

数学

经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

选修 4-2

矩阵与变换



凤凰出版传媒集团



江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

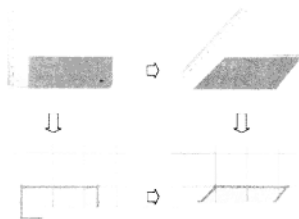
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过
普通高中课程标准实验教科书

数学

矩阵与变换

juzhen yu bianhuan

主 编：单 增
副主编：李善良 陈永高 王巧林



凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

凤凰出版传媒

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

普通高中课程标准实验教科书·数学
矩阵与变换(选修4-2)
书 名 胡晋宾
责任编辑 凤凰出版传媒集团
出版发行 江苏教育出版社(南京市马家街31号210009)
网 址 <http://www.1088.com.cn>
集团网址 凤凰出版传媒网 <http://www.ppm.cn>
经 销 江苏省新华发行集团有限公司
照 排 南京展望文化发展有限公司
印 刷 丹阳教育印刷厂
厂 址 丹阳市陵川绿岛北首(邮编212300)
电 话 0511-6520177
开 本 1000×1436毫米 1/32
印 张 2.875
版 次 2005年6月第1版
2006年6月第3次印刷
书 号 ISBN 7-5343-6622-4/G·6317
定 价 3.45元
盗版举报 025-83204538

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换
提供盗版线索者给予重奖

主 编 单 博

副 主 编 李善良 陈永高 王巧林

编写人员 胡晋宾 刘洪璐 陈永高

责任编辑 胡晋宾

影视传媒中的逼真动画是怎样制作的?
天气预报中的降雨概率是怎样测算的?
生物种群中的数量变化是怎样模拟的?

……

以上这些问题的解决,都涉及到矩阵知识.

不仅如此,在图论、线性规划、大型工程的计算、信息安全的加密、线性方程组的求解等问题中,都会用到矩阵知识.

在本专题中,我们将主要学习二阶矩阵与几种常见的平面图形变换的相互关系,以及矩阵的一些简单应用.

目 录

2.1	二阶矩阵与平面向量	1
2.1.1	矩阵的概念	1
2.1.2	二阶矩阵与平面列向量的乘法	6
2.2	几种常见的平面变换	12
2.2.1	恒等变换	12
2.2.2	伸压变换	13
2.2.3	反射变换	18
2.2.4	旋转变换	22
2.2.5	投影变换	25
2.2.6	切变变换	28
2.3	变换的复合与矩阵的乘法	35
2.3.1	矩阵乘法的概念	35
2.3.2	矩阵乘法的简单性质	42
2.4	逆变换与逆矩阵	48
2.4.1	逆矩阵的概念	48
2.4.2	二阶矩阵与二元一次方程组	55

2.5	特征值与特征向量	65
2.6	矩阵的简单应用	73
	学习总结报告	81
	复习题	82

2.1 二阶矩阵与平面向量

2.1.1 矩阵的概念

如图 2-1-1 所示, 已知向量 \vec{OP} , $O(0, 0)$, $P(1, 3)$. 因此, 向量 $\vec{OP} = (1, 3)$. 如果把 \vec{OP} 的坐标排成一列, 那么可以用表 2-1-1 来表示, 并简记为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

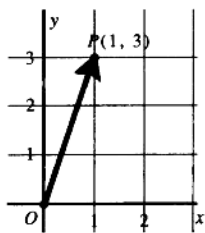


图 2-1-1

表 2-1-1

1
3

又例如, 某电视台举办歌唱比赛, 甲、乙两名选手初、复赛成绩如表 2-1-2 所示. 如果把表中的说明舍弃, 将表中的数据按原来的位置排成一张矩形数表, 那么可以将它简化为表 2-1-3, 并简记为 $\begin{bmatrix} 80 & 90 \\ 60 & 85 \end{bmatrix}$.

