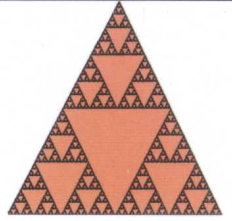


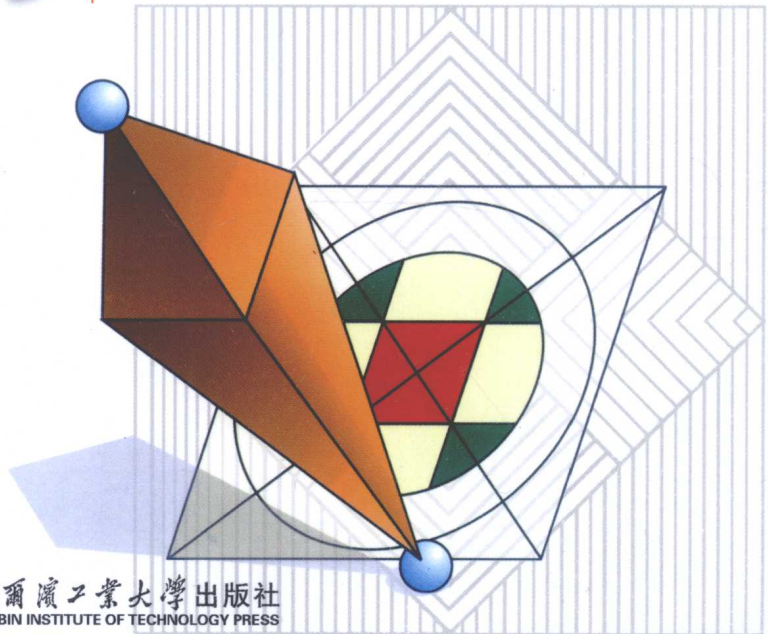
高中版下卷(三)



# 新编中学数学

# 解题方法全书

刘培杰 主编



哈尔滨工业大学出版社  
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 新编中学数学 解题方法全书

刘培杰 主编



数学语言提供了表达精确思想的主要手段。为了取得更加深刻的、影响远大的结果，必须依靠思维过程。但若没有数学语言的支持，这种过程就无法贯彻到底。在数学符号中好像存贮了一定量的智力，这种智力释放出来时就能产生几乎是爆炸性的威力。这就像是强大的发动机，我们借助它竖起智力结构；如果没有这种支持，我们的能力就无法进入这种结构。

R.D.Carmichael

## 内 容 提 要

本书内容包括函数、数列、向量、三角、立体几何等共十四部分,涵盖了大部分高中数学的知识点.本书以专题的形式对中学数学中的重点、难点进行了归纳、总结,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合高中师生阅读.

### 图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书:高中版.下卷.3/  
刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,  
2010.6

ISBN 978-7-5603-3015-0

I. ①新… II. ①刘… III. ①数学课—高中—解题  
IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 078582 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 尹 凡

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 32.5 字数 786 千字

版 次 2010 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3015-0

印 数 1~3 000 册

定 价 58.00 元

---

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



## 第一编 函数

怎样用函数思想解题 .....	3
怎样对函数综合题进行多角度求解 .....	8
怎样解抽象函数问题 .....	10
怎样巧求函数极值 .....	16
怎样解函数中数形结合问题 .....	19
怎样求双根式和或差的函数的最值 .....	23
怎样用拆项法求一类分式函数最值 .....	29
怎样解二次函数的最值 .....	32
怎样制订绝对值问题的求解策略 .....	34
怎样求函数的“稳定点” .....	38
怎样运用函数思想解决方程有解问题的两条途径 .....	40
怎样用构造函数法来证明不等式 .....	43
怎样在函数视角下看一个不等式 .....	47
怎样构造函数解题 .....	50
怎样解复合最值问题 .....	56
怎样解求参变量取值范围问题 .....	59
怎样用变量分离法解恒成立问题 .....	61
怎样避免求参数范围容易混淆的两个问题 .....	64
怎样抓数列的函数“情结”构建数列的解题思路 .....	67

