无穷维随机动力系统的动力学

黄建华　郑　言　著

科学出版社

内 容 简 介

本书主要介绍几类重要的随机偏微分方程及其随机动力系统的动力学研究成果.通过对高斯噪声、分数布朗运动和 Lévy 过程驱动随机偏微分方程的随机吸引子及其 Hausdorff 维数估计、随机稳定性、随机惯性流形、大偏差原理、不变测度和遍历性,以及非一致双曲系统的随机稳定性等的研究,系统地介绍了无穷维随机动力系统动力学的研究方法和作者近期的研究成果.

本书可供高等院校数学专业高年级本科生、研究生、教师以及相关领域的科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

无穷维随机动力系统的动力学/黄建华,郑言著. 一北京:科学出版社,2011
ISBN 978-7-03-030262-5

Ⅰ. 无… Ⅱ. ①黄…②郑… Ⅲ. 无限维一动力系统(数学) Ⅳ. ①019

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 021947 号

责任编辑:赵彦超/责任校对:林青梅
责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 2 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2011 年 2 月第一次印刷 印张:17
印数:1—2 500 字数:330 000

定价:58.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

最近十多年来，在流体力学、等离子体物理、非线性光学以及分子生物学等诸多领域的非线性波在随机介质、外力压力湍流和白噪声扰动中传播，形成了更符合实际的具有不同于确定系统的新现象和新特征. 例如，噪声影响了孤立子的形状和传播速度，也在某些条件下，延缓或防止了“爆破”现象的发生. 在一定条件下，随机干扰对动力系统建立“有序性”起到了十分积极的作用，人们也在利用随机因素来控制系统. 例如，在耗散系统中增大噪声的强度能引起系统的相变使之趋向于平衡态. 在数学理论上，对随机非线性发展方程的整体解的存在唯一性，必须建立更为细致也更加复杂的新的估计，对其无穷维动力系统行为，如整体吸引子的存在性、维数估计、惯性流形的存在性及其稳定性等提出了不同的条件和要求，出现了更为复杂的新的情况，在理论上必须重新加以建立. 目前，关于这方面的研究尚处在初级和发展阶段.

随机动力系统的研究目前已经是国际动力系统领域专家研究的热点和前沿课题，属核心数学研究领域. 国际上关于随机动力系统动力学研究始于 20 世纪 90 年代，德国的 Ludwig Arnold 领导的 Bremen 课题小组历经 10 年的研究，从随机方程入手发展了随机动力系统的基本理论，并完善了有限维随机动力系统的线性理论，1998 年出版了奠基性的专著《随机动力系统》，引起了动力系统领域和随机分析领域的极大关注，人们开始利用随机动力系统的框架来研究随机非线性发展方程解的长期性态，并成功地应用到很多领域中. 20 世纪 90 年代，Flandoli, Crauel, Schmalfuss 等建立了随机无穷维动力系统的基本概念和框架，并对 Burgers 方程、NS 方程、非线性波方程、非线性扩散方程等证明了随机整体吸引子的存在性等. 关于无穷维随机动力系统的动力学研究，目前主要有：英国 Warwick 大学的 James Robinson 领导的研究小组、西班牙的 Caraballo 等领导的研究小组、德国的 Crauel 以及意大利的 Flandoli 为代表的研究团队、俄罗斯数学家 Igor Chueshov 关于单调随机动力系统的研究工作; 美国 Illinois 理工学院的段金桥及其合作者关于具有随机动力学边界条件的随机吸引子的研究工作, Illinois 理工学院的周修义和 Auburn 大学的沈文仙关于随机旋转数和随机噪声诱导单调性的研究工作, 美国 Brown 大学的 Rozovskii、美国新墨西哥州矿业科技学院的王碧祥、英国 York 大学的Brzezniak 及其合作者黎育红等关于无界区域上随机发展方程和部分耗散系统的随机吸引子的研究工作, 杨伯翰大学的吕克宁和 Illinois 理工学院的段金桥关于随机动力系统的不变流形的研究工作. 这些研究工作极大地丰富了无穷维随机动力系统的基本理

论, 需要指出的是, 他们的研究工作都是考虑由高斯白噪声驱动的发展方程的动力学性态, 而关于分数布朗运动驱动和非高斯 Lévy 过程驱动随机偏微分方程的解的动力学性态研究较少.

随机动力系统遍历理论的前沿课题是动力系统的随机稳定性研究. 粗略地讲, 动力系统的随机稳定性研究主要确定动力系统和它扰动后所形成的一系列随机动力系统, 以及确定它们的相关遍历性质是否随着扰动的减小而趋于一致. 国际上关于动力系统的随机稳定性研究始于 20 世纪 80 年代, 以色列数学家 Kifer 利用当时先进的随机分析技巧研究了双曲动力系统、一致扩张系统. 随后不久, 法国数学家 Keller 用 Ruelle 算子处理随机分片扩张系统并获得了成功. 他们的研究使当时尚处于模糊状态的随机稳定性概念清晰起来, 弱随机稳定性、强随机稳定性、混合率的健壮性等问题先后得到广泛关注. 国际上关于动力系统的随机稳定性的研究主要有三个学派: 第一个学派采用的是随机分析的办法, 通过对随机动力系统所对应的 Markov 过程的转移概率进行估计来证明弱随机稳定性; 第二个学派采用的是泛函中的扰动办法, 通过考虑转移算子的扰动把谱的稳定性问题和强随机稳定性、混合率的健壮性等问题联系起来, Keller 和 Baladi 关于分片扩张映射的文章被认为是这一方法的标志性文章; 最后一个学派采用的是遍历论的办法, 通过熵扩张等工具来估计随机动力系统的不变测度的聚点是否满足熵公式.

