing$，所以 $\Delta_1=(2bk-1)^2-4k^2(b^2-1)<0$，

即 $4k^2-4bk+1<0$，此不等式有解，其充要条件是 $16b^2-16>0$，即 $b^2>1$.　①

由 $\begin{cases} 4x^2+2x-2y+5=0, \\ y=kx+b, \end{cases}$ 消去 y，得 $4x^2+(2-2k)x+(5-2b)=0$.

因为 $B \cap C=\varnothing$，所以 $\Delta_2=4(1-k)^2-16(5-2b)<0$，

即 $k^2-2k+8b-19<0$，此不等式有解，其充要条件是 $8b<20$，即 $b<2.5$.　②

由①②及 $b \in \mathbf{N}$，得 $b=2$. 代入由 $\Delta_1<0$ 和 $\Delta_2<0$ 组成的不等式组，得

$$\begin{cases} 4k^2-8k+1<0, \\ k^2-2k-3<0, \end{cases} \text{解得 } k=1.$$

故存在自然数 $k=1$，$b=2$，使得 $(A \cup B) \cap C=\varnothing$.

点评：本题主要考查考生对集合及其符号的分析转化能力，即能从集合符号上分辨出所考查的知识点，进而解决问题. 解决此题的关键是将条件 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$ 转化为 $A\cap C=\varnothing$ 且 $B\cap C=\varnothing$，这样难度就降低了.

例2 已知集合 $A=\{(x, y)\mid x^2+mx-y+2=0\}$，$B=\{(x, y)\mid x-y+1=0$，且 $0\leqslant x\leqslant 2\}$，如果 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

解：由 $\begin{cases}x^2+mx-y+2=0,\\x-y+1=0(0\leqslant x\leqslant 2),\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2+(m-1)x+1=0$. ①

因为 $A\cap B\neq\varnothing$，所以方程①在区间 $[0, 2]$ 上至少有一个实数解.

首先，由 $\Delta=(m-1)^2-4\geqslant 0$，得 $m\geqslant 3$ 或 $m\leqslant -1$，设方程①的两个实数根为 x_1、x_2，

当 $m\geqslant 3$ 时，由 $x_1+x_2=-(m-1)<0$ 及 $x_1x_2=1>0$ 知，方程①只有负根，不符合要求；

当 $m\leqslant -1$ 时，由 $x_1+x_2=-(m-1)>0$ 及 $x_1x_2=1>0$ 知，方程①只有正根，且必有一根在区间 $(0, 1]$ 内，从而方程①至少有一个根在区间 $[0, 2]$ 内.

综上，实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -1]$.

点评：本题考查学生对集合及其符号的分析转化能力，$A\cap B\neq\varnothing$ 即是两集合中方程联立的方程组在 $[0, 2]$ 上有解.

例3 向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度，有如下结果：赞成 A 的人数是全体的五分之三，其余的不赞成，赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人，其余的不赞成；另外，对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的三分之一多 1 人. 问对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人?

思路分析：画出韦恩图，形象地表示出各数量关系间的联系.

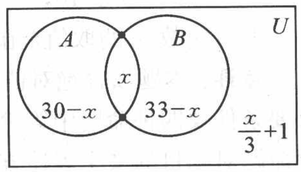


图 1-1

解：赞成 A 的人数为 $50\times\frac{3}{5}=30$，赞成 B 的人数为 $30+3=33$，如图 1-1，记 50 名学生组成的集合为 U，赞成事件 A 的学生全体为集合 A；赞成事件 B 的学生全体为集合 B.

设对事件 A、B 都赞成的学生人数为 x，则对 A、B 都不赞成的学生人数为 $\frac{x}{3}+1$，赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$，赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$.

依题意 $(30-x)+(33-x)+x+\left(\frac{x}{3}+1\right)=50$，解得 $x=21$.

所以对 A、B 都赞成的同学有 21 人，都不赞成的有 8 人.

点评：在集合问题中，有一些常用的方法如数轴法取交并集，韦恩图法等，需要考生切实掌握. 解答本题的关键是考生能由题目中的条件，想到用韦恩图直观地表示出来.