## 第二编 数列

怎样求一类数列的通项 .....	73
怎样解以数列为载体的不等式证明问题 .....	76
怎样求 $a_n = \frac{c \cdot a_{n-1} + d}{a \cdot a_{n-1} + b}$ 的通项 .....	80
怎样在数列和不等式综合问题中放与缩 .....	83
怎样求关于数列 $m, mm, mmm, \dots$ 的通项公式 .....	88
怎样用简便解法解一个浓度问题 .....	90
怎样解与调和点列有关的平面几何问题 .....	93
怎样应用数列恒等式 .....	98
怎样进行数列推理论证中的常用策略 .....	102

# 目录 CONTENTS



怎样解数列中探索问题 .....	107
怎样求数列最值项问题 .....	111
怎样巧构矩阵变换,求解数列通项 .....	113
怎样解高考数列问题中的不等式证明问题 .....	119
怎样解依托函数背景的坐标数列问题 .....	122

### 第三编 向量

怎样用常规处理方法解平面向量的几个综合应用题 .....	129
怎样盘活向量条件 .....	133
怎样利用三角形“垂心”的向量表示 .....	137
怎样用基向量法求空间的角 .....	140
怎样数形结合求解平面向量问题 .....	143
怎样解向量与立体几何中的探索性问题 .....	145
怎样利用 $ a ^2 b ^2 \geq (a \cdot b)^2$ 解决条件最值(不等式)问题 .....	147

### 第四编 三角

怎样巧求初相角 .....	153
怎样利用正、余弦函数有界性的解题功能 .....	156
怎样应用三角形面积公式 $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ .....	159
怎样用几何方法解三角问题 .....	164
怎样用构造法解三角题 .....	166
怎样用单位圆及三角函数线解题 .....	169
怎样解“是否存在”型三角问题 .....	172
怎样用三角代换解代数问题 .....	174
怎样从结构联想解三角问题 .....	178

### 第五编 立体几何

怎样求二面角大小 .....	183
怎样解立体几何中最值问题 .....	186
怎样用万能求积公式解历年高考求积题 .....	189
怎样剖析立体几何六类易错点 .....	194
怎样巧构几何体速解多球相切题 .....	197
怎样解在立体图形中透视平面轨迹问题 .....	200
怎样解立体几何中图形的翻折与展开问题 .....	203
怎样解矩形折叠问题 .....	206
怎样确定垂足的位置 .....	208
怎样解空间图形中的轨迹问题 .....	210
怎样解角与其在平面上的射影角的大小问题 .....	214
怎样对立体几何题进行整体处理 .....	217
怎样思考积木问题 .....	221



## 第六编 解析几何

怎样用平均值不等式求抛物线中对称问题的参数范围 .....	225
怎样作抛物线的切线 .....	227
怎样应用“斜率”解题 .....	229
怎样用三角判断方法判别直线与椭圆位置 .....	232
怎样解双曲线的几个定值问题 .....	234
怎样求解“直角走廊”问题 .....	237
怎样解曲线的切线问题 .....	239
怎样减少解析几何运算量的几种策略 .....	241
怎样解活跃在解析几何中的数列问题 .....	245
怎样用“和、差设点法”解题 .....	248
怎样用圆锥曲线定义解题 .....	251
怎样构造重合直线解题 .....	254
怎样用初等求法求过一点切线方程 .....	257
怎样在极坐标系中求曲线的交点 .....	259

## 第七编 线性规划

怎样寻找目标函数的几何意义 .....	263
怎样非常规运用“线性规划思想” .....	267
怎样用新视角求解线性规划问题 .....	269
怎样用线性规划思想解题 .....	271
怎样搭好线性规划平台巧解非线性规划题 .....	274
怎样应用线性规划思想 .....	277

## 第八编 方程

怎样巧用条件等式 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .....	281
怎样利用多变量方程组求轨迹方程 .....	284
怎样求方程整体解 .....	288

## 第九编 不等式

怎样对函数和不等式相互整合 .....	293
怎样解高考中多元不等式问题 .....	296
一个需要关注的不等式 .....	300
怎样用曲边图形面积估算法证一类不等式 .....	303

