普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4–5

不等式选讲

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

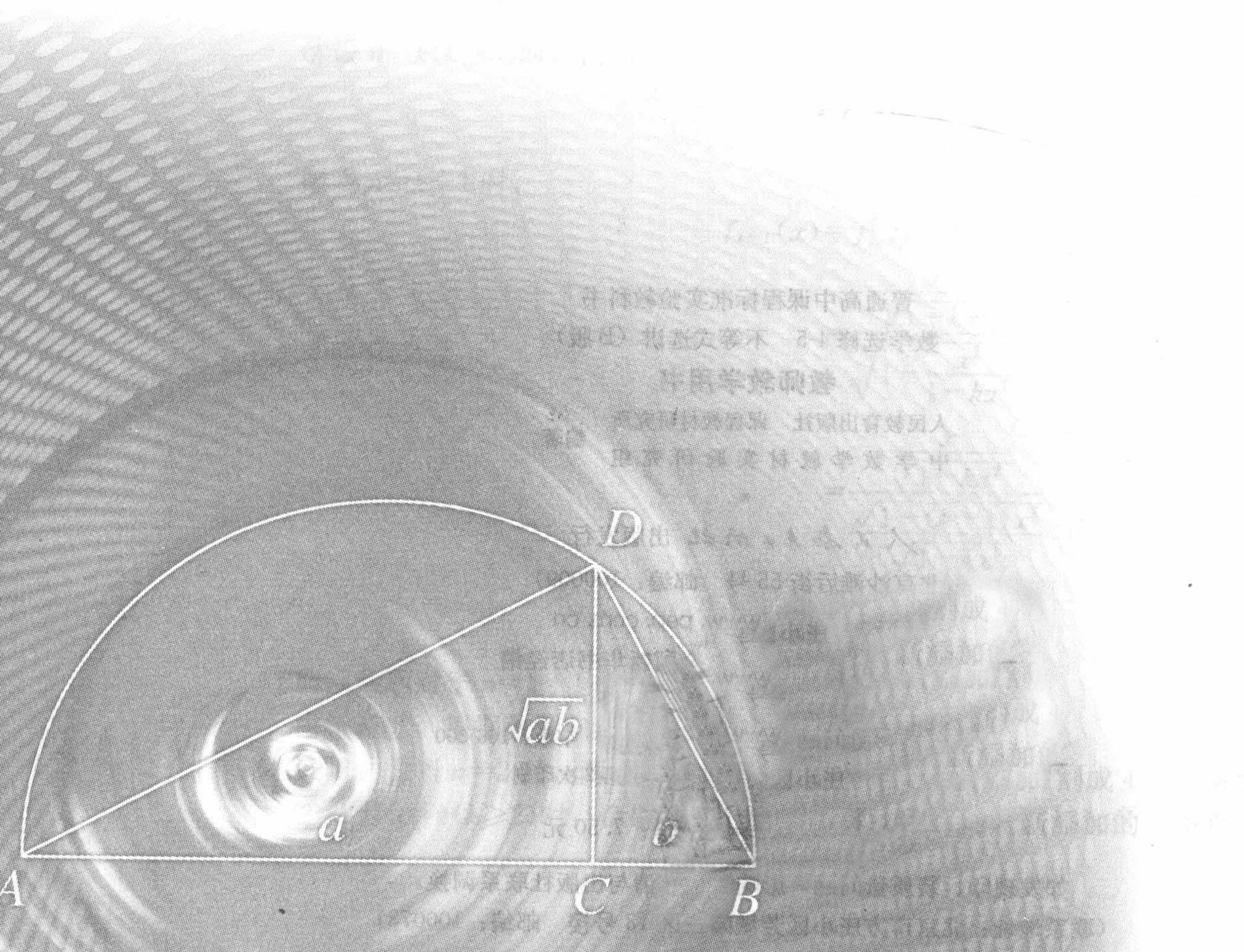
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-5 不等式选讲

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

本册主编　　房艮孙
编　　者　　房艮孙　李沍岸
责任编辑　　李华英
版式设计　　王　喆
封面设计　　林荣桓

普通高中课程标准实验教科书
数学选修 4-5　不等式选讲（B 版）
教师教学用书
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著
*
人民教育出版社　出版发行
（北京沙滩后街 55 号　邮编：100009）
网址：http：//www.pep.com.cn
北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销
*
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：8　字数：166 000
2004 年 6 月第 1 版　2005 年 8 月第 2 次印刷
ISBN 7-107-18024-X / G・11113（课）　定价：7.50 元
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版社联系调换。
（联系地址：北京市方庄小区芳城园三区 13 号楼　邮编：100078）

说　　明

这册教师教学用书是根据《普通高中数学课程标准（实验）》和经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过的《普通高中课程标准实验教科书·数学（B版）》选修4—5不等式选讲编写的教师用书.