2 理解充要条件的概念

(1) 要理解“充分条件”“必要条件”的概念，当“若 p 则 q”形式的命题为真时，就记作 $p\Rightarrow q$，称 p 是 q 的充分条件，同时称 q 是 p 的必要条件，因此判断充分条件或必要条件就归结为判断命题的真假.

(2) 要理解“充要条件”的概念，对于符号“$\Leftrightarrow$”要熟悉它的各种同义词语：“等价于”，“当且仅当”，“必须并且只需”，“…，反之也真”等.

(3) 数学概念的定义都可以看成是充要条件，既是概念的判断依据，又是概念所具有的性质.

(4) 从集合观点看，若 $A \subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件；若 $A = B$，则 A、B 互为充要条件.

(5) 证明命题条件的充要性时，既要证明原命题成立(即条件的充分性)，又要证明它的逆命题成立(即条件的必要性).

例 4 已知 $p: \left|1-\frac{x-1}{3}\right| \leqslant 2$，$q: x^2-2x+1-m^2 \leqslant 0(m>0)$，若$\neg p$是$\neg q$的必要而不充分条件，求实数 m 的取值范围.

思路分析：利用等价命题先进行命题的等价转化，搞清命题中条件与结论的关系，再去解不等式，找解集间的包含关系，进而使问题解决.

解：由题意知，命题：若$\neg p$是$\neg q$的必要而不充分条件的等价命题即逆否命题为：p 是 q 的充分不必要条件.

$$p: \left|1-\frac{x-1}{3}\right| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant \frac{x-1}{3}-1 \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{x-1}{3} \leqslant 3 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 10.$$

$$q: x^2-2x+1-m^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow [x-(1-m)][x-(1+m)] \leqslant 0 \Leftrightarrow 1-m \leqslant x \leqslant 1+m\ (m>0).$$

因为 p 是 q 的充分不必要条件，所以不等式 $\left|1-\frac{x-1}{3}\right| \leqslant 2$ 的解集是 $x^2-2x+1-m^2 \leqslant 0(m>0)$ 解集的真子集.

所以 $\begin{cases}1-m<-2,\\1+m \geqslant 10,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-m \leqslant -2,\\1+m>10,\end{cases}$ 解得 $m \geqslant 9$.

所以实数 m 的取值范围是$[9, +\infty)$.

点评：本题以含绝对值的不等式及一元二次不等式的解法为考查对象，同时考查了充分必要条件及四种命题中等价命题的应用，强调了知识点的灵活性. 本题解题的关键是利用等价命题对题目的文字表述方式进行转化，使考生对充要条件的理解变得简单明了.

例 5 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n = p^n + q(p \neq 0, p \neq 1)$，求数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件.

解：$a_1 = S_1 = p+q$.

当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = p^{n-1}(p-1)$，因为 $p \neq 0$，$p \neq 1$，所以$\frac{p^n(p-1)}{p^{n-1}(p-1)} = p$，

若$\{a_n\}$为等比数列，则 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$，所以$\frac{p(p-1)}{p+q} = p$，

因为 $p \neq 0$，所以 $p-1 = p+q$，所以 $q=-1$.

这是$\{a_n\}$为等比数列的必要条件.

下面证明 $q=-1$ 是$\{a_n\}$为等比数列的充分条件.

当 $q=-1$ 时，所以 $S_n = p^n - 1(p \neq 0, p \neq 1)$，$a_1 = S_1 = p-1$.

当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = p^n - p^{n-1} = p^{n-1}(p-1)$，所以 $a_n = (p-1)p^{n-1}(p \neq 0, p \neq 1, n \in \mathbf{N}^*)$，

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(p-1)p^{n-1}}{(p-1)p^{n-2}} = p$ 为常数.

所以 $q=-1$ 时，数列$\{a_n\}$为等比数列，即数列$\{a_n\}$是等比数列的充要条件为 $q=-1$.

点评：本题重点考查充要条件的概念及解答充要条件命题时思维的严谨性，因为题目是求的充要条件，即有充分性和必要性两层含义，考生很容易忽视充分性的证明.

过关演练

001. 若集合 $S=\{y \mid y=3^{x}, x \in \mathbf{R}\}$，$T=\{y \mid y=x^{2}-1, x \in \mathbf{R}\}$，则 $S \cap T$ 是（　　）.