国内随机动力系统的研究是近几年才开始的, 2004 年 3 月 1 日—4 月 15 日, 在中国科学院数学与系统科学研究院晨兴数学研究中心举办了第一次"非自治和随机动力系统"高级研讨班. 后来郭柏灵院士领导的课题组在 Bourgain 空间中研究随机数学物理方程的动力学性态, 以及大气、海洋中的随机演化方程解的渐近行为. 中国科学院数学与系统科学研究院、北京大学、南京大学、四川大学、吉林大学、南京师范大学、上海大学、上海师范大学等的课题研究小组开展对随机动力系统的几何理论研究, 取得一些很好的研究工作, 并指导博士生从事随机动力系统的研究.

本书总结了作者及其合作者近年来在无穷维随机动力系统的动力学方面的研究工作, 主要涉及非光滑区域、初值非光滑、动力学边界条件的随机抛物方程的随机吸引子; 部分耗散系统的随机吸引子及其遍历性; 随机时滞抛物和时滞波方程的随机吸引子与惯性流形等; 分数布朗运动驱动的非牛顿流模型的随机动力学; Lévy 过程驱动的随机 Boussinesq 方程的遍历性及大偏差原理, 最后研究了非一致双曲系统的随机稳定性.

郭柏灵院士、李继彬教授、蒋继发教授和段金桥教授对本书的写作给予了极大的鼓励和支持, 科学出版社的责任编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动, 在此表示深深的感谢. 在本书的撰写过程中, 黎育红副教授、王伟副教授、柳振鑫副教授和黄代文副研究员提供了很多参考文献, 为本书的顺利完成提供很多帮助, 在此表示感谢.

本书的出版得到了国防科技大学学术著作出版基金和数学学科建设基金的资助, 本书的研究成果得到了国家自然科学基金 (No: 10571175, No: 10971225)、天元基金 (No: 10926096)、留学回国科研启动基金以及国防科技大学基础研究基金 (No: JC0802) 的资助, 在此一并表示感谢.

限于作者的水平, 书中难免存在不妥之处, 恳请读者批评指正.

作　者

2010 年 8 月

目　　录

第 1 章　几类随机抛物方程的随机吸引子

整体吸引子在研究非线性发展方程的渐近性态中起着重要的作用. 粗略地说, 自治发展方程的整体吸引子是某一函数空间中吸引所有有界集的连通紧集. 关于自治发展方程整体吸引子的论文很多, 参阅文献 [1, 5, 21, 22, 25, 28]. 将自治方程整体吸引子的概念推广到非自治、随机偏微分方程的情形, 就是所谓的拉回吸引子. 关于各类非自治随机发展方程的拉回吸引子的研究论文很多, 参阅文献 [6—8, 12, 26, 27, 29]. 这一章研究随机非线性抛物方程在非光滑区域上、初值非光滑以及非牛顿-Boussinesq 修正方程动力学边界条件下随机吸引子的存在性.

1.1　随机动力系统

设 (X,d) 为完备的可分度量空间, $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 为一概率空间.

定义1.1.1　如果映射 $\theta_t:[R\times\Omega\ni(t,\omega)\mapsto\theta_t\omega\in\Omega]$ 是 $(\mathfrak{B}(R)\times\mathfrak{F},\mathfrak{F})$ 可测的, $\theta_0=Id$, $\theta_{s+t}=\theta_s\circ\theta_t$, 其中 $t,s\in R$, 且对任意的 $E\in\mathfrak{F}$, $\theta_tP=P$ (即 $P(\theta_tE)=P(E)$), 则称 $(\Omega,\mathfrak{F},P,(\theta_t)_{t\in R})$ 为可测的度量动力系统.

定义1.1.2　(1) 设 (X,d) 是 Polish 空间 (具有可数基的局部紧的 Hausdorff 空间), $\mathfrak{F}$ 是 σ 代数, θ 是 $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 对应的保测变换, $(\Omega,\mathfrak{F},P,\{\theta_t\}_{t\in R})$ 是度量动力系统, 如果可测映射

$$\Phi:R^+\times X\times\Omega\to X\times\Omega,\Phi(t,x,\omega)=(S(t,x,\omega),\theta_t\omega)$$

在 X 上 P.a.s. 满足:

(i) $S(0,\omega)=id$ (即 X 上的恒同映射);

(ii) 对任意的 $s,t\in R^+$ 及 $\omega\in\Omega$, $S(t+s,\omega)=S(t,\theta_s\omega)\circ S(s,\omega)$.

则称 Φ 为 θ 驱动的可测随机动力系统(RDS).

(2) 若 X 为一拓扑空间, 可测随机动力系统 Φ 满足: 对任意的 $(t,\omega)\in R^+\times\Omega$,

$$S(t,\omega):X\longmapsto X \text{ 是连续的},$$

则称 Φ 为 θ 驱动的连续随机动力系统.

(3) 若 X 为一光滑流形, 连续随机动力系统 Φ 满足: 如果对某个 $k,1\leqslant k\leqslant\infty$, 对任意的 $(t,\omega)\in R^+\times\Omega$,

$$S(t,\omega):X\longmapsto X \text{ 是 } C^k \text{ 的},$$

则称 Φ 为 θ 驱动的 C^k 随机动力系统.