本书编写的原则是：

（一）努力体现教材编写的指导思想. 帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图.

（二）明确各章的教学要求及要达到的教学目标. 努力完成“课标”中规定的教学任务.

（三）尽力指出相关内容的教学难点、重点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难.

（四）努力吸收教师的教学实际经验，使本书能更好地为教学服务.

这本教师用书每章包括：教学要求、内容编排、课时分配、内容分析、习题参考答案等五部分.

在对教材的内容分析中，主要是将各个知识点明确地列出来，对某些更深一层的数学含义做必要的阐释，目的是帮助教师更好地理解教材.

为了更好地贯彻本套教材的指导思想，明确教材的结构和编写特点，特做如下说明，以供参考：

一、不等式的基本性质和证明的基本方法

1. 本章的主要内容包括复习初中学过的一些不等式解法，学习绝对值不等式、绝对值三角不等式的解法，学习证明不等式的基本方法.

2. 依据课标的指导思想，要特别重视不等式证明的几何意义和背景，注意数形结合解不等式的方法.

3. 注意理解实数的“有序性”. 根据实数有序性给出实数大小的表达方式，由此才得出了8条不等式基本性质，而这些基本性质是解不等式和证明不等式的基础和出发点.

4. 基本不等式是解决优化和极值问题的理论基础，在第二章第四节中基本不等式的作用得到充分的体现.

5. 绝对值的概念是复习内容，各类绝对值不等式的解法和绝对值三角不等式是这节的中心内容.

6. 不等式的证明方法主要介绍了比较法、分析法、综合法、反证法、放缩法. 这些方法的运用始终贯穿全书，需要学生能够灵活运用这些方法证明不等式.

二、柯西不等式与排序不等式及其应用

1. 本章主要介绍了两个重要不等式：柯西不等式和排序不等式.

2. 学生要掌握平面上（二维）柯西不等式的不同形式，包括代数形式、向量形式和三角形式. 特别注意向量形式和三角形式主要展示了柯西不等式的几何背景.

3. 作为柯西不等式的推论，学生要掌握平面三角不等式. 同样对于平面三角不等式也要知道它的向量形式.

4. 作为柯西不等式的应用，注意利用柯西不等式解决简单的不等式证明问题.

5. 注意体会“逐项调整法”证明排序不等式的证明思想. 作为排序不等式的应用，注意利

用排序不等式证明不等式的例子.

6. 作为知识的自然延伸，学习突出的学生可以学习书中选学部分. 本节对平均值不等式做了推广，给出了算术平均值、几何平均值、调和平均值之间的关系，进一步还介绍了加权平均不等式，利用加权平均不等式证明了杨格不等式. 在教师用书中将这部分知识再做了延伸，介绍了赫尔德不等式、闵可夫斯基不等式等重要不等式，便于教师对这部分知识有完整的认识.

7. 注意掌握最大值最小值的概念，利用柯西不等式、平均值不等式求特定函数最值的方法.

三、数学归纳法与贝努利不等式

1. 本章主要有两部分内容：数学归纳法和贝努利不等式.

2. 通过实例引入归纳法概念，使学生了解（不完全）归纳法的重要性和不足，进而引入数学归纳法概念，说明数学归纳法优于不完全归纳法的地方就是证明的严谨性.

3. 注意学习数学归纳法的在各种问题中的运用技巧，包括求和问题、整除问题、几何问题等等.

4. 用数学归纳法证明不等式是本书讲解数学归纳法的主要目的，本节证明的不等式包括推广的绝对值三角不等式、平均值不等式和柯西不等式.

5. 本节利用数学归纳法证明了指数为正整数的贝努利不等式，利用平均值不等式证明了指数为有理数的贝努利不等式，介绍了指数为实数的贝努利不等式. 使学生加深理解贝努利不等式的内在含义.

6. 本章的难点在于对数学归纳法思想的理解，以及在用数学归纳法证明不等式时，各种综合技巧的运用. 为了更好地掌握数学归纳法证明不等式的技巧，应全面地介绍各种类型的不等式证明，特别注意前面学过的证明不等式方法和常用不等式在数学归纳法中的应用.

学习本册教材，要注意与先前知识的融合，每个新知识点的引入都要从简单的事实或前面的旧知识出发，以免学生接受困难.

