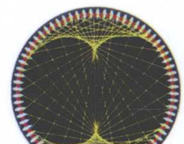
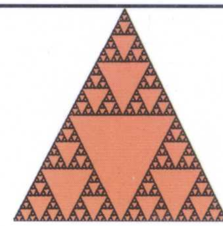
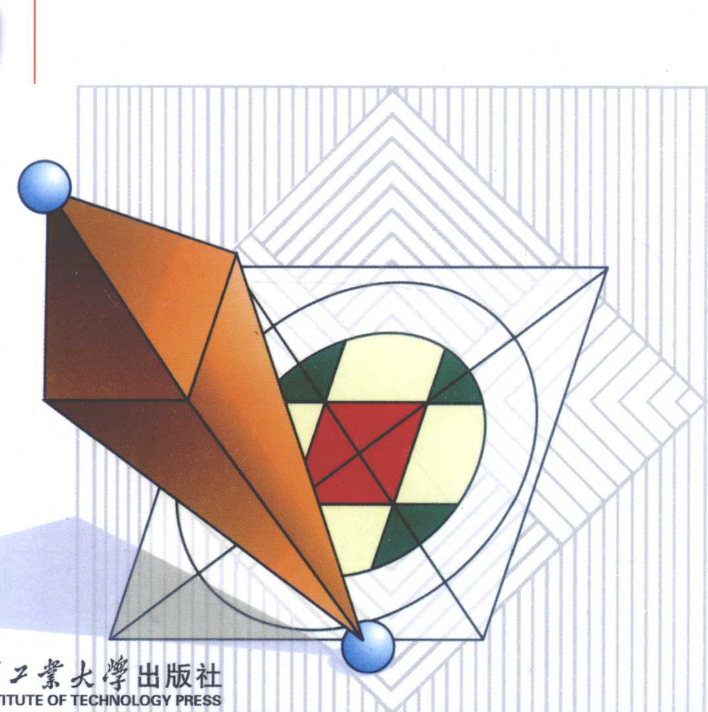


高中版 下卷(三)



新编中学数学解题方法全书

刘培杰 主编

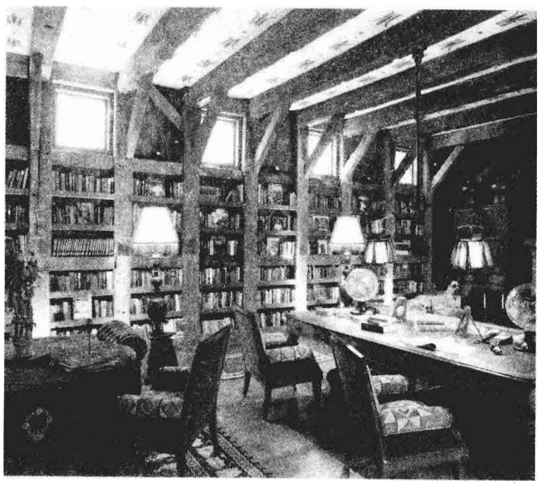


哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高中版 下卷(三)

新编中学数学解题方法全书

刘培杰　主编



数学语言提供了表达精确思想的主要手段。为了取得更加深刻的、影响远大的结果，必须依靠思维过程。但若没有数学语言的支持，这种过程就无法贯彻到底。在数学符号中好像存贮了一定量的智力，这种智力释放出来时就能产生几乎是爆炸性的威力。这就像是强大的发动机，我们借助它竖起智力结构；如果没有这种支持，我们的能力就无法进入这种结构。

R.D.Carmichael

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

本书内容包括函数、数列、向量、三角、立体几何等共十四部分，涵盖了大部分高中数学的知识点.本书以专题的形式对中学数学中的重点、难点进行了归纳、总结，可使学生深入理解数学概念，灵活使用解题方法，可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力，适合高中师生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书:高中版.下卷.3/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2010.6