定义1.1.3 设 $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 是一概率空间, (X,d) 是 Polish 空间, 集值映射 $K:\Omega\to 2^X$(2^X 表示 X 中的所有子集组成的集合), 如果对任意的 $x\in X$, 映射 $\omega\to d(x,K(\omega))$ 关于 $\mathfrak{F}$ 可测, 则称 $K(\omega)$ 为随机集, 其中 $d(x,M)=\inf_{y\in M}d(x,y)$. 如果对每个 $\omega\in\Omega$, $K(\omega)$ 是闭的, 则称 $K(\omega)$ 是随机闭集. 如果对每个 $\omega\in\Omega$, $K(\omega)$ 都是紧集, 则称 $K(\omega)$ 是随机紧集, 一个随机集 $\{K(\omega)\}$ 称为是有界的, 如果存在 $x_0\in X$ 及随机变量 $r(\omega)>0$, 使得对所有的 $\omega\in\Omega$,

$$K(\omega)\subset\{x\in X:\ d(x,x_0)\leqslant r(\omega)\}.$$

定义1.1.4 (1) 称 X 的非空子集簇 $\{K(\omega)|\omega\in\Omega\}$ 是拉回吸引的, 如果对任意的 $\omega\in\Omega$ 及 X 中的任意子集 $B\subset X$, 满足

$$d(S(t,\theta_{-t}\omega)B,K(\omega))\to 0,\quad t\to\infty.$$

称 $\{K(\omega)|\omega\in\Omega\}$ 为 X 的拉回吸引子集簇, 如果它是拉回吸引的.

(2) 称 X 的非空子集簇 $\{K(\omega)|\omega\in\Omega\}$ 是拉回吸收的, 如果对任意的 $\omega\in\Omega$ 及 X 中的任意子集 $B\subset X$, 都存在实数 $T(\omega,B)>0$, 使得当 $t\geqslant T(\omega,B)$ 时,

$$S(t,\theta_{-t}\omega)B\subset K(\omega).$$

称 $\{K(\omega)|\omega\in\Omega\}$ 为 X 的拉回吸收子集簇, 如果它是拉回吸收的, $T(\omega,B)$ 为吸收时刻.

(3) 称 X 的非空子集簇 $\{K(\omega)|\omega\in\Omega\}$ 是紧的, 如果对任意的 $\omega\in\Omega$, $K(\omega)$ 是紧的.

(4) 称 X 的非空子集簇 $\{K(\omega)|\omega\in\Omega\}$ 是可测的 (关于 $\mathfrak{F}$ 的完备化空间是可测的), 如果对任意的 $x\in X$, 映射 $[\Omega\ni\omega\mapsto d_X(x,K(\omega))\in R^+]$ 是关于 $\mathfrak{F}$ 可测 (是指关于 $\mathfrak{F}$ 的完备化空间可测).

定义1.1.5 设 $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 是概率空间, (X,d) 是 Polish 空间, Φ 是随机动力系统, X 的非空子集簇 $\{A(\omega)|\omega\in\Omega\}$ 称为 Φ 的随机吸引子 (也称随机拉回吸引子), 如果 $A(\omega)$ 是随机紧集, 吸引 X 中所有确定的集合, 并且是不变的, 即对所有 $t>0$ 和 $\omega\in\Omega$, $\Phi(t,\omega)A(\omega)=A(\theta_t\omega)$.

定理1.1.1[8] 设 Φ 是定义在 X 上 θ_t 驱动的随机动力系统, 如果存在一个随机紧集, 吸引 X 中的任意有界集, 则随机动力系统 Φ 存在随机吸引子 $\mathcal{A}(\omega)$, 且

$$\mathcal{A}(\omega)=\overline{\bigcup_{B\subset X}\Lambda_B(\omega)},$$

且 $\mathcal{A}(\omega)$ 是可测的, 如果 X 是连通的, 则 P.a.s, $\mathcal{A}(\omega)$ 是连通的, 其中 $\Lambda_B(\omega)=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}\Phi(t,\theta_t\omega)B}$ 是 B 的 ω 极限集.

附注 由随机吸引子的定义可知, 整体随机吸引子是唯一的. 在实际应用中, 通常把初始时刻移到 $-\infty$, 对固定的 $\omega\in\Omega$, 考虑 $t=0$ 时刻的值即可.

假设空间 X 是一个 Hilbert 空间, $\{S(t,\omega)\}$ 是空间 X 上关于度量动力系统 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(\theta_t)_{t\in R})$ 的一个随机动力系统. 假设 $A(\cdot):\Omega\to 2^X\setminus\{\varnothing\}$ 是随机动力系统 $\{S(t,\omega)\}$ 的随机吸引子.

定义1.1.6 给定 $\omega\in\Omega$, 称 $d(\omega)\in[0,\infty]$ 是随机吸引子 $A(\omega)$ 的 Hausdroff 维数, 如果

$$\begin{cases}\mu_H(A(\omega),d)=0, & \forall d>d(\omega),\\ \mu_H(A(\omega),d)=\infty, & \forall d<d(\omega),\end{cases}$$

其中

$$\mu_H(A(\omega),d)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_H(A(\omega),d,\varepsilon),$$
$$\mu_H(A(\omega),d,\varepsilon)=\inf\sum_{i\in I}r_i^d,$$

这里的下确界是关于 $A(\omega)$ 的所有的 X 中的 $(B_i)_{i\in I}$ 覆盖取的, 其中 $r_i\leqslant\varepsilon$.

对每个 $\omega\in\Omega$, 记

$$S(\omega)=S(1,\omega).$$

则对每个 $x\in X$, 映射 $[\Omega\ni\omega\mapsto S(\omega)x]$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B}(X))$ 可测的, 称 $S(\cdot)$ 是 X 上的随机映射.

