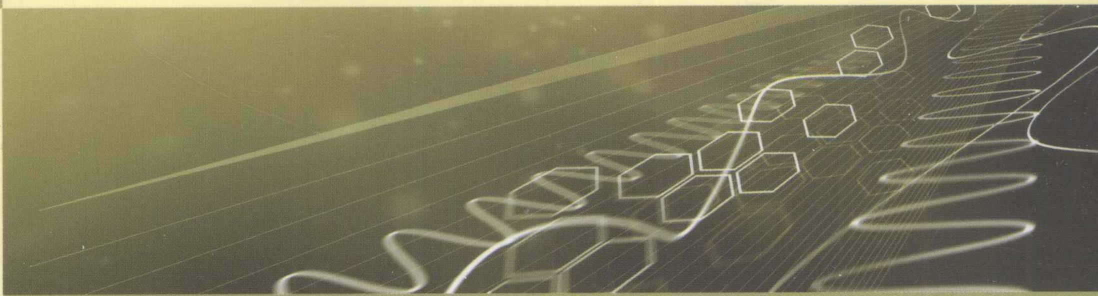
普通高等院校“十一五”规划教材

线性代数

（经济管理类）



主编　高玉斌

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校"十一五"规划教材

线性代数

（经济管理类）

主编　高玉斌

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书是编者根据多年的教学实践，结合新形势下教学改革的精神，依据教育部“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成的。全书共分六章，前五章是基本内容，包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与矩阵的对角化和二次型，第六章是 Maple 在线性代数中的应用。前五章均配有适量习题，书末附有习题答案。

本书内容精炼，语言准确，解析详细，条理性强，较为系统地介绍了线性代数的基本内容、基本理论和基本方法。本书可作为高等学校经济管理类专业线性代数课程的教材，也可供专业技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数：经济管理类/高玉斌主编. —北京：国防工业出版社，2010. 8

ISBN 978-7-118-07016-3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①高… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 153805 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)

腾飞印务有限公司印刷

新华书店经售

开本 710×960　1/16　印张 13　字数 232 千字

2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—4000 册　定价 22.00 元

国防书店：(010)68428422　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　发行业务：(010)68472764

前　言

本书是根据教育部“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”而编写的，可作为高等学校经济管理类专业线性代数课程的教材。

全书共分六章，前五章是基本内容，包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与矩阵的对角化和二次型，第六章是 Maple 在线性代数中的应用。

在编写过程中，编者力求教材的内容、体系符合当前我国高等教育教学内容和课程体系改革的总体目标，体现“厚基础、宽口径、高素质”人才培养的要求。在教材体系、内容编排、例题选配等方面既吸取了国内外优秀教材的优点，也汇集了编者多年的教学经验。

本教材具有以下特点：

(1)体系适当，语言准确，解析详细，条理性强，内容叙述上尽可能采用学生易于接受的方式。如在第一章行列式中，首先通过二元、三元线性方程组的求解，引出二阶、三阶行列式的定义，进而通过分析其规律，利用学生所熟悉的数学归纳法引入 n 阶行列式的定义；又如在第三章线性方程组中，先引入消元法，通过分析求解线性方程组的消元法，提出了利用矩阵的初等行变换求解线性方程组的方法，归纳出线性方程组有解的判定，从而以此为主线，引入向量的定义、向量组的线性相关性、向量组的秩等概念，进而讲解线性方程组解的结构。

(2)内容的深度和广度合理，既考虑到本课程的教学基本要求，也照顾到不同院校、不同专业及将来报考硕士研究生学生的需要。教材内容覆盖了“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”及《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中经济管理类专业有关线性代数的全部内容。在前五章的基本内容中，也适当编排了一些基本要求之外的内容及一些综合性或难度较大的内容及例题，这部分内容标有“*”号，可根据教学实际情况处理，略去不讲也不影响教材的系统性。

(3)注重基本概念、基本理论、基本方法的介绍，突出有关定理、法则的

分析与应用。在重点内容处，均配备了较多的例题。特别是在重点内容、难点内容及读者在学习过程中容易产生疑问的地方，以“注意”的形式给出了必要的说明或解释性文字，帮助读者理解相关内容。

(4)例题、习题选配适当，注重题目的多样性。

(5)注重理论联系实际，在教材的部分章节中也选配了一些线性代数的概念、理论与方法在几何学、经济学等方面的应用问题，旨在使读者得到数学建模方面能力的初步培养。

本教材由高玉斌教授主编，并负责全书的统稿工作，第一章、第二章由梅银珍讲师执笔，第三章、第四章由胡红萍副教授执笔，第五章、第六章由杨正民副教授执笔。

由于编者能力所限，不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

2010 年 5 月

目　录

第一章 行 列 式

行列式是研究线性方程组的基础工具,也是线性代数中的一个重要概念,它广泛用于数学、经济管理及工程技术等众多领域. 本章将从二元、三元线性方程组的解引出二阶及三阶行列式的概念,然后推广到 n 阶行列式,最后给出求解 n 元特殊线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

第一节 二阶、三阶行列式

考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 b_1、b_2 是常数项,a_{ij} 是 x_j 的系数,它有两个下标,第一个下标 i 表示它在第 i 个方程,第二个下标 j 表示它是第 j 个未知量的系数.