## 第十编 组合

怎样摆脱繁琐分类轻松推理计算 .....	307
怎样探究计数中的递推关系 .....	309

# 目录

## CONTENTS



怎样解组合数综合题 .....	312
怎样利用排列组合知识巧解两类并、交集问题 .....	315

## 第十一编 概率

怎样解几何概型中常见问题 .....	319
怎样对开锁问题中概率进行探究 .....	322
怎样利用概率中的化归、转化思想 .....	325
怎样解二元条件最值(范围)问题 .....	329

## 第十二编 高考

怎样对高考题进行多解 .....	335
怎样解高考三角函数解答题 .....	338
怎样解新高考中一类概率问题 .....	341
怎样解高考中的直线方程问题 .....	344
怎样解近年来高考中分段函数问题 .....	347
怎样对高考数学新增内容试题进行分类解析 .....	353
怎样解高考立体几何的综合应用题 .....	357
怎样避免高考数学解题中典型的错误 .....	362
怎样解高考中含参数的极值、最值问题 .....	369
怎样解高考数列客观题 .....	373
怎样解高考中数表、数列问题 .....	376
怎样解读高考数学的非逻辑思维 .....	381
怎样聚焦高考中导数的“交汇性” .....	384

## 第十三编 极限与导数

怎样巧用极限思想解题 .....	389
怎样解读高考试题中的导数问题 .....	391
怎样用导数解决含参函数的单调性问题 .....	396
怎样用导数证明一个几何猜想 .....	399
怎样用数集确界的一个命题解初等数学问题 .....	402

## 第十四编 通法

怎样运用子集思想确定参数取值范围 .....	407
怎样用变量代换解题 .....	410
怎样解恒成立问题 .....	412
怎样简化讨论 .....	418
怎样解数学综合题 .....	420
怎样用估计法巧解选择题 .....	425
怎样以“进化”求简化 .....	428



怎样实施化归思想方法 .....	431
怎样借形解题的几点注意 .....	434
怎样用数形结合的数学思想方法解题 .....	437
怎样在数学解题中数形结合 .....	440
怎样巧“换数”妙求值 .....	443
怎样利用数学建模解物理问题 .....	445
怎样利用数学解题中的对应关系 .....	446
怎样用运动、发展的观点探索数学问题 .....	449
怎样理解高考数学题中的“题眼” .....	453
怎样发现隐含条件提高解题能力 .....	458
怎样进行数学推广的基本模式 .....	461
怎样用基本元素分析法解题 .....	464
怎样使用楔形体积公式 .....	465
怎样避免数学解题中的策略性错误 .....	466
怎样对恒成立错解进行逻辑剖析 .....	469
怎样巧用构造图形法解题 .....	472
怎样利用“陷井题”，防治“错觉定势” .....	474
怎样解高考创新题 .....	477
怎样利用高中数学分类讨论思想 .....	481
怎样构建平台——回避分类讨论 .....	484
怎样设计和解答探索性试题 .....	488
怎样进行中学数学建模 .....	491
怎样对习题进行探究 .....	495
怎样用分离参数法解题 .....	497
怎样在解数学题的过程中挖掘隐含件 .....	500
怎样运用类比思维求解数学竞赛题 .....	505

# 目录

## CONTENTS





高中版 下卷(三)



# 第一编

# 函数



数学有其自身的美，这显然包括所得结果的对称与符合比例，没有多余的成份以及方法严格地适合于目的，在数学之外，这些只有在最美丽的作品中才能见到。歌德称雄伟的教堂为“冻结的音乐”，这是个恰当的提法；但也许称其为“石化的数学”更加好。即使对年轻的孩子们也可以并且应该强调在数学的简单性、对称性和完整性中所具有的美。当恰当地、具体地介绍了这一主题之后，内心的情绪就是感到美的欣赏，而不是感到丑陋不快。

J.W.A.Young



## 怎样用函数思想解题

不是函数看做函数,这就是函数思想的一种通俗表述.