定义1.1.7 称一个随机映射 $S(\cdot)$ 在 $\{A(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 上是一致可微的, 如果存在一个常数 $\mu>0$ 和一个随机变量 $\bar{M}:\Omega\to R$, 对于任意的 $\omega\in\Omega$ 及任意的 $x\in A(\omega)$, 存在一个线性算子 $L(x,\omega):X\to X$ 使得

$$\bar{M}(\omega)\geqslant 1,\quad \mathbb{E}(\ln\bar{M}(\omega))<\infty,$$

如果 $x+h\in A(\omega)$, 则

$$||S(\omega)(x+h)-S(\omega)x-L(x,\omega)h||_X\leqslant\bar{M}(\omega)||h||_X^{1+\mu}. \tag{1.1.1}$$

假设 $S(\cdot)$ 在 $\{A(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 上是一致可微的, 线性算子 $L(\cdot,\cdot)$ 满足方程 (1.1.1). 令

$$\lambda_n(L(x,\omega))=\sup_{G\subset X,\dim G=n}\ \inf_{y\in G,||y||_X=1}||L(x,\omega)y||_X \tag{1.1.2}$$

及

$$\gamma_n(L(x,\omega))=\lambda_1(L(x,\omega))\cdots\lambda_n(L(x,\omega)). \tag{1.1.3}$$

定理1.1.2[12] 假设 $S(\cdot)$ 在 $\{A(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 上是一致可微的, 线性算子 $L(\cdot,\cdot)$ 满足方程 (1.1.1). 进一步, 如果存在一个可积的随机变量 $\bar{\gamma}_d:\Omega\to(0,\infty)$, $d\in N$, 及随机变量 $\bar{\lambda}_1:\Omega\to(0,\infty)$, 使得对任意的 $\omega\in\Omega$ 及 $x\in A(\omega)$, 都满足

$$\gamma_d(L(x,\omega))\leqslant\bar{\gamma}_d(\omega),\quad \mathbb{E}(\ln(\bar{\gamma}_d))<0, \tag{1.1.4}$$

及

$$\lambda_1(L(x,\omega)) \leqslant \bar{\lambda}_1(\omega), \quad \bar{\lambda}_1(\omega) \geqslant 1, \quad \mathbb{E}(\ln(\bar{\lambda}_1)) < \infty. \tag{1.1.5}$$

那么, 随机吸引子 $A(\omega)$ 的 Hausdorff 维数不大于 d, 即对所有的 $\omega \in \Omega$, 都有 $d_H(A(\omega)) \leqslant d$ 成立.

1.2 非光滑区域上非自治抛物方程的拉回吸引子

这一节先研究一般的非自治抛物型偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(t,x)u\Big) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c_0(t,x)u + f(t,x,u), \quad x \in D, \\ \mathcal{B}(t)u = 0, \quad x \in \partial D, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

其中 $D \subset R^N$ 是有界的 Lipschitz 区域, $a_{ij}(\cdot,\cdot)$, $a_i(\cdot,\cdot)$, $b_i(\cdot,\cdot)$, $c_0(\cdot,\cdot) \in L_\infty(R \times \bar{D})$ $(i,j = 1,2,\cdots,N)$; $f(t,x,u)$ 关于 u 可微的, 关于 $(t,x,u) \in R \times \bar{D} \times R$ 是 Borel 可测的, 并且满足某些耗散性假设; $\mathcal{B}$ 是 Dirichlet (Neumann 或Robin) 边界算子, 即

$$\mathcal{B}(t)u = \begin{cases} u, & \text{(Dirichlet)} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(t,x)u\Big)\nu_i, & \text{(Neumann)} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(t,x)u\Big)\nu_i + d_0(t,x)u. & \text{(Robin)} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

$\nu = (\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_N)$ 表示边界 ∂D 上指向 D 的外侧的单位法线方向, 式 (1.2.2) 中的 $a_{ij}(\cdot,\cdot)$ 和 $a_i(\cdot,\cdot)$ $(i,j=1,2,\cdots,N)$ 与式 (1.2.1) 中的相同, $d_0(\cdot,\cdot) \in L_\infty(R\times\partial D)$.

下面将主要研究一般随机抛物方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\theta_t\omega,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(\theta_t\omega,x)u\Big) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} b_i(\theta_t\omega,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c_0(\theta_t\omega,x)u + f(\theta_t\omega,x,u), \quad x \in D, \\ \mathcal{B}(\theta_t\omega)u = 0, \quad x \in \partial D \end{cases} \tag{1.2.3}$$

的拉回吸引子, 其中 D 与 (1.2.1) 中的一致, $\omega \in \Omega$, $(P,\{\theta_t\}_{t\in R})$ 是一个度量动力系统, $a_{ij}(\cdot,\cdot)$, $a_i(\cdot,\cdot)$, $b_i(\cdot,\cdot)$ $(i,j = 1,\cdots,N)$, $c_0(\cdot,\cdot)$ 是 $(\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}(D), \mathfrak{B}(R))$ 可测; $f(\omega,x,u)$ 关于 u 可微, 关于 (ω,x,u) 是 $(\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}(D) \times \mathfrak{B}(R), \mathfrak{B}(R))$ 可测的, 并满足某

些耗散性假设条件. $\mathcal{B}$ 是 Dirichlet(Neumann 或 Robin) 边界算子) 即 $\mathcal{B}(\theta_t\omega)$ 是形如 (1.2.2) 中的 $\mathcal{B}(t)$ 算子, 其中 $a_{ij}(t,x) = a_{ij}^{\omega}(t,x) := a_{ij}(\theta_t\omega, x)$, $a_i(t,x) = a_i^{\omega}(t,x) := a_i(\theta_t\omega, x)$, $d_0(t,x) = d_0^{\omega}(t,x) := d_0(\theta_t\omega, x)$, $d_0(\cdot,\cdot)$ 是 $(\mathfrak{F}\times\mathfrak{B}(\partial D), \mathfrak{B}(R))$ 可测的.