A. S　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. 有限集

002. 方程 $mx^{2}+(2m+1)x+m=0$ 有两个不等的实根，则实数 m 的取值范围是（　　）.

A. $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$　　B. $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$

C. $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{4}, 0\right) \cup (0, +\infty)$

003. 若 $a \in \mathbf{R}$，且对于一切实数 x 都有 $ax^{2}+ax+a+3>0$，那么 a 的取值范围是（　　）.

A. $(0, +\infty)$　　B. $[0, +\infty)$

C. $(-\infty, -4)$　　D. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

004. 下列四个命题：①"若 $x^{2}+y^{2}=0$，则实数 x，y 均为零"的逆命题；②"相似三角形的面积相等"的否命题；③"若 $A \cap B=A$，则 $A \subseteq B$"的逆命题；④"末位数不为零的整数可被 3 整除"的逆否命题. 其中真命题是（　　）.

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ③④

005. 若 A、B、C 为三个集合，$A \cup B=B \cap C$，则一定有（　　）.

A. $A \subseteq C$　　B. $C \subseteq A$　　C. $A \neq C$　　D. $A=\varnothing$

006. 设集合 $A=\{x \mid x=a^{2}+1, a \in \mathbf{N}^{*}\}$，$B=\{y \mid y=b^{2}+4b+5, b \in \mathbf{N}^{*}\}$，则 A 与 B 的关系是________.

007. 关于 x 的方程 $x^{2}-(2a-1)x+a^{2}-2=0$ 至少有一个非负实根的充要条件是________.

008. 已知命题 p：函数 $y=\log_{0.5}(x^{2}+2x+a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，命题 q：函数 $y=-(5-2a)^{x}$ 是减函数. 若 p 或 q 为真命题，p 且 q 为假命题，则实数 a 的取值范围是________.

009. 已知集合 $A=\{(x, y) \mid ax+y=1\}$，$B=\{(x, y) \mid x+ay=1\}$，$C=\{(x, y) \mid x^{2}+y^{2}=1\}$，试问：

(1) 当 a 取何值时，$(A \cup B) \cap C$ 为含有两个元素的集合？

(2) 当 a 取何值时，$(A \cup B) \cap C$ 为含有三个元素的集合？

010. 已知三个集合 $E=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，$F=\{x \mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$G=\{x \mid x^2-bx+2=0\}$，同时满足 $F\subseteq E$，$G\subseteq E$ 的实数 a 和 b 是否存在？若存在，求出 a，b 所有值的集合；若不存在，请说明理由.

011. 集合 $A=\{x \mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x \mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x \mid x^2+2x-8=0\}$，求 a 的值，使 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$，且 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立.

012. 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根 α、β，
证明：$|\alpha|<2$ 且 $|\beta|<2$ 是 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$ 的充要条件.

专题二 函数的图象与性质

解题策略

函数的图象与性质是高考考查的重点内容之一，它是研究和记忆函数性质的直观工具，利用它的直观性解题，可以起到化繁为简、化难为易的作用. 因此，考生要掌握绘制函数图象的一般方法，掌握函数图象变化的一般规律，能利用函数的图象研究函数的性质. 函数的图象是函数关系的一种表示，它是从“形”的方面显示了函数的性质，刻画了函数的变化规律，为研究数量关系问题提供了“形”的直观性，它是探求解题途径，获得问题结果的重要工具. 高考中总是以几种基本初等函数的图象为基础来考查函数图象的. 每年的高考都有很多小题都可用图象（数形结合）来解决. 可以说函数的图象是解决高中数学问题的法宝之一.

函数是数学高考考查的核心，而函数性质是考查的重点.《考试大纲》要求：理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象. 函数性质还包括函数的正负性、周期性等，函数性质着眼于函数的变化规律，内容丰富、应用广泛，是在知识网络交汇点上命题的重要取材渠道，在历年高考中无一次遗漏，所占比例居高不下，在今后的高考命题中，可以肯定地说，会常盛不衰.