具体而言,函数思想是指用函数的概念、图象和性质去分析问题、转化问题和解决问题的思维过程,它是一种通过构造函数从而应用函数性质解题的思想方法.深刻理解一般函数的图象和性质,掌握一些基本函数的特征,是利用函数思想解题的基础,而善于观察问题的结构、挖掘隐含条件、揭示内在联系,并产生由此及彼的联想,从而恰当地构造函数,是应用函数思想解题的关键.

**例 1** 对于非空集合  $A, B$ , 定义运算:  $A \oplus B = \{x \mid x \in A \cup B, \text{且 } x \notin A \cap B\}$ . 已知两个开区间  $M = (a, b), P = (c, d)$  其中  $a, b, c, d$  满足  $a + b < c + d, ab = cd < 0$ , 则  $M \oplus P$  等于( ).

- A.  $(a, b) \cup (c, d)$       B.  $(a, c) \cup (b, d)$   
C.  $(a, d) \cup (b, c)$       D.  $(c, a) \cup (d, b)$

**讲解** 显然,本题的关键是比较  $a, b, c, d$  的大小.注意到题设条件中含有两数的和  $a + b, c + d$  与两数的积  $ab, cd$ , 所以可通过构造二次函数,利用二次函数的性质来判断.

设  $ab = cd = t (t < 0)$ , 则  $a < 0 < b, c < 0 < d$ .

构造函数  $f(x) = x^2 - (a + b)x + t, g(x) = x^2 - (c + d)x + t$ , 则  $a, b$  为方程  $f(x) = 0$  的两个根,  $c, d$  为方程  $g(x) = 0$  的两个根.

因为  $f(c) = c^2 - (a + b)c + cd = c[(c + d) - (a + b)]$ , 又  $c < 0, a + b < c + d$ , 所以  $f(c) < 0$ , 故  $a < c < b$ .

同理可证  $c < b < d$ , 所以  $a < c < b < d$ .

故  $M \oplus P = (a, c) \cup (b, d)$ , 选 B.

**说明** 本题看上去与函数无关,但是我们通过构造函数,利用二次函数的价值原理,使问题轻而易举地得到了解决,避免了讨论.

**例 2** 不等式  $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 2x - 3) > x^2 - 2x - 9$  的解集为\_\_\_\_\_.

**讲解** 不等式两边都含有  $x^2 - 2x - 3$ , 因此可从换元入手.

令  $t = x^2 - 2x - 3 (t > 0)$ , 则原不等式可化为  $\log_{\frac{1}{5}} t > t - 6$ .

构造函数  $f(t) = \log_{\frac{1}{5}} t - t$ , 则  $f(t) > -6$ .

因为  $f(t)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数, 且  $f(5) = -6$ , 所以  $t > 0, f(t) > f(5)$ , 解得  $0 < t < 5$ , 即  $0 < x^2 - 2x - 3 < 5$ .

解得  $-2 < x < -1$  或  $3 < x < 4$ .

故原不等式的解集为  $(-2, -1) \cup (3, 4)$ .

**说明** 本题在构造出函数  $f(t) = \log_{\frac{1}{5}} t - t$  后, 关键是发现  $f(5) = -6$ .

**例 3** 已知  $3^a + 13^b = 17^a, 5^a + 7^b = 11^b$ , 试判断实数  $a, b$  的大小, 并证明你的结论.

**讲解** 由题设条件容易想到构造指数函数, 但是两个已知等式中都含有变量  $a, b$ , 这就为构造增添了困难, 然而消元更麻烦, 因此我们可通过放缩达到消元的目的.

题目答案为  $a < b$ . 可用反证法证明如下:

假设  $a \geq b$ , 则  $13^a \geq 13^b, 5^a \geq 5^b$ , 所以

$$17^a = 3^a + 13^b \leq 3^a + 13^a$$

$$11^b = 5^a + 7^b \geq 5^b + 7^b$$

即 
$$\left(\frac{3}{17}\right)^a + \left(\frac{13}{17}\right)^a \geq 1, \left(\frac{5}{11}\right)^b + \left(\frac{7}{11}\right)^b \leq 1$$

因为  $f(x) = \left(\frac{3}{17}\right)^x + \left(\frac{13}{17}\right)^x$  和  $g(x) = \left(\frac{5}{11}\right)^x + \left(\frac{7}{11}\right)^x$  在  $\mathbf{R}$  上均为减函数, 且

$$f(1) = \frac{3}{17} + \frac{13}{17} = \frac{16}{17} < 1 \leq f(a)$$

$$g(1) = \frac{5}{11} + \frac{7}{11} = \frac{12}{11} > 1 \geq f(b)$$

所以  $a < 1, b > 1$ , 即  $a < b$ , 与假设矛盾. 故  $a < b$ .