表 2-1-2

	初赛	复赛
甲	80	90
乙	60	85

表 2-1-3

80	90
60	85

再比如,将下列方程组中未知数 x, y, z 的系数按原来的次序排列,就能得到表 2-1-4,并简记为 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & m \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} 2x + 3y + mz = 1, \\ 3x - 2y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \caption{表 2-1-4} \\ \hline 2 & 3 & m \\ \hline 3 & -2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

在数学中,我们把形如 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 80 & 90 \\ 60 & 85 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & m \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ 这样的矩形数字(或字母)阵列称做**矩阵(matrix)**,一般地,我们用大写黑体拉丁字母 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ 或者 (a_{ij}) 来表示矩阵,其中 i, j 分别表示元素 a_{ij} 所在的行与列. 同一横排中按原来次序排列的一行数(或字母)叫做矩阵的**行(row)**,同一竖排中按原来次序排列的一列数(或字母)叫做矩阵的**列(column)**,而组成矩阵的每一个数(或字母)称为矩阵的**元素(entries)**.

显然,上面例子中的矩阵分别是 2 行 1 列、2 行 2 列和 2 行 3 列的,通常记为 2×1 矩阵、 2×2 矩阵(二阶矩阵)和 2×3 矩阵. 所有元素都为 0 的矩阵叫做**零矩阵(zero matrix)**,记为 $\mathbf{0}$.

对于两个矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} ,只有当 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的行数与列数分别相等,并且对应位置的元素也分别相等时, \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 才相等,此时记作 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

一般地,我们把像 $[a_{11} \ a_{12}]$ 这样只有一行的矩阵称为**行矩阵(row matrix)**,而把像 $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ 这样只有一列的矩阵称为**列矩阵(column matrix)**,并用希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dots$ 来表示列矩阵.

根据上述定义,平面上向量 $\mathbf{a} = (x, y)$ 的坐标和平面上的点 $P(x, y)$ 都可以看做是行矩阵 $[x \ y]$,也可以看做是列矩阵 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. 因此,我们常将 $[x \ y]$ 称为**行向量**,而将 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 称为**列向量**. 习惯上,我们把平面向量 (x, y) 的坐标写成立向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的形式. 又因为

$$P(x, y) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{平面向量 } \vec{OP},$$

因此, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 既可以表示点 (x, y) , 也可以表示以 $O(0, 0)$ 为起点, 以 $P(x, y)$ 为终点的向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. 故在不引起混淆的情况下, 对它们不加以区别.

例 1 用矩阵表示图 2-1-2 中的 $\triangle ABC$, 其中 $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$. ①

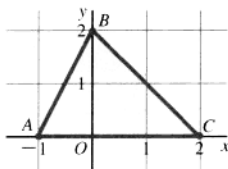


图 2-1-2

解 因为 $\triangle ABC$ 由点 A, B, C 惟一确定, 点 A, B, C 可以分别由列向量

$$\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

来表示, 所以, $\triangle ABC$ 可以表示为

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

从例 1 中我们可以看出, 矩阵 M 可以认为是由三个列向量 α, β, γ 组成, 也可以认为是两个行向量 $[-1 \ 0 \ 2], [0 \ 2 \ 0]$ 组成. 反过来, 矩阵 M 可以表示点 $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$ 或它们构成的三角形.

① 为研究方便起见, 本书中数据多取整数.

思考

如果像例1中那样用矩阵 $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 表示平面中的图形, 那么该图形有什么几何特征?

例2 某种水果的产地为 A_1, A_2 , 销地为 B_1, B_2 , 请用矩阵表示产地 A_i 运到销地 B_j 的水果数量 (a_{ij}) , 其中 $i = 1, 2, j = 1, 2$.

解 已知产地 A_i 运到销地 B_j 的产品数量为 $a_{ij}, i = 1, 2, j = 1, 2$, 如表 2-1-5 所示.

表 2-1-5

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

因此, 从产地 A_i 运到销地 B_j 的水果数量可表示为

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

思考

生活中有哪些问题也可以用矩阵来表示? 请列举几个, 并和同学交流.

例3 已知 $A = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & y \\ z & -2 \end{bmatrix}$, 若 $A = B$, 试求 x, y, z .