对各种类型的非自治发展方程 (1.2.1) 和随机发展方程 (1.2.3) 的整体吸引子的研究很多[1,5,21,25−29]. 在研究这些非自治发展方程 (1.2.1) 和随机发展方程 (1.2.3) 解存在唯一性的文献中, 常用的两种方法是 Galerkin 近似方法和半群方法. Galerkin 近似方法常用来研究在某个 Hilbert 空间 (例如 $L_2(D)$) 中发展方程的解的性质, 而半群方法则用于某个 Banach 空间中的发展方程的解的性质. 例如, Marion 等[21] 研究了反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + g(x,u), \quad x\in D, \quad \mathcal{B}u = 0, \quad x\in\partial D \tag{1.2.4}$$

在 $L_2(D)$ 中的整体吸引子, 其中 $\mathcal{B}u = u$ 或者 $\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, $g(x,u)$ 关于 x 可测, 关于 u 是 C^1 的, 并且满足下面的假设条件:

(H0) 存在常数 $p>2, c_1>0, c_2>0, c_3\geqslant 0, c_4\geqslant 0$ 使得

$$-c_2|u|^p - c_3 \leqslant g(x,u)u \leqslant -c_1|u|^p + c_3, \qquad u\in R, \quad \text{a.e.} \quad x\in D,$$

$$\partial_u g(x,u) \leqslant c_4, \quad u\in R, \quad \text{a.e.} \quad x\in D,$$

其中 $\partial_u g$ 表示 g 关于 u 的偏导数. Marion 等[21] 利用 Galerkin 近似方法证明了对任意的初值函数 $u_0\in L_2(D)$, 方程(1.2.4) 存在唯一满足初值条件 $u(0;u_0) = u_0$ 的弱解 $u(t;u_0)$, 并且映射 $[R^+ \ni t \mapsto u(t;u_0) \in L_2(D)]$, $[L_2(D) \ni u_0 \mapsto u(t;u_0) \in L_2(D)]$ 是连续的, 方程 (1.2.4) 在 $L_2(D)$ 中存在整体吸引子 A, 而且当 $\mathcal{B}u = u$ ($\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial\nu}$ 时, A 在 $\mathring{W}_2^1(D)\cap L_p(D)$ ($W_2^1(D)\cap L_p(D)$) 中是有界的.

在文献 [26] 中, 作者在 $C(\bar{D})$ 中研究了下面的非自治抛物方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + g(t,x,u), & x\in D, \\ u = 0, & x\in\partial D \end{cases} \tag{1.2.5}$$

的拉回吸引子, 其中 g 满足适当的光滑性假设, 并且存在可积函数 $C(t,x)$ 及 $D(t,x)$ 满足

$$g(t,x,u)u \leqslant C(t,x)|u|^2 + D(t,x)|u|, \quad (t,x,u)\in R\times D\times R.$$

利用半群方法可以证明对任意的 $u_0\in C(\bar{D})$ 及 $s\in R$, 方程 (1.2.5) 存在唯一的 Mild 解 $u(t;s,u_0)$, 满足初值 $u(s;s,u_0) = u_0$, 且方程 (1.2.5) 在空间 $C(\bar{D})$ 中存在拉回吸引子.

尽管有很多论文研究了各种特殊形式的非自治发展方程和随机发展方程的整体吸引子, 但是, 对一般形式的非自治发展方程 (1.2.1) 和一般形式的随机发展

方程 (1.2.3) 的拉回整体吸引子的论文较少, 甚至关于一般形式的方程 (1.2.1) 和 (1.2.3) 解的基本性质的研究结论也很少. 因此, 这一节先研究一般的非自治发展方程 (1.2.1) 和随机发展方程 (1.2.3) 在 $L_q(D)\,(1<q<\infty)$ 中的解的动力学性质, 在适当的耗散条件下, 一般的非自治发展方程(1.2.1) 和随机发展方程 (1.2.3) 在 $L_q(D)$ $(1<q<\infty)$ 中存在拉回吸引子.

为了研究非光滑区域上一般非自治抛物方程的性质, 先把光滑区域上的线性抛物方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+a_i(t,x)u\right) \\ \qquad +\displaystyle\sum_{i=1}^{N}b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c_0(t,x)u, \quad x\in D, \\ \mathcal{B}(t)u=0, \quad x\in\partial D \end{cases} \tag{1.2.6}$$

解的基本性质推广到非光滑区域上的一般线性抛物方程的情形, 其中 $D, a_{ij}, a_i, b_i, c_0, d_0, \mathcal{B}(t)$ 的假设与 (1.2.1) 的假设相同, 也需要把光滑区域上的非线性抛物方程 (1.2.1) 的解的基本性质推广到非光滑区域上一般的非线性抛物方程解的基本性质. 由于非自治发展方程的形式很一般, 因此这种推广是非平凡的. 最近有很多关于非光滑区域上的一般线性抛物方程的性质研究, 参阅文献 [9—11, 16—18,23,24] 等.