**说明** 本题通过放缩变换, 将二次问题转化为一元问题, 为构造函数扫除了障碍.

#### 例 4 解方程组

$$\begin{cases} (1 + 4^{2x-y}) \cdot 5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} & \text{①} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 & \text{②} \end{cases}$$

**讲解** 这是一个混合型方程组, 不易整体解决. 注意到式 ① 中多次出现  $2x - y$ , 因此可先换元, 然后根据问题的结论设法构造一个恰当的函数, 分而治之.

在式 ① 中, 令  $u = 2x - y$ , 则原方程可化为

$$5\left(\frac{1}{5}\right)^u + 5\left(\frac{4}{5}\right)^u = 1 + 2 \cdot 2^u$$

构造函数  $f(u) = 5\left(\frac{1}{5}\right)^u + 5\left(\frac{4}{5}\right)^u - 2 \cdot 2^u - 1$ , 则  $f(u)$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数, 且  $f(1) = 0$ .

所以  $u = 1$ , 即  $2x = y + 1$ .

将  $2x = y + 1$  代入 ②, 得

$$g(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$$

因为

$$\begin{aligned} g'(y) &= 3y^2 + 2 + \frac{2y+1}{y^2+y+1} = \frac{3y^4 + 3y^3 + 5y^2 + 4y + 3}{y^2 + y + 1} = \\ &= \frac{3y^2(y + \frac{1}{2})^2 + (2y+1)^2 + \frac{1}{4}y^2 + 2}{(y + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} > 0 \end{aligned}$$

所以  $g(y)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数, 且  $g(-1) = 0$ .

所以  $y = -1$ , 从而  $x = \frac{y+1}{2} = 0$ .

经检验,  $x = 0, y = -1$  为原方程组的解.

**说明** 本题的关键是构造单调递减函数  $f(u)$  和单调递增函数  $g(y)$ . 函数  $g(y)$  的单调性不容易判断, 我们通过求导、配方才使问题得到了解决.

**例 5** 设  $\triangle ABC$  的三边长分别为  $a, b, c$ , 记  $f(\lambda) = \frac{a}{\lambda a + b + c} + \frac{b}{\lambda b + c + a} + \frac{c}{\lambda c + a + b}$ .

心得 体会 拓广 疑问

心得 体会 拓广 疑问

证明:(1) 当  $-1 < \lambda < 1$  时,  $\frac{3}{\lambda+2} \leq f(\lambda) < \frac{2}{\lambda+1}$ ;

(2) 当  $\lambda > 1$  时,  $\frac{2}{\lambda+1} < f(\lambda) \leq \frac{3}{\lambda+2}$ .

讲解 令  $S = a + b + c$ ,  $g(x) = \frac{1}{S + (\lambda - 1)x}$ ,  $x \in (0, S)$ .

(1) 当  $-1 < \lambda < 1$  时, 因为  $g(x)$  在  $(0, S)$  上是增函数, 所以, 对任意的  $x \in (0, S)$ , 有

$$\left(x - \frac{S}{3}\right) \left[g(x) - g\left(\frac{S}{3}\right)\right] \geq 0$$

即  $\frac{\lambda+2}{3} \cdot \frac{x}{S + (\lambda-1)x} \geq \frac{3x}{S(\lambda+2)} - \frac{1}{\lambda+2} + \frac{1}{3}$

由于  $a, b, c \in (0, S)$ , 所以把上式中的  $x$  分别换成  $a, b, c$ , 将所得三个不等式相加, 得

$$\frac{\lambda+2}{3} \cdot f(\lambda) \geq \frac{3(a+b+c)}{S(\lambda+2)} - \frac{3}{\lambda+2} + \frac{3}{3} = 1$$