在教学中应注意因材施教，对不同层次的学生应做不同要求. 比如，证明不等式的常规技巧是需要全体学生熟练掌握的，但是对于某些定理证明以及定理推广的理解，不可强求所有学生都能很深入的理解.

注意体会本册教材中的数学思想，主要包括：函数的思想、数形结合的思想、分类讨论的思想.

本册教材的特点是注重不等式的几何背景的阐述，贯彻了整套教材“数形结合”的鲜明特色.

由于时间紧迫，本书中必然存在不少缺点，欢迎广大教师、专家指正.

中学数学教材实验研究组

2004 年 11 月

目录

第三章　数学归纳法与贝努利不等式

第一章

不等式的基本性质和证明的基本方法

I 概　　述

一、教学要求

1. 复习与回顾不等式的基本性质和基本不等式.

2. 理解绝对值的几何意义，能证明以下不等式

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|\quad\forall a,\ b\in\mathbf{R}$

(2) $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|\quad\forall a,\ b,\ c\in\mathbf{R}$

3. 能利用绝对值的几何意义求解以下类型的不等式

(1) $|ax+b|\leqslant c$

(2) $|ax+b|\geqslant c$

(3) $|x-c|+|x-b|\geqslant a$

(4) $|x-c|+|x-b|\leqslant a$

4. 通过一些简单问题了解证明不等式的基本方法：比较法、综合法、分析法、反证法、放缩法.

5. 理解基本不等式的几何意义与背景，以加深学生对它的数学本质的理解.

二、内容编排

本章教材是在初中介绍了不等式的概念，学习了一元一次不等式，一元一次不等式组的解法；高中数学 5 学习了一元二次不等式，二元一次不等式组的基础上编写的.

本章内容分为五部分，第一部分是复习与回顾不等式的基本性质和一元二次不等式的解法. 首先通过实数和数轴的一一对应给出了比较实数大小的方法，通过不等号沟通了实数大小的几何意义和代数定义的联系. 在这基础上回顾了不等式的一些基本性质，一元一次和一元二次不等式的解法. 第二部分首先证明了一个重要的不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，通过这一公式，得出了描述算术平均和几何平均关系的一个

不等式（基本不等式），给出了基本不等式的几何背景，介绍了一般形式的算术—几何平均值不等式（简称平均值不等式）. 第三部分介绍了$|ax+b|\leqslant c$，$|ax+b|\geqslant c$，$|x-a|+|x-b|\geqslant c$，$|x-a|+|x-b|\leqslant c$型不等式的解法，给出了解这些不等式的一般步骤和几种常用解法：分类讨论法，几何解法和图象解法. 第四部分讲绝对值的三角不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，给出了等号成立的充分必要条件. 第五部分讲不等式证明的基本方法. 通过典型例题介绍了证明不等式的五种基本方法：比较法、综合法、分析法、反证法和放缩法.

本章的重点是求解绝对值不等式，以及运用证明不等式的基本方法解题. 通过本章的学习，学生将掌握一些简单不等式（如一元一次、一元二次不等式，绝对值不等式）的解法，掌握证明不等式的基本方法，在求解和证明过程中充分体会不等式的几何背景和意义.

三、课时分配

本章教学时间约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）

1.1　不等式的基本性质和一元二次不等式的解法	1 课时
1.2　基本不等式	1 课时
1.3　绝对值不等式的解法	2 课时
1.4　绝对值的三角不等式	1 课时
1.5　不等式证明的基本方法	2 课时
小结与复习	1 课时

Ⅱ　内容分析

本册导引

导引指出了不等式在现代数学中的地位，说明了本专题知识的重要性，以期引起学生的足够重视.

导引还概括说明了本专题的主要内容，使学生初步了解本专题的主要内容，使学生初步接触到本专题的一些概念.

导引中还特别强调了不等式及其证明的几何意义和实际背景的重要性，它有助于学生了解不等式的数学本质.

1.1　不等式的基本性质和一元二次不等式的解法

1. 本小节回顾了已学过的不等式的基本性质，它们是推导不等式其他性质的基础，也是解不等式和证明不等式的依据.

2. 在回顾对任何实数 a，b，都有

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0$$
$$a<b \Leftrightarrow a-b<0$$
$$a=b \Leftrightarrow a-b=0$$

时，应重点指出上面等价符号左边表示实数的大小顺序，反映了实数的几何意义. 右边表示实数的运算性质，反映了实数的代数意义，上式沟通了两者之间的联系. 它是本专题内容的一个理论基础，是证明不等式和解不等式的主要依据，因此在教学中需要足够重视.