ISBN 978-7-5603-3015-0

Ⅰ.①新… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①数学课-高中-解题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 078582 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 尹 凡
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 32.5 字数 786 千字
版 次 2010 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3015-0
印 数 1~3 000 册
定 价 58.00 元

目录
CONTENTS

第一编　函数

第二编　数列

目录 CONTENTS

第三编 向量

第四编 三角

第五编 立体几何

第六编 解析几何

第七编 线性规划

第八编 方程

第九编 不等式

第十编 组合

目录 CONTENTS

第十一编 概率

第十二编 高考

第十三编 极限与导数

第十四编 通法

目录

CONTENTS

第一编

函 数

数学有其自身的美，这显然包括所得结果的对称与符合比例，没有多余的成份以及方法严格地适合于目的，在数学之外，这些只有在最美丽的作品中才能见到。歌德称雄伟的教堂为“冻结的音乐”，这是个恰当的提法；但也许称其为“石化的数学”更加好。即使对年轻的孩子们也可以并且应该强调在数学的简单性、对称性和完整性中所具有的美。当恰当地、具体地介绍了这一主题之后，内心的情绪就是感到美的欣赏，而不是感到丑陋不快。

J.W.A.Young

心得 体会 拓广 疑问

怎样用函数思想解题

不是函数看做函数，这就是函数思想的一种通俗表述.

具体而言，函数思想是指用函数的概念、图象和性质去分析问题、转化问题和解决问题的思维过程，它是一种通过构造函数从而应用函数性质解题的思想方法.深刻理解一般函数的图象和性质，掌握一些基本函数的特征，是利用函数思想解题的基础，而善于观察问题的结构、挖掘隐含条件、揭示内在联系，并产生由此及彼的联想，从而恰当地构造函数，是应用函数思想解题的关键.

例1 对于非空集合 A,B，定义运算：$A\oplus B=\{x\mid x\in A\cup B$，且 $x\notin A\cap B\}$.已知两个开区间 $M=(a,b)$，$P=(c,d)$ 其中 a,b,c,d 满足 $a+b<c+d$，$ab=cd<0$，则 $M\oplus P$ 等于(　　).

A.$(a,b)\cup(c,d)$　　　　B.$(a,c)\cup(b,d)$

C.$(a,d)\cup(b,c)$　　　　D.$(c,a)\cup(d,b)$

讲解 显然，本题的关键是比较 a,b,c,d 的大小.注意到题设条件中含有两数的和 $a+b$，$c+d$ 与两数的积 ab，cd，所以可通过构造二次函数，利用二次函数的性质来判断.

设 $ab=cd=t(t<0)$，则 $a<0<b$，$c<0<d$.

构造函数 $f(x)=x^2-(a+b)x+t$，$g(x)=x^2-(c+d)x+t$，则 a,b 为方程 $f(x)=0$ 的两个根，c,d 为方程 $g(x)=0$ 的两个根.

因为 $f(c)=c^2-(a+b)c+cd=c[(c+d)-(a+b)]$，又 $c<0$，$a+b<c+d$，所以 $f(c)<0$，故 $a<c<b$.

同理可证 $c<b<d$，所以 $a<c<b<d$.

故 $M\oplus P=(a,c)\cup(b,d)$，选B.

说明 本题看上去与函数无关，但是我们通过构造函数，利用二次函数的价值原理，使问题轻而易举地得到了解决，避免了讨论.

例2 不等式 $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-2x-3)>x^2-2x-9$ 的解集为________.

讲解 不等式两边都含有 x^2-2x-3，因此可从换元入手.

令 $t=x^2-2x-3(t>0)$，则原不等式可化为 $\log_{\frac{1}{5}}t>t-6$.

构造函数 $f(t)=\log_{\frac{1}{5}}t-t$，则 $f(t)>-6$.

因为 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且 $f(5)=-6$，所以 $t>0$，$f(t)>f(5)$，解得 $0<t<5$，即 $0<x^2-2x-3<5$.

解得 $-2<x<-1$ 或 $3<x<4$.