解 因为 $A = B$, 即 $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y \\ z & -2 \end{bmatrix}$, 所以

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \\ z = 4. \end{cases}$$

阅 读

传说在远古的伏羲时代,有一匹神奇的龙马背负着一张神秘的图形出现在黄河的水面上,人们把那张图称为“河图”.到了大禹治水的年代,又有一只神奇的大龟背负着另一张神秘的图形浮出洛水,人们称之为“洛书”.龙马载河图和神龟背洛书最早出现在宋人的著作中,通常认为那些小圆点表示数字,空心点表示奇数,实心点表示偶数.将如图 2-1-3(1)所示的洛书中的点换成数字,它就可以看做是一个由 1~9 这九个

数字排成的矩阵 $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. 这个矩阵的每行每列以及两条对角线上的

三个数之和都是 15,人们称这种图为“纵横图”或“幻方”.无独有偶,16 世纪德国雕刻家阿布莱德·杜埃(A. Dürer, 1471~1528)在他的木刻画《忧郁者》(如图 2-1-3(2)所示)的右上角就印有一个幻方,也可看做

是矩阵 $\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$.

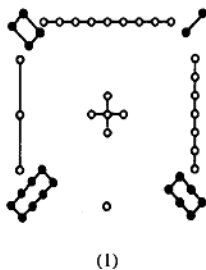


图 2-1-3

2.1.2 二阶矩阵与平面列向量的乘法

在第 2.1.1 节开头的第二个例子中,如果规定歌唱比赛最后成绩由初赛和复赛综合裁定,其中初赛占 40%,复赛占 60%,那么,甲的最后成绩为 $80 \times 0.4 + 90 \times 0.6 = 86$ 分,乙的最后成绩为 $60 \times 0.4 + 85 \times 0.6 = 75$ 分. 如果用 $A = [80 \ 90]$ 表示甲的两次成绩,用 $B = [60 \ 85]$ 表示乙的两次成绩,用 $C = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$ 表示初赛和复赛成绩在比赛总分中所占的比重,那么甲、乙的最后成绩可用如下矩阵的形式表示:

$$A \cdot C = [80 \ 90] \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} = [80 \times 0.4 + 90 \times 0.6] = [86],$$

$$B \cdot C = [60 \ 85] \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} = [60 \times 0.4 + 85 \times 0.6] = [75].$$

上例中,一个 1×2 行矩阵乘以一个 2×1 列矩阵,所得的结果是一个 1×1 矩阵,它的元素是原来行矩阵和列矩阵对应元素的乘积之和.

因此,如果用矩阵 $D = \begin{bmatrix} 80 & 90 \\ 60 & 85 \end{bmatrix}$ 表示甲、乙两人的成绩,那么上述求解甲、乙两人成绩的过程可以表示为

$$\begin{aligned} D \cdot C &= \begin{bmatrix} 80 & 90 \\ 60 & 85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 80 \times 0.4 + 90 \times 0.6 \\ 60 \times 0.4 + 85 \times 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 86 \\ 75 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

一般地,我们规定行矩阵 $[a_{11} \ a_{12}]$ 与列矩阵 $\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$ 的乘法规则^①为

① 后面我们将进一步讨论矩阵的乘法.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = [a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21}],$$

二阶矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 与列向量 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ 的乘法规则为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \times x_0 + a_{12} \times y_0 \\ a_{21} \times x_0 + a_{22} \times y_0 \end{bmatrix}.$$

例 4 计算 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

解 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times x + 0 \times y \\ 0 \times x + 1 \times y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}.$

例 4 中的结果表示列向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 左乘矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 后, 得到一个新的列向量 $\begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$. 如果列向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 表示平面上的点 $P(x, y)$, 那么左乘矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 后, 得到一个新的点 $P'(2x, y)$.

一般地, 对于平面上的任意一个点(向量) (x, y) , 若按照对应法则 T , 总能对应惟一的一个平面点(向量) (x', y') , 则称 T 为一个变换(transformation), 简记为

$$T: (x, y) \rightarrow (x', y'),$$

或

$$T: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

这样, 例 4 中的矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 便确定了一个变换, 把这个变换记作

$$T: (x, y) \rightarrow (x', y') = (2x, y)$$

或

$$T: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}.$$

一般地,对于平面向量的变换 T ,如果变换规则为

$$T: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix},$$

那么,根据二阶矩阵与列向量的乘法规则可以改写为

$$T: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

的矩阵形式,反之亦然($a, b, c, d \in \mathbf{R}$).