所以  $f(\lambda) \geq \frac{3}{\lambda+2}$ . 又由  $S > 2a$  及  $-1 < \lambda < 1$  得

$$\frac{a}{S + (\lambda-1)a} < \frac{2a}{(\lambda+1)S}$$

同理,  $\frac{b}{S + (\lambda-1)b} < \frac{2b}{(\lambda+1)S}$ ,  $\frac{c}{S + (\lambda-1)c} < \frac{2c}{(\lambda+1)S}$ . 三式相加, 再将  $S = a + b + c$  代入, 即得  $f(\lambda) < \frac{2}{\lambda+1}$ .

综上所述, 当  $-1 < \lambda < 1$  时, 有  $\frac{3}{\lambda+2} \leq f(\lambda) < \frac{2}{\lambda+1}$ .

(2) 当  $\lambda > 1$  时, 因为  $g(x)$  在  $(0, S)$  上是减函数, 所以, 对任意的  $x \in (0, S)$ , 有

$$\left(x - \frac{S}{3}\right) \left[g(x) - g\left(\frac{S}{3}\right)\right] \leq 0$$

即  $\frac{\lambda+2}{3} \cdot \frac{x}{S + (\lambda-1)x} \leq \frac{3x}{S(\lambda+2)} - \frac{1}{\lambda+2} + \frac{1}{3}$

将上式中的  $x$  分别换成  $a, b, c$ , 再把所得三个不等式相加, 得

$$\frac{\lambda+2}{3} \cdot f(\lambda) \leq \frac{3(a+b+c)}{S(\lambda+2)} - \frac{3}{\lambda+2} + \frac{3}{3} = 1$$

所以  $f(\lambda) \leq \frac{3}{\lambda+2}$

又由  $S > 2a$  及  $\lambda > 1$ , 得  $\frac{a}{\lambda a + b + c} > \frac{2a}{(\lambda+1)S}$ .

三式相加, 即得  $f(\lambda) > \frac{2}{\lambda+1}$ .

综上所述, 当  $\lambda > 1$  时,  $\frac{2}{\lambda+1} < f(\lambda) \leq \frac{3}{\lambda+2}$ .

说明 本题应用了单调函数定义的一个等价形式: 若  $f(x)$  在区间  $D$  上是增(减)函数, 则对于任意的  $x_1, x_2 \in D$ , 有  $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0$  ( $\leq 0$ ).

例 6 试求出所有的正整数  $k$ , 使得对任意满足不等式  $k(ab + bc + ca) > 5(a^2 + b^2 + c^2)$  的正数  $a, b, c$ , 一定存在三边长分别为  $a, b, c$  的三角形.

讲解 为了寻求正整数  $k$ , 可先找出  $k$  的上、下量, 再证明所找到的  $k$  满足题设条件.

因为  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ , 所以  $k > 5$ .

取不能构成三角形的  $a, b, c$ , 如  $a = b = 1, c = 2$ , 则  $k(1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 1) \leq 5(1^2 + 1^2 + 2^2)$ , 得  $k \leq 6$ .

所以  $5 < k \leq 6$ , 即  $k = 6$ .

下面证明: 若正数  $a, b, c$  满足不等式

$$6(ab + bc + ca) > 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

则  $a, b, c$  必可以构成三角形.

不妨设  $0 < a \leq b \leq c$ , 则  $a, b, c$  构成三角形的充分必要条件是  $a + b > c$ .

构造函数  $f(x) = 5x^2 - 6(a+b)x + 5a^2 + 5b^2 - 6ab$ , 则  $f(c) < 0$ .

而  $f(a+b) = 4(a-b)^2 \geq 0$

所以  $f(a+b) \geq 0 > f(c)$

假设  $a+b \leq c$ , 则由  $a+b, c \in \left[ \frac{3}{5}(a+b), +\infty \right)$  知  $f(a+b) \leq f(c)$ , 矛盾(因为  $f(x)$  在顶点右侧单调增).

故  $a+b > c$ , 即  $a, b, c$  必构成三角形.