故原不等式的解集为 $(-2,-1)\cup(3,4)$.

说明 本题在构造出函数 $f(t)=\log_{\frac{1}{5}}t-t$ 后，关键是发现 $f(5)=-6$.

例3 已知 $3^a+13^b=17^a$，$5^a+7^b=11^b$，试判断实数 a,b 的大小，并证明你的结论.

讲解 由题设条件容易想到构造指数函数，但是两个已知等式中都含有变量 a,b，这就为构造增添了困难，然而消元更麻烦，因此我们可通过放缩达到消元的目的.

题目答案为 $a<b$.可用反证法证明如下：

心得 体会 拓广 疑问

假设 $a \geqslant b$,则 $13^a \geqslant 13^b, 5^a \geqslant 5^b$,所以

$$17^a = 3^a + 13^b \leqslant 3^a + 13^a$$

$$11^b = 5^a + 7^b \geqslant 5^b + 7^b$$

即

$$(\frac{3}{17})^a + (\frac{13}{17})^a \geqslant 1, (\frac{5}{11})^b + (\frac{7}{17})^b \leqslant 1$$

因为 $f(x) = (\frac{3}{17})^x + (\frac{13}{17})^x$ 和 $g(x) = (\frac{5}{11})^x + (\frac{7}{11})^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上均为减函数,且

$$f(1) = \frac{3}{17} + \frac{13}{17} = \frac{16}{17} < 1 \leqslant f(a)$$

$$g(1) = \frac{5}{11} + \frac{7}{11} = \frac{12}{11} > 1 \geqslant f(b)$$

所以 $a < 1, b > 1$,即 $a < b$,与假设矛盾.故 $a < b$.

说明 本题通过放缩变换,将二次问题转化为一元问题,为构造函数扫除了障碍.

例 4 解方程组

$$\begin{cases} (1 + 4^{2x-y}) \cdot 5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} & ① \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 & ② \end{cases}$$

讲解 这是一个混合型方程组,不易整体解决.注意到式 ① 中多次出现 $2x - y$,因此可先换元,然后根据问题的结论设法构造一个恰当的函数,分而治之.

在式 ① 中,令 $u = 2x - y$,则原方程可化为

$$5(\frac{1}{5})^u + 5(\frac{4}{5})^u = 1 + 2 \cdot 2^u$$

构造函数 $f(u) = 5(\frac{1}{5})^u + 5(\frac{4}{5})^u - 2 \cdot 2^u - 1$,则 $f(u)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,且 $f(1) = 0$.

所以 $u = 1$,即 $2x = y + 1$.

将 $2x = y + 1$ 代入 ②,得

$$g(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$$

因为

$$g'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y+1}{y^2+y+1} = \frac{3y^4 + 3y^3 + 5y^2 + 4y + 3}{y^2 + y + 1} = \frac{3y^2(y + \frac{1}{2})^2 + (2y+1)^2 + \frac{1}{4}y^2 + 2}{(y + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} > 0$$

所以 $g(y)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,且 $g(-1) = 0$.

所以 $y = -1$,从而 $x = \frac{y+1}{2} = 0$.

经检验,$x = 0, y = -1$ 为原方程组的解.

说明 本题的关键是构造单调递减函数 $f(u)$ 和单调递增函数 $g(y)$.函数 $g(y)$ 的单调性不容易判断,我们通过求导、配方才使问题得到了解决.

例 5 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c,记 $f(\lambda) = \frac{a}{\lambda a + b + c} + \frac{b}{\lambda b + c + a} + \frac{c}{\lambda c + a + b}$.

心得 体会 拓广 疑问

证明:(1) 当 $-1<\lambda<1$ 时,$\frac{3}{\lambda+2}\leqslant f(\lambda)<\frac{2}{\lambda+1}$;

(2) 当 $\lambda>1$ 时,$\frac{2}{\lambda+1}<f(\lambda)\leqslant\frac{3}{\lambda+2}$.