3. 教学中可以向学生提出如下问题：如果 $a>b$，$ab\neq0$，那么 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 谁大？针对学生回答的错误，引出例 1，说明证明的必要性. 这里证明的依据是

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0$$
$$a<b \Leftrightarrow a-b<0$$
$$a=b \Leftrightarrow a-b=0$$

引导学生说清每一步推理的理由和关键性步骤.

4. 回顾一元一次不等式解法时，当由

$$-7x<-14$$

两边乘 $-\frac{1}{7}$ 时，要强调不等号方向要改变，它依据的是不等式的性质：

$$a>b,\ c<0 \Rightarrow ac<bc.$$

5. 在回顾一元二次不等式的解法时，应强调通过函数图象了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

6. 例 3 是一个从实际情境中抽象出的一元二次不等式模型，让学生了解一些一元二次不等式的实际背景.

1.2　基本不等式

本小节复习和回顾了基本不等式，强调它的几何意义，介绍了它的推广.

1. 在公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 及 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的教学中，应强调以下几点：

(1) $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 成立的条件是不同的，前者只要求 a，b 都是实数，而后者要求 a，b 都为正数. 例如，$(-1)^2+(-3)^2\geqslant 2(-1)\times(-3)$ 成立，而 $\frac{(-1)+(-4)}{2}\geqslant\sqrt{(-1)\times(-4)}$ 不成立.

(2) 关于不等式 $c\geqslant d$ 及 $c\leqslant d$ 的含义.

$c>d$ 或 $c<d$ 表示严格的不等式，

$c\geqslant d$ 或 $c\leqslant d$ 表示非严格的不等式.

不等式“$c\geqslant d$”读作 c 大于或等于 d，其含义是“或者 $c>d$，或者 $c=d$”，等价于“c 不小于 d”，

即若 $c>d$ 或 $c=d$ 有一个正确，则 $c\geqslant d$ 正确.

不等式"$c\leqslant d$"读作 c 小于或等于 d，其含义是"$c<d$，或者 $c=d$"，等价于"c 不大于 d"，即若 $c<d$ 或 $c=d$ 中有一个正确，则 $c\leqslant d$ 正确.

(3) 这两个公式都是带有等号的不等式，因此，对定理"当 a，$b\in\mathbf{R}$ 时，$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 当且仅当 $a=b$ 时等号成立"的含义要搞清楚. 它的含义是

当 $a=b$ 时，$a^2+b^2=2ab$，

当 $a^2+b^2=2ab$ 时，$a=b$，

当 $a\neq b$ 时，$a^2+b^2>2ab$，

当 $a^2+b^2>2ab$ 时，$a\neq b$.

对基本不等式：a，b 为正数，则 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 当且仅当 $a=b$ 时等号成立，作类似理解.

2. 定理 3 证明了 3 个正数的算术平均不小于它们的几何平均，注意等号成立的条件.

3. 在讲完定理 3 后，可以用启发式教学让学生自己定义 n 个正数的算术平均和几何平均，让学生自己猜测 n 个正数的算术平均和它们的几何平均之间的关系，引入定理 4，在这里不加以证明. 我们在第二章第三节中给出了它的实际背景，并利用排序不等式给出了它的证明，也可以阅读第三章第二小节，在那里我们用数学归纳法给出了定理 4 的证明.

4. 对任何 n 个实数 a_1，a_2，…，$a_n\in\mathbf{R}$，都可以定义它们的算术平均

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

但是我们只对 n 个正数定义它们的几何平均.

5. 定理 1—定理 4 的不等式中，都给出了等号成立的充分必要条件，这些条件为解决某些有关优化的极值问题提供了理论基础，因此定理中等号成立的条件要求学生掌握.

1.3　绝对值不等式的解法

1.3.1　$|ax+b|\leqslant c$、$|ax+b|\geqslant c$ 型不等式的解法

本小节由易到难，顺次介绍了 $|x|<a$ 与 $|x|>a$、$|ax+b|\leqslant c$ 与 $|ax+b|\geqslant c$ 型不等式的解法.

1. 通过本小节的学习，使学生熟练掌握 $|ax+b|\leqslant c$ 与 $|ax+b|\geqslant c$ 型不等式的解法.

2. 本小节的重点是 $|x|<a$ 与 $|x|>a(a>0)$ 型不等式的解法，关键是对绝对值几何意义的理解，也即 $|x|$ 表示数轴上的点 x 到原点的距离，即

$$|x|=\begin{cases}x & x>0\\0 & x=0\\-x & x<0\end{cases}$$

建议用图象配合具体例子 $|-1|=1$，$|1|=1$ 来说明它的几何意义.