下面用消元法解上述线性方程组(1.1). 用 a_{22} 乘方程组中第一式各项,用 a_{12} 乘方程组中第二式各项,得

$$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \tag{1.2}$$

$$a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12}. \tag{1.3}$$

由式(1.2)减式(1.3)消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.4}$$

同理,消去 x_1,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,得

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.5}$$

因此,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,线性方程组(1.1) 有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为方便记，我们引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

称 D 为二阶行列式. 它含有两行、两列（横写的叫做行，竖写的叫做列）. a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}称为二阶行列式 D 的元素. 元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

二阶行列式 D 的值是如下两项的代数和：一项是从左上角到右下角的对角线（又称行列式的主对角线）上两个元素的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角的对角线上两个元素的乘积，取负号.

于是，线性方程组(1.1)的解的结果可写为如下形式：

当
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，线性方程组(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

例 1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1, \\ x_1 + 4x_2 = 2. \end{cases}$$

解 因 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，所以方程组有唯一解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

故方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -2, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = 1.$$

完全类似地,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.6}$$

利用消元法可知,当

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

时,方程组(1.6)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3), \\ x_2 = \dfrac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}), \\ x_3 = \dfrac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}). \end{cases} \tag{1.7}$$

为方便记,引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

表示代数式 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$,称为 3 阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

上述定义表明三阶行列式是由 9 个数排成三行、三列的一个方块，其值是 6 项的代数和，其运算的规律性如图 1 - 1 所示．实线上连结的三个元素的乘积构成的三项取正号；虚线上连结的三个元素的乘积构成的三项取负号.

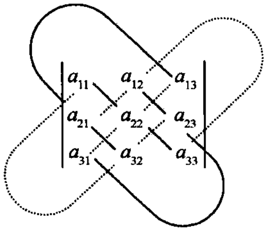


图 1 - 1　三阶行列式的运算规律

例 1.2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 4 & 9 & 2\end{vmatrix}.$$

解　$D=1\times3\times2+1\times(-1)\times4+1\times2\times9-1\times(-1)\times9-1\times2\times2-1\times3\times4=13.$

于是，三元线性方程组(1.6)的解的结果可写为以下形式：

当
$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$$
时，方程组(1.6)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

以上求解线性方程组的方法称为克拉默法则.

例 1.3　解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=1,\\ x_1-5x_2+3x_3=2,\\ x_1-x_2+x_3=-1.\end{cases}$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=2\times(-5)\times1+(-4)\times3\times1+1\times1\times(-1)$$

$$-1\times(-5)\times1-(-4)\times1\times1-2\times3\times(-1)=-8\neq0,$$

所以原方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=11,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=9,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=6,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{3}{4}.$$

第二节 n 阶行列式的定义及性质

一、n 阶行列式的定义

首先分析第一节定义的二阶、三阶行列式. 为此,我们补充定义一阶行列式为 $|a_{11}|=a_{11}$.

注意 一阶行列式 $|a_{11}|$ 就等于数 a_{11},其值可正可负.

二阶、三阶行列式的定义可分别表述为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}|a_{22}|-a_{12}|a_{21}|,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

可见,二阶、三阶行列式的值都等于该行列式的第一行诸元素分别乘以去掉该元素所在的行和列之后剩下的低一阶行列式,前面冠以正、负相间的符号,最后求和.

由此规律,利用递归的方法可逐次定义四阶行列式、五阶行列式以及一般的 n 阶行列式.

定义 1.1 一阶行列式定义为

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

当 $n \geqslant 2$ 时,设 $n-1$ 阶行列式已经定义,则 n 阶行列式定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}, \tag{1.9}$$

其中 $M_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示去掉行列式 D 的第 i 行、第 j 列后所剩余的 $n-1$ 阶行列式.

第一节中二阶、三阶行列式的有关名词,如行、列、元素、主对角线等,在 n 阶行列式中将继续沿用. 另外,对于本书中提到的"n 阶行列式",如果没有特殊说明,都有 $n \geqslant 2$.

定义 1.2 M_{ij}称为元素 a_{ij}的余子式,$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素 a_{ij}的代数余子式.

利用代数余子式的概念,n 阶行列式 D 又可写为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

称为行列式按第一行元素的展开式.

例 1.4 设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$

求第一行元素的余子式、代数余子式及 D 的值.

解

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -5, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -5,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 70, \qquad M_{14} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -60,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = -5, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = 5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = 70, \qquad A_{14} = (-1)^{1+4}M_{14} = 60,$$

$$\begin{aligned} D &= 3M_{11} - 1M_{12} + (-1)M_{13} - 2M_{14} \\ &= 3\times(-5) - 1\times(-5) - 1\times 70 - 2\times(-60) = 40. \end{aligned}$$

下面定理给出行列式按第一列元素的展开公式.

定理 1.1 $n\geqslant 2$ 时,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}. \tag{1.10}$$

证明略.

例 1.5 计算如下的下三角形行列式及上三角形行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 根据定义,有

$$D_1 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理,根据定理 1.1 可得

$$D_2 = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & d_1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解 根据定义,有

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{1+n}d_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+n}d_1(-1)^{1+(n-1)}d_2\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & d_3 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cdots = (-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}d_1d_2\cdots d_n \\ &= (-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}d_1d_2\cdots d_n. \end{aligned}$$

二、行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称行列式 D^{T} 为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 采用数学归纳法. $n=2$ 时,显然有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$