讲解 令 $S=a+b+c, g(x)=\frac{1}{S+(\lambda-1)x}, x\in(0,S)$.

(1) 当 $-1<\lambda<1$ 时,因为 $g(x)$ 在 $(0,S)$ 上是增函数,所以,对任意的 $x\in(0,S)$,有

$$\left(x-\frac{S}{3}\right)\left[g(x)-g\left(\frac{S}{3}\right)\right]\geqslant 0$$

即
$$\frac{\lambda+2}{3}\cdot\frac{x}{S+(\lambda-1)x}\geqslant\frac{3x}{S(\lambda+2)}-\frac{1}{\lambda+2}+\frac{1}{3}$$

由于 $a,b,c\in(0,S)$,所以把上式中的 x 分别换成 a,b,c,将所得三个不等式相加,得

$$\frac{\lambda+2}{3}\cdot f(\lambda)\geqslant\frac{3(a+b+c)}{S(\lambda+2)}-\frac{3}{\lambda+2}+\frac{3}{3}=1$$

所以 $f(\lambda)\geqslant\frac{3}{\lambda+2}$.又由 $S>2a$ 及 $-1<\lambda<1$ 得

$$\frac{a}{S+(\lambda-1)a}<\frac{2a}{(\lambda+1)S}$$

同理,$\frac{b}{S+(\lambda-1)b}<\frac{2b}{(\lambda+1)S}$,$\frac{c}{S+(\lambda-1)c}<\frac{2c}{(\lambda+1)S}$.三式相加,再将 $S=a+b+c$ 代入,即得 $f(\lambda)<\frac{2}{\lambda+1}$.

综上所述,当 $-1<\lambda<1$ 时,有 $\frac{3}{\lambda+2}\leqslant f(\lambda)<\frac{2}{\lambda+1}$.

(2) 当 $\lambda>1$ 时,因为 $g(x)$ 在 $(0,S)$ 上是减函数,所以,对任意的 $x\in(0,S)$,有

$$\left(x-\frac{S}{3}\right)\left[g(x)-g\left(\frac{S}{3}\right)\right]\leqslant 0$$

即
$$\frac{\lambda+2}{3}\cdot\frac{x}{S+(\lambda-1)x}\leqslant\frac{3x}{S(\lambda+2)}-\frac{1}{\lambda+2}+\frac{1}{3}$$

将上式中的 x 分别换成 a,b,c,再把所得三个不等式相加,得

$$\frac{\lambda+2}{3}\cdot f(\lambda)\leqslant\frac{3(a+b+c)}{S(\lambda+2)}-\frac{3}{\lambda+2}+\frac{3}{3}=1$$

所以
$$f(\lambda)\leqslant\frac{3}{\lambda+2}$$

又由 $S>2a$ 及 $\lambda>1$,得 $\frac{a}{\lambda a+b+c}>\frac{2a}{(\lambda+1)S}$.

三式相加,即得 $f(\lambda)>\frac{2}{\lambda+1}$.

综上所述,当 $\lambda>1$ 时,$\frac{2}{\lambda+1}<f(\lambda)\leqslant\frac{3}{\lambda+2}$.

说明 本题应用了单调函数定义的一个等价形式:若 $f(x)$ 在区间 D 上是增(减)函数,则对于任意的 $x_1,x_2\in D$,有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\geqslant 0(\leqslant 0)$.

例 6 试求出所有的正整数 k,使得对任意满足不等式 $k(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2)$ 的正数 a,b,c,一定存在三边长分别为 a,b,c 的三角形.

讲解 为了寻求正整数 k,可先找出 k 的上、下量,再证明所找到的 k 满足题设条件.

因为 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$,所以 $k>5$.

心得 体会 拓广 疑问

取不能构成三角形的 a,b,c,如 $a=b=1,c=2$,则 $k(1\times1+1\times2+2\times1)\leqslant5(1^2+1^2+2^2)$,得 $k\leqslant6$.

所以 $5<k\leqslant6$,即 $k=6$.