可以证明, 如果 $u(t;s,u_0):=U_{a,p}(t,s)u_0$ 是方程 (1.2.6) 在 $L_p(D)$ 中的满足条件 $u(s;s,u_0)=u_0$ 的解, 则对任意的 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 方程 (1.2.6) 在 $L_p(D)$ 中可以生成解算子簇 $\{U_{a,p}(t,\ s)\}_{s\leqslant t}$, 并且 $U_{a,p}(t,s)$ 满足很多类似于由 Laplace 算子在光滑区域上的解析半群的性质. 对于非光滑区域上的一般的非线性抛物方程, 除了文献 [10] 的研究之外, 并没有更多的研究文献. 因此, 利用半群方法在空间 $L_q(D)$ 中研究一般的非自治抛物方程 (1.2.1), 证明其解的一些基本性质, 包括方程 (1.2.1) 的 Mild 解对初边值的连续依赖性、单调性和紧性等, 注意到, 随机方程 (1.2.3) 可以看作 $\omega\in\Omega$ 参数化的非自治方程簇. 方程 (1.2.1) 包含了周期抛物方程和概周期抛物方程, 并且一个随机抛物方程可以通过变换化成随机方程 (1.2.3) 的形式, 例如, 考虑下面的加性噪声驱动的随机抛物方程

$$dv=\Delta v dt+f(v)dt+dW(t), \quad x\in D, \tag{1.2.7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}=0, \quad x\in\partial D, \tag{1.2.8}$$

其中 $W(t)$ 是双边布朗运动.

$$\Omega=C_0(R,R)=\{\omega|\omega:R\to R\text{连续, 且}\,\omega(0)=0\},$$

并赋予紧开拓扑, 则 $\mathfrak{F}=\mathfrak{B}(\Omega)$ 是 Borel σ 代数, P 是 Ω 上的 Wiener 测度, $\theta_t:\Omega\to\Omega$, $\theta_t\omega(\cdot)=\omega(\cdot+t)-\omega(t)$. 则 $(P,(\theta_t)_{t\in R})$ 是一个遍历的度量动力系统. 令 $v^*:\Omega\to R$ 是

下面常微分方程

$$dv + vdt = dW$$

的稳态解过程. 令

$$v = u + v^*.$$

则 u 满足方程 (1.2.3) 的特殊形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u + v^*(\theta_t\omega)) + v^*(\theta_t\omega), & x \in \partial D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial D. \end{cases}$$

需要指出的是, 加性噪声驱动的随机抛物方程的拉回吸引子可能有比较简单的结构, 例如在几乎每个纤维上可能是单点集[6].

1.2.1 一般线性抛物方程

先研究

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(t,x)u\right) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c_0(t,x)u, \quad x \in D, \\ \mathcal{B}(t)u = 0, \qquad x \in \partial D, \end{cases} \tag{1.2.9}$$

其中 $D \subset R^N$ 为有界的 Lipschitz 区域, $\mathcal{B}$ 是 Dirichlet(Neumann或Robin) 边界算子, $((a_{ij})_{i,j=1}^N, (a_i)_{i=1}^N, (b_i)_{i=1}^N, c_0, d_0)$ 是系数容许空间 Y 中的满足一定条件的常数.

先给出后面常用的一般线性抛物方程 (1.2.9) 的基本性质, 这些性质可以看成是热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{1.2.10}$$

在具有 Dirichlet(Neumann 或 Robin) 边界条件的光滑区域上解的基本性质的推广[9,11,16–18,23,24].

下面先给出一些记号和基本假设:

$$a = ((a_{ij})_{i,j=1}^N, (a_i)_{i=1}^N, (b_i)_{i=1}^N, c_0, d_0),$$

其中 a_{ij}, a_i, b_i, c_0 是方程 (1.2.9) 的系数, d_0 是边界条件的系数.

对任意的 $a = ((a_{ij})_{i,j=1}^N, (a_i)_{i=1}^N, (b_i)_{i=1}^N, c_0, d_0)$ 及 $t \in R$, 可定义 a 的时间平移算子 $a \cdot t$:

$$a \cdot t := ((a_{ij} \cdot t)_{i,j=1}^N, (a_i \cdot t)_{i=1}^N, (b_i \cdot t)_{i=1}^N, c_0 \cdot t, d_0 \cdot t),$$

其中 $a_{ij} \cdot t(\tau, x) := a_{ij}(\tau + t, x)$, $s, \tau \in R$, $x \in D$ 等, 在不混淆的情况下, 简记 $a = (a_{ij}, a_i, b_i, c_0, d_0)$.

下面对方程 (1.2.9) 的容许系数类 Y 给出假设：

(L-1) Y 是 $L_\infty(R\times D, R^{N^2+2N+1})\times L_\infty(R\times\partial D, R)$ 的有界子集, 在弱 * 拓扑下是闭的 (因此是紧的) .

(L-2) Y 是平移不变的. 如果 $a\in Y$, 则 $a\cdot t\in Y$, $\forall t\in R$.

(L-3) $d_0=0$, 对任意 $a=((a_{ij})_{i,j=1}^N, (a_i)_{i=1}^N, (b_i)_{i=1}^N,\ c_0,\ d_0)\in Y$ (Dirichlet 或 Neumann 情形) 或 $d_0\geqslant 0$, 对任意的 $a=((a_{ij})_{i,j=1}^N, (a_i)_{i=1}^N, (b_i)_{i=1}^N,\ c_0,\ d_0)\in Y$ (Robin 情形).

在讨论空间 Y 中序列的收敛性到 Y 上映射的连续性时, 总是假设该空间赋予弱拓扑, 并按照弱拓扑收敛. 注意到 $[Y\times R\ni(a,t)\mapsto a\cdot t\in Y]$ 是连续的. 则对于 $t\in R$, 令 $\sigma_t\colon Y\to Y$ 为 $\sigma_t a := a\cdot t$. 则映射簇 $\sigma=\{\sigma_t\}_{t\in R}$ 在紧空间上是一个流.