1 熟练掌握常见函数的图象与性质

(1) $y=|x+a|$；(2) $y=|ax+b|\pm|cx+d|\ (ac\neq 0)$；(3) $y=|ax^2+bx+c|\ (a\neq 0)$；(4) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0)$（由反比例函数图象平移得到的）；(5) $y=x+\dfrac{a}{x}\ (a\neq 0)$；(6) $y=a^{|x|}\ (a>0,\ a\neq 1)$；(7) $y=|\log_a x|\ (a>0,\ a\neq 1)$；(8) $y=\log_a|x|\ (a>0,\ a\neq 1)$；(9) $y=|\sin x|$；(10) $y=\sin|x|$；(11) $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ 等.

例 1 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图2-1，则（ ）.

A. $b\in(-\infty,\ 0)$　　B. $b\in(0,\ 1)$

C. $b\in(1,\ 2)$　　D. $b\in(2,\ +\infty)$

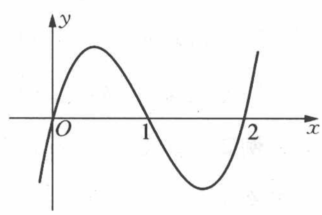


图 2-1

解一： 观察 $f(x)$ 的图象，可知函数 $f(x)$ 的图象过原点，即 $f(0)=0$，得 $d=0$，

又 $f(x)$ 的图象过 $(1,\ 0)$，所以 $f(1)=a+b+c=0$，　①

又有 $f(-1)<0$，即 $-a+b-c<0$，　②

①+②，得 $b<0$，故 b 的范围是 $(-\infty,\ 0)$，故选 A.

解二： 如图，$f(x)=0$ 有三个根 0，1，2，

所以 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=ax(x-1)(x-2)=ax^3-3ax^2+2ax$，

所以 $b=-3a$，

因为当 $x>2$ 时，$f(x)>0$，从而有 $a>0$，所以 $b<0$.

点评： 把握三次函数的零点式.

2 掌握常见的函数图象变换

(1) 平移变换：事实上，令点(x_0, y_0)是$y=f(x)$的图象上任一点，点(x_0, y_0)向右平移a个单位得点(x, y)，则$\begin{cases}x=x_0+a,\\ y=y_0,\end{cases}$有$\begin{cases}x_0=x-a,\\ y_0=y,\end{cases}$代入$y_0=f(x_0)$，得$y=f(x-a)$. 于是，把函数$y=f(x)$的图象向右平移$a$个单位，得到的图象的解析式是$y=f(x-a)$（即以$x-a$代换$x$）.

把函数$y=f(x)$的图象向右、向上分别平移a、b个单位$(a>0, b>0)$，得到的图象的解析式是$y-b=f(x-a)$（即分别以$x-a$，$y-b$代换x，y）. 当$a<0$时，表示向左平移，当$b<0$时，表示向下平移.

例2 函数$y=f(2x-1)$是偶函数，则函数$y=f(2x)$的对称轴是（　　）.

A. $x=0$　　B. $x=-1$　　C. $x=\dfrac{1}{2}$　　D. $x=-\dfrac{1}{2}$

解：因为函数$y=f(2x-1)$是偶函数，所以其对称轴为直线$x=0$，以$x-a$代换x，有$y=f[2(x-a)-1]$，令$2(x-a)-1=2x$，解得$a=-\dfrac{1}{2}$，故函数$y=f(2x-1)$的图象向左平移$\dfrac{1}{2}$个单位，得到函数$y=f(2x)$的图象，其对称轴$x=0$也相应地向左平移了$\dfrac{1}{2}$个单位，故选D.

(2) 伸缩变换：事实上，令点(x_0, y_0)是$y=f(x)$的图象上任一点，点(x_0, y_0)的横坐标伸长到原来的k倍得点(x, y)，则$\begin{cases}x=kx_0,\\ y=y_0,\end{cases}$有$\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{k}x,\\ y_0=y,\end{cases}$代入$y_0=f(x_0)$，得$y=f\left(\dfrac{1}{k}x\right)$.

于是，设把函数$y=f(x)$的图象的横坐标伸长到原来的$k(k>0)$倍（纵坐标不变），得到的图象的解析式是$y=f\left(\dfrac{1}{k}x\right)$（即以$\dfrac{1}{k}x$代换$x$）.