下面证明:若正数 a,b,c 满足不等式

$$6(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2)$$

则 a,b,c 必可以构成三角形.

不妨设 $0<a\leqslant b\leqslant c$,则 a,b,c 构成三角形的充分必要条件是 $a+b>c$.

构造函数 $f(x)=5x^2-6(a+b)x+5a^2+5b^2-6ab$,则 $f(c)<0$.

而
$$f(a+b)=4(a-b)^2\geqslant0$$
所以
$$f(a+b)\geqslant0>f(c)$$

假设 $a+b\leqslant c$,则由 $a+b,c\in\left[\frac{3}{5}(a+b),+\infty\right)$ 知 $f(a+b)\leqslant f(c)$,矛盾(因为 $f(x)$ 在顶点右侧单调增).

故 $a+b>c$,即 a,b,c 必构成三角形.

说明　要比较 $a+b$ 与 c 的大小,可先比较 $f(a+b)$ 与 $f(c)$ 的大小.

例7　实数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2},a_{k+1}=-a_k+\frac{1}{2-a_k},k=1,2,3,\cdots$.证明:$\left[\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right]^n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$.

讲解　先用数学归纳法证明 $0<a_n\leqslant\frac{1}{2},n=1,2,\cdots$.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.

假设命题对 $n=k(k\geqslant1)$ 成立,即 $0<a_k\leqslant\frac{1}{2}$.

设 $f(x)=-x+\frac{1}{2-x},x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,易知 $f(x)$ 是减函数.于是,$a_{k+1}=f(a_k)\leqslant f(0)=\frac{1}{2},a_{k+1}=f(a_k)\geqslant f(\frac{1}{2})=\frac{1}{6}>0$.

因此,命题对 $n=k+1$ 也成立.

故对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $0<a_n\leqslant\frac{1}{2}$.

原不等式等价于

$$\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^n\cdot\left[\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right]^n\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$$

构造函数 $g(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-1\right),x\in(0,\frac{1}{2}]$,则 $g(x)$ 是凸函数,即对 $0<x_1\leqslant\frac{1}{2},0<x_2\leqslant\frac{1}{2}$,有

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$$

事实上

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\Leftrightarrow$$

心得 体会 拓广 疑问

$$\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right) \Leftrightarrow$$
$$(x_1-x_2)^2 \geqslant 0$$

所以由琴生不等式,得

$$g\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)}{n}$$

即

$$\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-1\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$$

另一方面,由题设及柯西不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}(1-a_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+a_{i+1}}-n \geqslant \frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})}-n =$$
$$\frac{n^2}{a_{n+1}-a_1+2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-n \geqslant$$
$$\frac{n^2}{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-n = n\left(\frac{n}{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-1\right)$$

则

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i} \geqslant \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\left(\frac{n}{2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}-1\right)$$

故

$$\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^n \cdot \left[\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right]^n \leqslant$$
$$\left[\frac{(1-a_1)+(1-a_2)+\cdots+(1-a_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right]^n \leqslant$$
$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$$

从而,原不等式成立.

说明 本题两次构造函数,使这个看上去与函数无关的数列问题得到了解决.事实上,数列是一种特殊的函数.

(广隶)

怎样对函数综合题进行多角度求解

题目　已知实数 s,t 满足 $9^s+9^t=3^{s+1}+3^{t+1}$，求 $u=3^s+3^t$ 的取值范围.

分析　本题是一道具有限制条件的函数最值问题，充分挖掘题意条件，灵活利用所学知识，从函数与方程思想、基本不等式法、三角换元法、构造法借助向量数量积以及利用线性规划知识等角度入手求解.

角度1　(函数与方程)条件 $9^s+9^t=3^{s+1}+3^{t+1}$ 可以看成关于 $3^s,3^t$ 的方程，利用 $u=3^s+3^t$ 可以将方程 $9^s+9^t=3^{s+1}+3^{t+1}$ 整理成关于 3^s 的一元二次方程 $9^s+(u-3^s)^2=3u$，为了求解简便，可借助换元思想，令 $3^s=x$，得关于 x 的一元二次方程 $2x^2-2ux+u^2-3u=0$，根据方程有解的条件得到所求.