(L-4) (一致椭圆性) 存在常数 $\alpha_0>0$ 使得对所有的 $a\in Y$, 总有

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t,x)\,\xi_i\,\xi_j \geqslant \alpha_0\sum_{i=1}^N \xi_i^2,\quad \text{a.e. } (t,x)\in R\times D,\ \forall\xi\in R^N,$$

$$a_{ij}(t,x)=a_{ji}(t,x),\quad \text{a.e. } (t,x)\in R\times D,\quad i,j=1,2,\cdots,N. \tag{1.2.11}$$

(L-5) (几乎处处收敛) (1) 在 Dirichlet (或 Neumann) 边界条件下, 对 Y 中任意收敛到 a 的序列 $(a^{(n)})$, 都有 $a_{ij}^{(n)}\to a_{ij}$, $a_i^{(n)}\to a_i$, $b_i^{(n)}\to b_i$ 在 $R\times D$ 上几乎逐点成立.

(2) 在 Robin 边界条件下, 对 Y 中任意收敛到 a 的序列 $(a^{(n)})$, 都有 $a_{ij}^{(n)}\to a_{ij}$, $a_i^{(n)}\to a_i$, $b_i^{(n)}\to b_i$ 在 $R\times D$ 上几乎逐点成立, 并且 $d_0^{(n)}\to d_0$ 在 $R\times\partial D$ 上几乎逐点成立.

注意到在假设 (L-5) 中, 没有对 c_0 做任何假设, 并且如果 a_{ij}, a_i, b_i 及 d_0 在各自定义域上都是局部 Hölder 连续的, 且 Hölder 指数是不依赖于 $a\in Y$ 的常数, 则 (L-5) 成立.

对于给定的 Banach 空间 X, 其范数记为 $\|\cdot\|_X$, 记 $L_p(D)$ 的范数为 $\|\cdot\|_{p,D}$ 或 $\|\cdot\|_p$, 记从 $L_p(D)$ 到 $L_q(D)$ 的线性有界算子空间 $\mathcal{L}(L_p(D), L_q(D))$ 为 $\|\cdot\|_{p,q}$. 在不混淆的情况下, 简记 $\|\cdot\|_{p,p}$ 为 $\|\cdot\|_p$, 或者 $\|\cdot\|$.

记 $W_2^1(D):=\{u\in L_2(D)|\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L_2(D),\ i=1,2,\cdots,N\}$. 定义空间 V 如下：

$$V:=\begin{cases}\mathring{W}_2^1(D), & \text{(Dirichlet)}\\ W_2^1(D), & \text{(Neumann)}\\ W_{2,2}^1(D,\partial D), & \text{(Robin)}\end{cases} \tag{1.2.12}$$

其中 $\mathring{W}_2^1(D)$ 是 $\mathcal{D}(D)$ 在 $W_2^1(D)$ 中的闭包, $W_{2,2}^1(D,\partial D)$ 是空间

$$V_0:=\{v\in W_2^1(D)\cap C(\bar{D})|v \text{ 在 } D \text{ 上是 } C^\infty \text{ 的, 且 } \|v\|_V<\infty\}$$

关于 $\|v\|_V := (\|\nabla v\|_2^2 + \|v\|_{2,\partial D}^2)^{1/2}$ 的完备化.

记 $\langle u, u^*\rangle$ 为空间 V 和 V^* 之间的对偶, 其中 $u \in V$, $u^* \in V^*$.

对于 $s \leqslant t$, 令

$$W = W(s,t;V,V^*) := \{ v \in L_2((s,t),V) | \dot{v} \in L_2((s,t),V^*) \}, \tag{1.2.13}$$

并赋予范数

$$\|v\|_W := \left(\int_s^t \|v(\tau)\|_V^2\, d\tau + \int_s^t \|\dot{v}(\tau)\|_{V^*}^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\dot{v} := dv/d\tau$ 是分布意义下取值于 V^* 的时间导数.

对于 $a \in Y$, 定义 V 上在 Dirichlet 边值条件和 Neumann 边值条件下关于 a 的双线性形式 $B_a = B_a(t,\cdot,\cdot)$ 如下:

$$\begin{aligned} B_a(t,u,v) := &\int_D (a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} u + a_i(t,x)u)\partial_{x_i} v dx \\ &- \int_D (b_i(t,x)\partial_{x_i} u + c_0(t,x)u)v\, dx, \quad u, v \in V, \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

在 Robin 边界条件下

$$\begin{aligned} B_a(t,u,v) := &\int_D (a_{ij}(t,x)\partial_{x_j} u + a_i(t,x)u)\partial_{x_i} v dx - \int_D (b_i(t,x)\partial_{x_i} u + c_0(t,x)u)v\, dx \\ &+ \int_{\partial D} d_0(t,x)uv\, dH_{N-1}, \quad u, v \in V, \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

其中 H_{N-1} 表示 $N-1$ 维 Hausdorff 测度.

对于给定的 $E, F \subset L_q(D)$, 定义

$$d_q(E,F) := \sup_{u\in E} \inf_{v\in F} \|u - v\|_q.$$

对于 $u_1, u_2 \in L_p(D)\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 定义

$$u_1 \leqslant u_2\,(u_1 \geqslant u_2), \quad u_1(x) \leqslant u_2(x)(u_1(x) \geqslant u_2(x)) \quad \text{a.e.} \quad x \in D.$$

定义空间

$$L_p(D)^+ := \{u \in L_p(D) | u \geqslant 0\}.$$

下面给出由一般线性抛物方程 (1.2.9) 的解定义的算子的基本性质.