3. 关于 $|x|<a$ 与 $|x|>a(a>0)$ 型不等式，教科书是从具体例子 $|x|<1$ 入手讲述的，强调由绝对值的几何意义知，不等式 $|x|<1$ 的解集为数轴上到原点的距离小于 1 的点的集合，结合数轴表示得到不等式 $|x|<1$ 的解集，类似地从绝对值的几何意义出发，得到了不等式 $|x|>3$ 的解集.

4. 在给出不等式$|x|<1$的解集时用了两种方法，$\{x|-1<x<1\}$及区间表示$(-1,1)$，不等式的解集用区间表示的方法在解复杂的不等式及不等式组时是方便的，这里要求学生掌握这两种表示方法.

5. 由具体例子，教科书归纳得到了一般的结论：

不等式$|x|\leqslant a(a>0)$的解集是$\{x|-a\leqslant x\leqslant a\}$，即$[-a,a]$.

不等式$|x|\geqslant a(a>0)$的解集为$\{x|x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a\}$，即$(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$，这里应注意向学生说明集合运算符号“$\cup$”与逻辑联结词“或”的关系和意义.

对于这个结论，仍应根据绝对值的几何意义，结合数轴进行讲解，即$|x|\leqslant a(a>0)$表示和原点距离不大于a的点的全体，即位于数轴上的点$-a$与a之间的（包括$-a$与a）点的全体，即$[-a,a]$. 而$|x|\geqslant a$表示数轴上和原点距离不小于a的点的全体，即数轴上位于$-a$左侧（包括$-a$）及a右侧（包括a）的点的全体，即$(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$.

6. 教科书上指出了$a<0$时，$|x|\leqslant a$的解集为$\varnothing$，$|x|\geqslant a$的解集为$\mathbf{R}$. 可以用具体例子来加以说明，例如$|x|\leqslant -1$的解集为$\varnothing$，$|x|\geqslant -1$的解集为$\mathbf{R}$.

7. 教科书中的例子是$|ax+b|<c$与$|ax+b|>c(c>0)$型的不等式，在具体求解时，可以直接在$|x|<a$与$|x|>a(a>0)$型不等式上进行替换，这时原不等式化成了一元一次不等式，然后就可以根据不等式的基本性质求解了.

教学时，要注意对

$$-c<ax+b<c \quad (c>0)$$

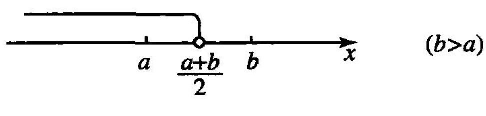
型不等式的化简作必要的说明，特别要注意a为负数时，可以先把a化为正数，例如解不等式$|-2x+1|>5$化为同解不等式$|2x-1|>5$求解.

8. 教学时，注意控制教学要求，本小节练习所解不等式，只限于绝对值号内为一元一次的代数式，并且是数字系数，只在练习 1.3.1 的第 6 题中安排了$|x-a|\leqslant b(b>0)$、$|x-a|\geqslant b(b>0)$与$|x-a|<|x-b|(a\neq b)$这样的不等式.

9. 关于$|x-a|<|x-b|(a\neq b)$的解法可以利用同解不等式$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow x^2<a^2$去掉绝对值来解，会比较方便，即

$$\begin{aligned}|x-a|<|x-b|&\Leftrightarrow(x-a)^2<(x-b)^2 \text{（用距离来解释这两个不等式同解）}\\&\Leftrightarrow -2ax+a^2<-2bx+b^2\\&\Leftrightarrow 2(b-a)x<(b-a)(b+a)\\&\Leftrightarrow \quad x<\frac{b+a}{2} \qquad \text{当 } b>a\\&\quad x>\frac{b+a}{2} \qquad \text{当 } b<a\end{aligned}$$

当$b>a$时在数轴上表示其解集即为



在区间$\left(-\infty,\dfrac{b+a}{2}\right)$的点$x$到$a$的距离小于$x$到$b$的距离.

10. 教学时$|x|<a(a>0)$的求解也可用以下方法：

$$|x|<a\Leftrightarrow|x|^2<a^2 \text{（}a>0\text{，由 1.1.1 节不等式性质 5）}$$

$\Leftrightarrow x^2<a^2$

$\Leftrightarrow -a<x<a$（由一元二次不等式解法）.