由矩阵 M 确定的变换 T ,通常记作 T_M . 根据变换的定义,它是平面内点集到其自身的一个映射. 当 $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 表示某个平面图形 F 上的任意点时,这些点就组成了图形 F ,它在 T_M 的作用下,将得到一个新的图形 F' ——原象集 F 的象集 F' .

思考

二阶矩阵 M 与列向量的乘法 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 和函数 $x \rightarrow f(x)$ 的定义有什么异同?

例 5 (1) 已知变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, 试将它写成坐标变换的形式;

(2) 已知变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 3y \\ y \end{bmatrix}$, 试将它写成矩阵乘法的

形式.

$$\text{解 (1)} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 4y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}.$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

阅 读

随着矩阵理论的日臻成熟,它不仅成为科技工作者们的日常工具,也渗透到生活的方方面面.例如,我们日常使用的计算机中的显像技术就用到矩阵的知识.人们将图像的区域划分为许多小区域,这些区域通常称做像素.在标准的图像传送中,图像被分成 512 行,每行 512 个像素,于是,就有了一个 $2^9 \times 2^9$ 的矩阵.对彩色图像而言,我们可以用矩阵 $[x \ y \ r \ g \ b]$ 来定位.其中 x, y 是像素的平面直角坐标分量, r, g, b 分别是基本色红、绿、蓝的亮度.一旦计算机读取这些存储的矩阵信息,就会把每个像素对应到标准位置,相应的画面就应运而生了.当然,对计算机而言,高分辨率对应着更加精细的矩阵,而黑白图片只要 $[x \ y \ i]$ 来刻画就可以了,其中的 i 表示像素的灰度.如图 2-1-4 所示的就是一台计算机显示器的像素设置.

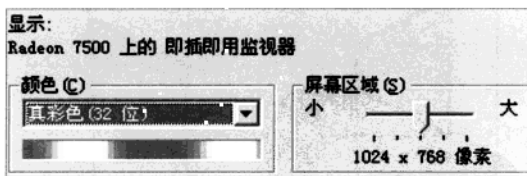


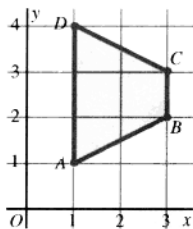
图 2-1-4

习题 2.1

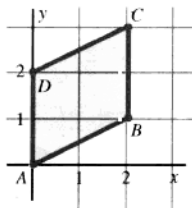
1. (1) 某南北方向十字路口的红绿灯时间设置如下: 绿灯 80 s, 黄灯 3 s, 红灯 20 s, 如果分别用 1, 0, -1 表示绿灯、黄灯、红灯, 试用矩阵表示该路口的时间设置;
- (2) 请再列举出几个可以用矩阵表示的实际问题.
2. 观察下列几个城市之间的空间距离(单位: 英里), 并回答后面的问题:

	香 港	纽 约	莫斯科	东 京	巴 黎
香 港	0	8 060	4 437	1 791	5 990
纽 约	8 060	0	4 683	6 757	3 636
莫斯科	4 437	4 683	0	4 660	1 554
东 京	1 791	6 757	4 660	0	6 053
巴 黎	5 990	3 636	1 554	6 053	0

- (1) 试用矩阵 A 表示这些城市间的空间距离;
- (2) 矩阵 A 从结构上看有什么规律? 为什么会有这种规律?
3. 试用矩阵表示下列两个图形端点的坐标. 如果图形上点的横坐标变化为原来的 2 倍, 而纵坐标不变, 那么该用什么矩阵去刻画新的图形端点?



(1)



(2)

(第 3 题)

4. 设矩阵 A 为二阶矩阵, 且规定其元素 $a_{ij} = i \cdot j$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$, 试求 A .
5. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} m-n & x+y \\ x-2y & m+n \end{bmatrix}$, 若 $A = B$, 试求 x, y, m, n 的值.