**说明** 要比较  $a+b$  与  $c$  的大小, 可先比较  $f(a+b)$  与  $f(c)$  的大小.

**例7** 实数数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = -a_k + \frac{1}{2-a_k}, k = 1, 2, 3, \dots$ . 证

明:  $\left[ \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} - 1 \right]^n \leq \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n \cdot \left( \frac{1}{a_1} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{a_2} - 1 \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{1}{a_n} - 1 \right)$ .

**讲解** 先用数学归纳法证明  $0 < a_n \leq \frac{1}{2}, n = 1, 2, \dots$ .

当  $n = 1$  时, 命题显然成立.

假设命题对  $n = k (k \geq 1)$  成立, 即  $0 < a_k \leq \frac{1}{2}$ .

设  $f(x) = -x + \frac{1}{2-x}, x \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right]$ , 易知  $f(x)$  是减函数. 于是,  $a_{k+1} = f(a_k) \leq f(0) = \frac{1}{2}, a_{k+1} = f(a_k) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} > 0$ .

因此, 命题对  $n = k+1$  也成立.

故对一切  $n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ .

原不等式等价于

$$\left( \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \right)^n \cdot \left[ \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} - 1 \right]^n \leq \left( \frac{1}{a_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{a_2} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{a_n} - 1 \right)$$

构造函数  $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right), x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ , 则  $g(x)$  是凸函数, 即对  $0 < x_1 \leq \frac{1}{2}, 0 < x_2 \leq \frac{1}{2}$ , 有

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}$$

事实上

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} \Leftrightarrow$$

心得体会 拓广疑问

心得体会 拓广 疑问

$$\left(\frac{2}{x_1 + x_2} - 1\right)^2 \leq \left(\frac{1}{x_1} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - 1\right) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

所以由琴生不等式,得

$$g\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_n)}{n}$$

即

$$\left(\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} - 1\right)^n \leq \left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$$

另一方面,由题设及柯西不等式,得

$$\sum_{i=1}^n (1 - a_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i + a_{i+1}} - n \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n (a_i + a_{i+1})} - n =$$

$$\frac{n^2}{a_{n+1} - a_1 + 2\sum_{i=1}^n a_i} - n \geq$$

$$\frac{n^2}{2\sum_{i=1}^n a_i} - n = n\left(\frac{n}{2\sum_{i=1}^n a_i} - 1\right)$$

则

$$\frac{\sum_{i=1}^n (1 - a_i)}{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i} \left(\frac{n}{2\sum_{i=1}^n a_i} - 1\right)$$

故

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^n \cdot \left[\frac{n}{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} - 1\right]^n \leq \\ & \left[\frac{(1 - a_1) + (1 - a_2) + \cdots + (1 - a_n)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right]^n \leq \\ & \left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \end{aligned}$$

从而,原不等式成立.

**说明** 本题两次构造函数,使这个看上去与函数无关的数列问题得到了解决.事实上,数列是一种特殊的函数.

(广隶)

## 怎样对函数综合题进行多角度求解

**题目** 已知实数  $s, t$  满足  $9^s + 9^t = 3^{s+1} + 3^{t+1}$ , 求  $u = 3^s + 3^t$  的取值范围.

**分析** 本题是一道具有限制条件的函数最值问题, 充分挖掘题意条件, 灵活利用所学知识, 从函数与方程思想、基本不等式法、三角换元法、构造法借助向量数量积以及利用线性规划知识等角度入手求解.

**角度1 (函数与方程)** 条件  $9^s + 9^t = 3^{s+1} + 3^{t+1}$  可以看成关于  $3^s, 3^t$  的方程, 利用  $u = 3^s + 3^t$  可以将方程  $9^s + 9^t = 3^{s+1} + 3^{t+1}$  整理成关于  $3^s$  的一元二次方程  $9^s + (u - 3^s)^2 = 3u$ , 为了求解简便, 可借助换元思想, 令  $3^s = x$ , 得关于  $x$  的一元二次方程  $2x^2 - 2ux + u^2 - 3u = 0$ , 根据方程有解的条件得到所求.