解法1　令 $x=3^s>0$，则 $3^t=u-x>0$，$x^2+(u-x)^2=3u$，即 $2x^2-2ux+u^2-3u=0$，它在 $(0,+\infty)$ 内有两解，则 $\begin{cases}\Delta=4u^2-8(u^2-3u)\geqslant 0\\ u^2-3u>0\\ u>0\end{cases}$，解得 $3<u\leqslant 6$. 即 $u=3^s+3^t$ 的取值范围为 $3<u\leqslant 6$.

角度2　(基本不等式)根据基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 可得 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，而当 $a>0,b>0$ 时，$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2>a^2+b^2$. 可将 $9^s+9^t=3^{s+1}+3^{t+1}$ 建立不等关系来求解.

解法2　令 $a=3^s>0,b=3^t>0$，由 $9^s+9^t=3^{s+1}+3^{t+1}$ 得 $a^2+b^2=3(a+b)=3u>0$. 而当 $a>0,b>0$ 时，$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2>a^2+b^2$，则 $6u\geqslant u^2>3u(u>0)$，解得 $3<u\leqslant 6$，即 $u=3^s+3^t$ 的取值范围为 $3<u\leqslant 6$.

角度3　(三角换元)根据题意条件借助等式特点可以进行三角换元，对角进行恰当的限制，利用三角函数求值得到所求.

解法3　由 $9^s+9^t=3^{s+1}+3^{t+1}$ 得

$$(3^s-\frac{3}{2})^2+(3^t-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{2}$$

于是令 $3^s=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\alpha>0$，$3^t=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\alpha>0$，则 $\alpha\in(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$. 所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in(0,\pi)$，$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\in(0,1]$，故

$$u=3^s+3^t=3+\frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=3+3\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\in(3,6]$$

即 $u=3^s+3^t$ 的取值范围为 $3<u\leqslant 6$.

角度4　(线性规划)根据题意可知本题是具有限制条件的二元一次函数的最值问题，可利用线性规划知识求解最值.

解法4　令 $x=3^s>0,y=3^t>0$，则 $x^2+y^2-3x-3y=0(x>0,y>0)$，它表示以 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ 为圆心，半径为 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 的圆在第一象限内的部分(半圆).

目标函数为 $u=x+y$，如图1可知：当直线 $u=x+y$ 平移到虚线位置时直线为 $x+y=3$；

当直线平移到与半圆相切时直线为 $x+y=6$.

故所求 $u=3^s+3^t$ 的取值范围为 $3<u\leqslant 6$.

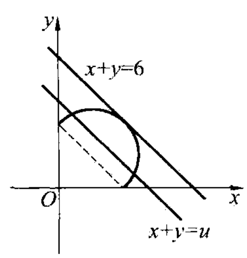


图1

角度5 （构造法）利用构造法，巧妙根据题意条件构造向量，凭借向量间的夹角的范围，利用向量数量积得到所求.

解法5 由 $9^s+9^t=3^{s+1}+3^{t+1}$ 及 $u=3^s+3^t$ 得 $(3^s)^2+(3^t)^2=3u$.

设 $\boldsymbol{a}=(3^s,3^t)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{9^s+9^t}=\sqrt{3u}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$u=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

而 $3^s>0,3^t>0,(3^s-\frac{3}{2})^2+(3^t-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{2}$，则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的范围是 $[0,\frac{\pi}{4})$.

于是 $u=3^s+3^t=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\sqrt{6u}\cos\theta\in(\sqrt{3u},\sqrt{6u}]$，即 $\sqrt{3u}<u\leqslant\sqrt{6u}$，解得 $3<u\leqslant6$，故所求 $u=3^s+3^t$ 的取值范围为 $3<u\leqslant6$.

（任宪伟）

心得 体会 拓广 疑问