把函数$y=f(x)$的图象的横坐标与纵坐标分别伸长到原来的k，$l(k, l>0)$倍，得到的图象的解析式是$\dfrac{1}{l}y=f\left(\dfrac{1}{k}x\right)$（即分别以$\dfrac{1}{k}x$，$\dfrac{1}{l}y$代换$x$，$y$）.

我们定义：当k，$l>1$时，表示伸长；当$0<k$，$l<1$时，表示缩短.

例3 函数$y=\sin x$的图象，经过怎样的平移和伸缩变换得到函数$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4$的图象？

解一：（先平移后伸缩）在$y=\sin x$中，以$x-a$，$y-b$分别代换x，y，有$y-b=\sin(x-a)$，再以$\dfrac{1}{k}x$代换x，有$y-b=\sin\left(\dfrac{1}{k}x-a\right)$，即$y=\sin\left(\dfrac{1}{k}x-a\right)+b$. 对比有$\begin{cases}\dfrac{1}{k}x-a=2x+\dfrac{\pi}{6},\\ b=4,\end{cases}$得$a=-\dfrac{\pi}{6}$，$k=\dfrac{1}{2}$，$b=4$.

即把函数$y=\sin x$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位，再向上平移4个单位，后将横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$倍（纵坐标不变），可得函数$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4$的图象.

解二：（先伸缩后平移）在$y=\sin x$中，以$\dfrac{1}{k}x$代换x，有$y=\sin\dfrac{1}{k}x$，再以$x-a$，$y-b$分

别代换 x, y,得 $y-b=\sin\frac{1}{k}(x-a)$,即 $y=\sin\frac{1}{k}(x-a)+b$,于是 $\begin{cases}\frac{1}{k}(x-a)=2x+\frac{\pi}{6},\\ b=4,\end{cases}$

得 $\frac{1}{k}=2$, $-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{6}$, $b=4$,所以 $k=\frac{1}{2}$, $a=-\frac{\pi}{12}$, $b=4$.

即把函数 $y=\sin x$ 的图象横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变),再向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位,后向上平移 4 个单位,可得函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4$ 的图象.

(3) 对称变换:

① 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称;

② 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=-f(x)$ 的图象关于 x 轴对称;

③ 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=-f(-x)$ 的图象关于原点中心对称;

④ 函数 $y=|f(x)|$ 的图象可将 $y=f(x)$ 的图象在 x 轴下方的部分以 x 轴为对称轴翻折到 x 轴上方,其余部分不变.

3 函数的周期性

若函数 $f(x)$满足:$f(x+a)=f(x-a)$ $(a\neq 0)$,则 $2a$ 是函数 $f(x)$的一个周期. 注意:不要和对称性相混淆. 若函数 $f(x)$满足:$f(a+x)=-f(x)$ $(a\neq 0)$,则 $2a$ 是函数 $f(x)$的一个周期. 类似的条件还有 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$, $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$ 等.

例 4 已知函数 $y=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x+1)=f(x-1)$,且当 $x\in[-1,1]$ 时,$f(x)=x^2$,则 $y=f(x)$ 与 $y=\log_5 x$ 的图象的交点个数为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

解:由 $f(x+1)=f(x-1)$,知函数 $y=f(x)$ 的一个周期为 2,作出其图象(图 2-2),当 $x=5$ 时,$f(x)=1$, $\log_5 x=1$;当 $x>5$ 时,$0\leqslant f(x)\leqslant 1$, $\log_5 x>1$, $y=f(x)$ 与 $y=\log_5 x$ 的图象不再有交点,故选 C.

点评:本题的关键是函数 $y=\log_5 x$ 的图象过点(1, 0)和点(5, 1).

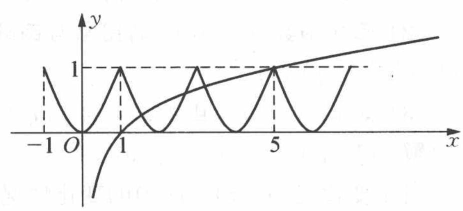


图 2-2

4 函数的单调性

判断函数的单调性可用有关单调性的性质(如复合函数单调性的"同增异减"法则),证明函数单调性一般用定义或导数,用定义证明函数单调性的关键步骤往往是因式分解. 了解单调性定义的变形:对区间$[a, b]$内的任意不同实数 x, y,都有 $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$,则函数 $f(x)$ 在$[a, b]$内单调递增(小于 0 则单调递减).