1.3.2 $|x-a|+|x-b|\geqslant c$、$|x-a|+|x-b|\leqslant c$ 型不等式的解法

本小节通过例 1，例 2 介绍了$|x-a|+|x-b|\geqslant c$、$|x-a|+|x-b|\leqslant c(c>0)$型不等式的解法.

1. 通过本小节的学习，要求学生掌握$|x-a|+|x-b|\geqslant c$、$|x-a|+|x-b|\leqslant c(c>0)$型不等式的解法.

2. 本小节讲述了$|x-a|+|x-b|\geqslant c$、$|x-a|+|x-b|\leqslant c$ 型不等式的三种解法：分区间（分类）讨论法、图象法和几何法. 分区间讨论的方法具有普遍性，但较麻烦；几何法和图象法直观，但只适用于数据较简单的情况.

3. 分区间讨论的关键在于对绝对值**代数意义**的理解，即

$$|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

也即 $x\in\mathbf{R}$，x 为非负数时，$|x|$ 为 x；x 为负数时，$|x|$ 为 $-x$，即 x 的相反数. 利用这一性质，在解$|x-a|+|x-b|\geqslant c$、$|x-a|+|x-b|\leqslant c(c>0)$时，不妨设 $a<b$，于是在 $(-\infty,\ a]$，$(a,\ b)$，$[b,\ +\infty)$ 上得到$|x-a|+|x-b|$的不同的解析表达式，将问题转化为解三个不等式组

（Ⅰ）$\begin{cases}x\leqslant a\\ a-x+b-x\leqslant c\end{cases}$

（Ⅱ）$\begin{cases}a<x<b\\ x-a+b-x\leqslant c\end{cases}$

（Ⅲ）$\begin{cases}x\geqslant b\\ x-a+x-b\leqslant c\end{cases}$

原不等式的解集为以上三个不等式组解集的并集.

4. $|x-a|+|x-b|\geqslant c$、$|x-a|+|x-b|\leqslant c$ 型不等式的图象解法和画出函数

$$f(x)=|x-a|+|x-b|-c$$

的图象是密切相关的，其图象是折线，正确地画出其图象的关键是写出 $f(x)$的分段解析表达式. 不妨设 $a<b$，于是

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a+b-c & x\leqslant a\\ b-a-c & a<x<b\\ 2x-a-b-c & x\geqslant b\end{cases}$$

这种解法体现了函数与方程结合、数形结合的思想.

5. 例 2 的解法是几何解法，这里关键是对绝对值几何意义的理解. 例如

$$|x-a|+|x-b|<c\quad (c>0)$$

的解集应为和 A (a)，B (b) 距离之和小于 c 的点的全体.

6. 因为$|x-a|+|x-b|\geqslant|x-a-(x-b)|=|a-b|$，

所以当 $c<|a-b|$时，不等式

$$|x-a|+|x-b|<c$$

无解；而当$|a-b|>c$ 时，不等式

$$|x-a|+|x-b|>c$$

的解集为全体实数. 事实上，对于一切 $x\in\mathbf{R}$ 有

$$|x-a|+|x-b|\geqslant|x-a-(x-b)|=|a-b|>c$$

7. 教学时，要控制难度，本小节练习只限于求 $|x-a|+|x-b|\leqslant c$ 与 $|x-a|+|x-b|\geqslant c$ 型的不等式的解，并且都是数字系数.

8. 复数不等式 $|z+2|+|z-1|<4$ 的解集是到点 1 和 -2 的距离之和小于 4 的复平面上的点集. 因此，它应是一个以点 $(1,0)$，$(-2,0)$ 为焦点，长半轴为 2 的椭圆内部，具体表示是

$$\left\{z=x+y\mathrm{i}\left|\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{7}{4}}<1\right.\right\}.$$

9. 习题 1－3 的 14 题解不等式 $|x+3|+|2x-1|\geqslant 7$ 可以用分区间讨论法，在 $(-\infty,-3]$，$\left(-3,\frac{1}{2}\right)$，$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上，化为三个不等式组，这三个不等式组解集的并即为原不等式的解集，这里 $\frac{1}{2}$ 为 $2x-1=0$ 的解.

10. 习题 1－3 的第 6 题是为大学进一步学习作准备的，另一方面也可以进一步理解绝对值的代数意义. 例如，由 $\max\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ 得

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|].$$

于是如果 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，就可以推出函数 $\max\{f(x),g(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续了.

11. 习题 1－3 的第 7 题是为证明 1.4 绝对值的三角不等式中的定理 1 作准备的.

1.4 绝对值的三角不等式

本小节的主要内容是含有绝对值的三角不等式的定理 1 和定理 2 及其证明.