**解法1** 令  $x = 3^s > 0$ , 则  $3^t = u - x > 0, x^2 + (u - x)^2 = 3u$ , 即  $2x^2 - 2ux + u^2 - 3u = 0$ , 它在  $(0, +\infty)$  内有两解, 则  $\begin{cases} \Delta = 4u^2 - 8(u^2 - 3u) \geq 0 \\ u^2 - 3u > 0 \\ u > 0 \end{cases}$ , 解得  $3 < u \leq 6$ . 即  $u = 3^s + 3^t$  的取值范围为  $3 < u \leq 6$ .

**角度2 (基本不等式)** 根据基本不等式  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  可得  $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ , 而当  $a > 0, b > 0$  时,  $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 > a^2 + b^2$ . 可将  $9^s + 9^t = 3^{s+1} + 3^{t+1}$  建立不等关系来求解.

**解法2** 令  $a = 3^s > 0, b = 3^t > 0$ , 由  $9^s + 9^t = 3^{s+1} + 3^{t+1}$  得  $a^2 + b^2 = 3(a + b) = 3u > 0$ . 而当  $a > 0, b > 0$  时,  $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 > a^2 + b^2$ , 则  $6u \geq u^2 > 3u (u > 0)$ , 解得  $3 < u \leq 6$ , 即  $u = 3^s + 3^t$  的取值范围为  $3 < u \leq 6$ .

**角度3 (三角换元)** 根据题意条件借助等式特点可以进行三角换元, 对角进行恰当的限制, 利用三角函数求值得到所求.

**解法3** 由  $9^s + 9^t = 3^{s+1} + 3^{t+1}$  得

$$(3^s - \frac{3}{2})^2 + (3^t - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{2}$$

于是令  $3^s = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos \alpha > 0, 3^t = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \alpha > 0$ , 则  $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ .

所以  $\alpha + \frac{\pi}{4} \in (0, \pi), \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \in (0, 1]$ , 故

$$u = 3^s + 3^t = 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha) = 3 + 3\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \in (3, 6]$$

即  $u = 3^s + 3^t$  的取值范围为  $3 < u \leq 6$ .

**角度4 (线性规划)** 根据题意可知本题是具有限制条件的二元一次函数的最值问题, 可利用线性规划知识求解最值.

**解法4** 令  $x = 3^s > 0, y = 3^t > 0$ , 则  $x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0 (x > 0, y > 0)$ , 它表示以  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  为圆心, 半径为  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$  的圆在第一象限内的部分(半圆).

目标函数为  $u = x + y$ , 如图1可知: 当直线  $u = x + y$  平移到虚线位置时直线为  $x + y = 3$ ;

当直线平移到与半圆相切时直线为  $x + y = 6$ .

故所求  $u = 3^s + 3^t$  的取值范围为  $3 < u \leq 6$ .

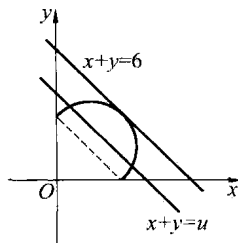


图1



**角度 5** (构造法) 利用构造法, 巧妙根据题意条件构造向量, 凭借向量间的夹角的范围, 利用向量数量积得到所求.

**解法 5** 由  $9^s + 9^t = 3^{s+1} + 3^{t+1}$  及  $u = 3^s + 3^t$  得  $(3^s)^2 + (3^t)^2 = 3u$ .

设  $\mathbf{a} = (3^s, 3^t)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 1)$ , 则  $|\mathbf{a}| = \sqrt{9^s + 9^t} = \sqrt{3u}$ ,  $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$ ,  $u = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

而  $3^s > 0, 3^t > 0, (3^s - \frac{3}{2})^2 + (3^t - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{2}$ , 则  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的夹角  $\theta$  的范围是  $[0, \frac{\pi}{4})$ .

于是  $u = 3^s + 3^t = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta = \sqrt{6u} \cos \theta \in (\sqrt{3u}, \sqrt{6u}]$ , 即  $\sqrt{3u} < u \leq \sqrt{6u}$ , 解得  $3 < u \leq 6$ , 故所求  $u = 3^s + 3^t$  的取值范围为  $3 < u \leq 6$ .

(任宪伟)

心得 体会 拓广 疑问