定理1.2.1(解算子的存在性及 L_p-L_q 估计) *对任意的 $a \in Y$, 任意的 $s < t$, 及任意的 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 存在算子 $U_{a,p}(t,s) \in \mathcal{L}(L_p(D), L_p(D))$ 满足下面的性质:*

(1) $u(t;s,u_0) := U_{a,2}(t,s)u_0(u_0 \in L_2(D))$ 是方程 (1.2.9) 的弱解, 且满足初值条件 $u(s;s,u_0) = u_0$, 即对任意的 $v \in V$ 及 $\psi \in \mathcal{D}([s,t))$,

$$-\int_s^t \langle u(\tau), v\rangle\, \dot{\psi}(\tau)\, d\tau + \int_s^t B_a(\tau, u(\tau), v)\psi(\tau)\, d\tau - \langle u_0, v\rangle\, \psi(s) = 0, \tag{1.2.16}$$

其中$\mathcal{D}([s,t))$是在$[s,t)$ 上具有紧支集的所有光滑的实函数组成的函数空间;

(2) 对任意$a\in Y$, $q\geqslant p\geqslant 1$及$t>s$, $U_{a,p}(t,s)(L_p(D))\subset L_q(D)$, $U_{a,p}(t,s)|_{L_q(D)}=U_{a,q}(t,s)$;

(3) 对任意的$a\in Y$, $p\geqslant 1$及$t\geqslant \tau\geqslant s$, $U_{a,p}(t,\tau)\circ U_{a,p}(\tau,s)=U_{a,p}(t,s)$, $U_{a,p}(t,s)=U_{a\cdot s,p}(t-s,0)$;

(4) 对任意的$a\in Y$, $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, $t>s$, 存在常数$M>0$, $\gamma>0$使得下面结论成立:

$$\|U_{a,p}(t,s)\|_{p,q}\leqslant M(t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}e^{\gamma(t-s)}.$$

证明 (1) 参阅文献 [9, 定理2.4]. (2) 参阅文献 [10, 定理 5.1, 推论5.3]. (3) 由(1), (2) 及文献 [24, 命题 2.1.6, 2.1.7] 即可得证. (4) 参阅文献 [9, 推论 7.2]. □

记$U_{a,p}(t,s)=U_a(t,s)$. 则由定理 1.2.1(3) 可知, $U_a(t,s)=U_{a\cdot s}(t-s,0)$. 下面给出算子$U_a(t,0)$的基本性质.

定理1.2.2 算子$U_a(t,0)$具有下面性质:

(1) 对任意的$1<p<\infty$, $u_0\in L_p(D)$及$a\in Y$, 映射$[0,\infty)\ni t\mapsto U_a(t,0)u_0\in L_p(D)$ 是连续的;

(2) 令$1\leqslant p\leqslant q<\infty$, $a\in Y$. 则对任意的实数列$(t_n)_{n=1}^\infty$及任意序列$(u_n)_{n=1}^\infty\subset L_p(D)$, 如果$\lim_{n\to\infty}t_n=t$, $t>0$, 且在$L_p(D)$中满足$\lim_{n\to\infty}u_n=u_0$, 则在$L_q(D)$中, $U_a(t_n,0)u_n$收敛到$U_a(t,0)u_0$;

(3) 对任意序列$(a^{(n)})_{n=1}^\infty\subset Y$, 任意实数列$(t_n)_{n=1}^\infty$, $(u_n)_{n=1}^\infty\subset L_2(D)$, 如果$\lim_{n\to\infty}a^{(n)}=a$, $\lim_{n\to\infty}t_n=t$, $t>0$, 且在$L_2(D)$中, 有$\lim_{n\to\infty}u_n=u_0$成立, 则在$L_2(D)$中, $U_{a^{(n)}}(t_n,0)u_n$收敛到$U_a(t,0)u_0$.

证明 (1) 参阅文献 [9, 定理5.1, 推论 5.3] 或 [24, 命题 2.2.1]. (2) 参阅文献 [24, 命题 2.2.6]. (3) 参阅文献 [24, 命题 2.2.13] 及 [24, 定理 2.4.1]. □

定理1.2.3 设$1\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant q<\infty$. 则对任意给定的$0<t_1\leqslant t_2$, 如果E是$L_p(D)$中的一个有界子集, 则$\{U_a(\tau,0)u_0|a\in Y,\tau\in[t_1,t_2],u_0\in E\}$在$L_q(D)$ 中是相对紧的.

证明 参阅文献 [24, 命题 2.2.5]. □

定理1.2.4 设$a\in Y$, $t>0$, $u_1,u_2\in L_p(D)$.

(1) 如果$u_1\leqslant u_2$, 那么$U_a(t,0)u_1\leqslant U_a(t,0)u_2$;

(2) 如果$u_1\leqslant u_2$, $u_1\neq u_2$, 那么$(U_a(t,0)u_1)(x)<(U_a(t,0)u_2)(x)$, $\forall$ a.e. $x\in D$;

(3) 在 Dirichlet 边值条件下, 假设$a^{(k)}$, $k=1,2$, 在$R\times D$上几乎处处满足$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(2)}$, $a_i^{(1)}=a_i^{(2)}$, $b_i^{(1)}=b_i^{(2)}$, $c_0^{(1)}\leqslant c_0^{(2)}$, 则对任意的$t>0$及任意的$u_0\in L_p(D)^+$, 都有

$$U_{a^{(1)}}(t,0)u_0\leqslant U_{a^{(2)}}(t,0)u_0;$$