例 5 证明函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 在区间$(0, \sqrt{a}]$上单调递减,在区间$[\sqrt{a}, +\infty)$上单调递增.

证一(定义证明):设 $0<x_1<x_2\leqslant\sqrt{a}$,则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2+\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}=(x_1-x_2)\left(1-\frac{a}{x_1x_2}\right)$,

因为 $0<x_1<x_1\leqslant\sqrt{a}$，所以 $0<x_1x_2<a$，$\dfrac{a}{x_1x_2}>1$，

所以 $(x_1-x_2)\left(1-\dfrac{a}{x_1x_2}\right)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以函数 $y=x+\dfrac{a}{x}\ (a>0)$ 在 $(0,\sqrt{a}]$ 上单调递减.

在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增的证明留给读者自己完成.

证二（利用导数）：$f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}$，若 $x\in(0,\sqrt{a})$，则 $\dfrac{a}{x^2}>1$，$f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a}]$ 上单调递减. 若 $x\in(\sqrt{a},+\infty)$，则 $\dfrac{a}{x^2}<1$，$f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增.

点评：记住并会证明函数 $y=x+\dfrac{a}{x}\ (a>0)$ 的单调性.

5 函数的对称性

偶函数图象关于 y 轴对称，推广：函数 $f(x)$ 对定义域内的任意 x 都有 $f(a-x)=f(a+x)\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称；再推广：函数 $f(x)$ 对定义域内的任意 x 都有 $f(a+x)=f(b-x)\Leftrightarrow f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称. 奇函数图象关于原点对称，推广：函数 $f(x)$ 对定义域内的任意 x 都有 $f(a-x)=-f(a+x)\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 对称. 注意：两个函数图象之间的对称问题不同于函数自身的对称问题. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 的对称曲线是函数 $y=f(2a-x)$ 的图象，函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 的对称曲线是函数 $y=-f(2a-x)$ 的图象.

例 6 （2010 · 天津）已知函数 $f(x)=xe^{-x}(x\in\mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2) 已知函数 $y=g(x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，证明当 $x>1$ 时，$f(x)>g(x)$；

(3) 如果 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明 $x_1+x_2>2$.

解：(1) $f'(x)=(1-x)e^{-x}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内是增函数，在 $(1,+\infty)$ 内是减函数.

因此，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)$，且 $f(1)=\dfrac{1}{e}$.

证明：(2) 由题意，可知 $g(x)=f(2-x)$，得 $g(x)=(2-x)e^{x-2}$.

令 $F(x)=f(x)-g(x)$，即 $F(x)=xe^{-x}+(x-2)e^{x-2}$，

于是 $F'(x)=(x-1)(e^{2x-2}-1)e^{-x}$，

当 $x>1$ 时，$2x-2>0$，从而 $e^{2x-2}-1>0$，又 $e^{-x}>0$，所以 $F'(x)>0$.

从而 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 是增函数.

所以 $F(x)>F(1)=0$，即 $f(x)>g(x)$.

(3) 若 $(x_1-1)(x_2-1)=0$，由(1)及 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $x_1=x_2=1$，与 $x_1\neq x_2$ 矛盾. 若 $(x_1-1)(x_2-1)>0$，由(1)及 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $x_1=x_2$，与 $x_1\neq x_2$ 矛盾.

根据(1)(2)，得 $(x_1-1)(x_2-1)<0$，不妨设 $x_1<1$，$x_2>1$.

由(2)可知，$f(x_2)>g(x_2)$ 及 $g(x_2)=f(2-x_2)$，所以 $f(x_2)>f(2-x_2)$，从而 $f(x_1)>f(2-x_2)$. 因为 $x_2>1$，所以 $2-x_2<1$，又由(1)可知函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 内是增函数，所以 $x_1>2-x_2$，即 $x_1+x_2>2$.

点评：关键是利用函数的对称关系准确地求出函数 $g(x)$ 的解析式.