1. 本小节的定理 1，是含绝对值不等式的一个非常重要的性质. 对于这个定理的证明我们运用了恒等变形，其中最重要的依据是对一切实数 a，b，有

$$|a|\leqslant|b|\Leftrightarrow|a|^2\leqslant|b|^2$$
$$\Leftrightarrow a^2\leqslant b^2$$

2. 利用恒等变形证明此不等式的优点是容易给出等号成立的充分必要条件是 $ab\geqslant 0$.

3. 我们给出了不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 的几何说明，这实际上是利用绝对值的几何意义，证明了不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

4. 由定理 1 推定理 2 时用到了

$$a-c=(a-b)+(b-c)$$

这种加一项 b，再减去相同的一项的方法在证明有关绝对值不等式中是常用的，要向学生强调这一点.

5. 如果学生已学过复数，可以向学生说明，当 a，b 为复数时，此不等式仍成立，$|a+b|$ 为复数 $a+b$ 的模，$|a|$，$|b|$ 分别是复数 a，b 的模.

6. 定理 1 可以推广到 n（n 是大于 2 的自然数）个数的和的绝对值小于或等于 n 个数绝对值的和：

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

在教科书 3.2.1 节中用数学归纳法给出了其证明.

7. 例 1，例 2 是有意使用了字母 ε，其目的是为学生进一步学习高等数学作准备. 同时例 1，例 2 中证明的技巧，也是高等数学里常常要用到的.

8. 推论 1，推论 2 不要求学生记忆.

1.5 不等式证明的基本方法

由于不等式的内容丰富，形式多样，所以证明不等式的方法也很多，本节介绍证明不等式的五种基本方法：比较法、综合法、分析法、反证法和放缩法.

1.5.1 比较法

教材首先指明了比较法的依据，然后通过例 1、例 2 介绍了用比较法证明不等式的具体步骤.

1. 比较法是证明不等式中最基本，最重要的方法，比较法的依据是 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$，$a<b\Leftrightarrow a-b<0$，因而比较法是利用不等式两边的差是正数或负数来证明不等式，因而被广泛应用.

2. 在判断不等式两边差的符号时，一般需要对不等式两边求差后所得代数式进行变形，通常的变形方法有配方、因式分解、通分、乘法公式等，变形目的是为了可以判断经过变形后所得的代数式的正、负号.

3. 例 3 的证明不是比较法，之所以放在这里是因为由例 2 启发可猜测 $f(x)=\frac{x}{1+x}$在 $[0,+\infty)$ 上是增函数. 例 3 是利用了 $f(x)$是增函数的性质来证的，但例 3 在高等数学中常常用到，这里说明利用函数的单调性也是证明不等式的一种方法，如时间不够，也可以不讲例 3.

4. $f(x)=\frac{x}{1+x}$，$x>0$ 是增函数的证明：令 $0<x<y$，则 $f(x)-f(y)=\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}=\frac{x+xy-y-xy}{(1+x)(1+y)}=\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}<0$，因此，$f(x)$当 $x>0$ 时为增函数.

1.5.2 综合法和分析法

本小节介绍了证明不等式的另两种基本方法：分析法和综合法.

一、综合法

1. 利用公理、定义、已证明过的不等式的性质等逐步推导，从而最后导出要证明的命题，这种方法称为综合法.

2. 运用不等式的性质和已经通过证明的不等式时，要特别注意它们成立的条件，这样才能保证推理正确.

3. 用综合法证明不等式的逻辑关系是

（已知）$A\Rightarrow B_1\Rightarrow B_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow B_n\Rightarrow B$（结论）

（逐步推理所得不等式成立的必要条件）

4. 例 2 已在教科书 1.2 基本不等式中证明过了，这里用综合法再次加以证明，说明证明同一个不等式可以用不同的方法.

5. 例 3 和例 1、例 2 不同，例 3 中的不等式是在条件 $a^2+b^2+c^2=1$ 和 $x^2+y^2+z^2=1$ 下才成立，故称为条件不等式，在证明条件不等式时，要注意题中所给条件的应用.

二、分析法

1. 从所需证明的命题出发，利用已知的公理、定理，分析使这个命题成立的充分条件，最后达到命题所给出的条件，或者一个已证明过的定理，这种方法称为分析法.

2. 分析法常常用于从已知条件不易着手的情况.