过关演练

013. 如图 2-3，一质点 $P(x, y)$ 在 xOy 平面上沿曲线运动，速度大小不变，其在 x 轴上的投影点 $Q(x, 0)$ 的运动速度 $V=V(t)$ 的图象大致为(　　).

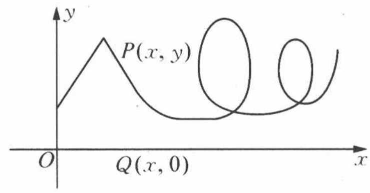
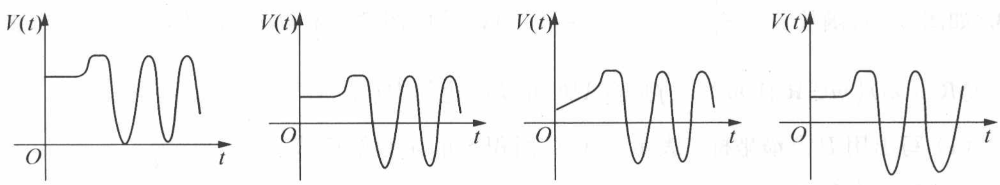


图 2-3



A.　　B.　　C.　　D.

014. 要得到函数 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，只需要将函数 $y=\sin 2x$ 的图象(　　).

A. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

015. 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(1+x)f(x)$，则 $f\left(\frac{5}{2}\right)$ 的值是(　　).

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{5}{2}$

016. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数，则(　　).

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(x)$ 是奇函数

C. $f(x)=f(x+2)$　　D. $f(x+3)$ 是奇函数

017. 设函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}\ (a<0)$ 的定义域为 D，若所有点 $(s, f(t))(s, t\in D)$ 构成一个正方形区域，则 a 的值为(　　).

A. -2　　B. -4　　C. -8　　D. 不能确定

018. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$，满足 $f(x-4)=-f(x)$，且在区间 $[0, 2]$ 上是增函数，若方程 $f(x)=m(m>0)$ 在区间 $[-8, 8]$ 上有四个不同的根 x_1, x_2, x_3, x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$________.

019. 若函数 $f(x)=a^x-x-a(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是________.

020. 设函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的图象为 C_1，C_1 关于点 $A(2,1)$ 对称的图象为 C_2，C_2 对应的函数为 $g(x)$，则 $g(x)$ 的解析式是________.

021. 已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)$，将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位，再将图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变)，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的最大值为________.

022. 函数 $y=3\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，经过怎样的变换得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象？

023. 如图 2－4，函数 $y=\frac{3}{2}|x|$ 在 $x\in[-1,1]$ 的图象上有两点 A、B，$AB\parallel Ox$ 轴，点 $M(1,m)\left(m\in\mathbf{R}\text{ 且 } m>\frac{3}{2}\right)$ 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边的中点.

(1) 写出用 B 点横坐标 t 表示 $\triangle ABC$ 面积 S 的函数解析式 $S=f(t)$；

(2) 求函数 $S=f(t)$ 的最大值，并求出相应的 C 点坐标.

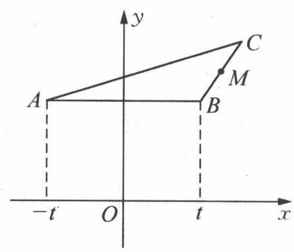


图 2－4

024. 如图 2－5，点 A、B、C 都在函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象上，它们的横坐标分别是 a、$a+1$、$a+2$. 又 A、B、C 在 x 轴上的射影分别是 A'、B'、C'，记 $\triangle AB'C$ 的面积为 $f(a)$，$\triangle A'BC'$ 的面积为 $g(a)$.

(1) 求函数 $f(a)$ 和 $g(a)$ 的表达式；

(2) 比较 $f(a)$ 与 $g(a)$ 的大小，并证明你的结论.

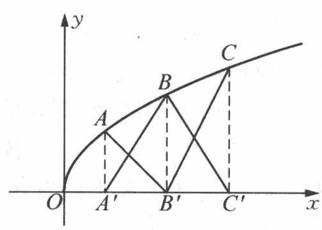


图 2－5