3. 分析法是探求命题成立的充分条件，用分析法证明不等式的逻辑关系是

$$\text{（结论）} B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow \cdots \Leftarrow B_n \Leftarrow A \text{（已知）}$$

（逐步寻求不等式成立的充分条件）

用分析法论证“若 A 则 B”这个命题的模式是

为证明命题 B 为真
只需证命题 B_1 为真
只需证命题 B_2 为真
…………
只需证命题 B_n 为真
只需证命题 A 为真
因为已知 A 为真，故 B 必真

4. 一般说来，对于较复杂的不等式，直接运用综合法不易着手，因此，常常用分析法探索证明的途径，然后用综合法加以证明，这样，分析法和综合法是经常结合在一起使用的.

5. 运用分析法证明对学生来说理解有些困难，一是难在开始不易理解它的本质是从结论分析出使其成立的“充分”条件；二是难在分析法的正确书写格式要求学生正确地使用连接有关步骤的关键词，如“为了证明”，“只需证明”，“即”，“$\cdots\Leftarrow\cdots\Leftarrow\cdots$”等，不能图省事，少写或不写，否则就不是分析法了.

1.5.3 反证法和放缩法

一、反证法

反证法是教学中的一个难点，要引起足够重视.

1. 首先假设所证明的命题是不正确的，然后利用公理、已证明过的定理、命题的条件，逐步分析，得到和命题的条件（或已证明过的定理，或明显成立的事实）矛盾的结论，以此说明假设的结论不成立，从而原来的结论是正确的，这种方法称为反证法，反证法是一种间接证明方法.

2. 在用反证法证明命题结论时，要求结论的反面情况只有**有限多种**，然后**逐一**证明这种反面的结论都是不可能的，是与已知条件，已知事实，或已证明过的定理矛盾的.

比如例 2，实数 a 只能有三种情况：$a>0$，$a=0$，$a<0$，而要证明 $a>0$，只需否定 $a=0$ 和 $a<0$. 具体的证明是在 $a=0$ 和 $a<0$ 两种情况下分别导出与已知矛盾，说明假设不成立，因而只能 $a>0$ 成立. 在运用反证法证明问题时要注意反证法的“逆向思维方式”.

二、放缩法

在证明不等式时，有时需要将所证明的不等式的值适当放大或缩小，使它由繁化简，以达到证明的目的，这种方法称为放缩法.

1. 放缩法的关键在于放大（或缩小）要适度.

2. 当要证明的不等式中含有分式时，我们把分母放大，则相应的分式的值缩小，反之，如果把分母缩小，则分式的值放大，这是一种常用的放缩方法.

3. 放缩法放大缩小的限度不是唯一的，如果用某种放大的办法可以得到欲证结论，那么比此放大更“精细”的放大就应该更能得到所需结论. 但是一般来讲，这种“风险”和“难度”是成正比的，放得越宽，能否证出命题的“风险”越大，但相对放大的“难度”就越低；反之，放大越精细，则能证出最终结论的可能性越大，但是“难度”也相对增大，这其中的平衡就需要从练习中去把握.

4. 本小节的最后，我们用例 5 说明利用几何学的知识也是证明不等式的一个重要途径.

5. 例 6 是高等数学中常常用到的一个不等式，它是利用例 5，再由分类讨论（把 $\mathbf{R}$ 分成 3 个互不相交的区间）的思想来证明的.

6. 还可以用数学归纳法来证明不等式，例如教科书在 3.2 节中用数学归纳法证明了平均值不等式和贝努利不等式.

7. 教科书中重点介绍了证明不等式的五种方法：比较法、分析法、综合法、反证法和放缩法，在教学中，学完本节后要强调针对不同问题具体分析，灵活地运用各种证法.

小结与复习

本章内容大体包括（1）回顾不等式基本性质、一元一次不等式和一元二次不等式的解法.（2）基本不等式和绝对值不等式的解法.（3）绝对值三角不等式和五种证明不等式的基本方法. 关于本章复习，有以下几点建议，供参考.

1. 本章前两节内容基本属于知识回顾，所体现的新东西主要是数学思想和数学理念的转变，因此在复习中不做重点讲解.

2. 在利用代数法解带绝对值的不等式时要特别注意去绝对值的方法. 代数解法的好处是“程序化”程度高，能解的不等式种类全，坏处是往往计算和分类过于烦琐. 几何解法的好处是直观、简单，坏处是对很多不等式失效. 因此，一方面要提倡学生使用几何解法，另一方面要提醒学生注意题目条件，不能盲目使用几何解法.

3. 注意联系几何背景解释绝对值三角不等式.

4. 不等式证明的五种基本方法是同等重要的. 在同一题目中经常可以使用多种不同方法解或证明. 因此学生掌握这些证明方法时注意融会贯通，因题而异，选择最适当的方法解题.