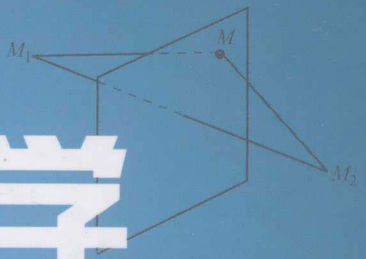
21世纪高等学校教材

上海交通大学数学系　编

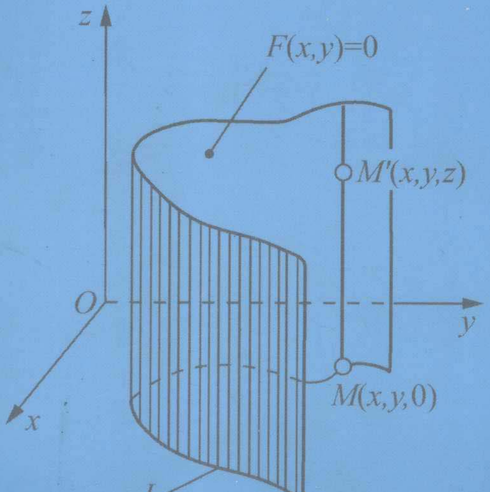
第二版

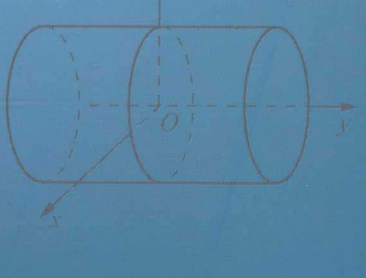


高等数学

Advanced Mathematics

（上册）





上海交通大學出版社

21 世纪高等学校教材

高等数学（上册）

（第二版）

上海交通大学数学系编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理和导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数.

本书着重对基本概念、基本理论、基本方法的准确阐述，不过于强调技巧，更有利于提高读者的分析问题和解决问题的能力. 这次再版，删减了传统的繁琐、冗长的推导内容，不再列举繁杂的、特殊技巧的例题.

书中文字叙述力求通俗易懂、可读性强、使用面更广，可作为一般本科高等院校非数学专业《高等数学》(微积分)的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/上海交通大学数学教研室编. —2版. —上海：上海交通大学出版社，2009

ISBN 978-7-313-00022-4

Ⅰ. 高...　Ⅱ. 上...　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 071928 号

高等数学(上册)

(第二版)

上海交通大学数学系　编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号　邮政编码 200030)

电话：64071208　出版人：韩建民

常熟市华通印刷有限公司 印刷　全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm 1/16　印张：20.25　字数：379 千字

2000 年 5 月第 1 版　2009 年 5 月第 2 版　2009 年 5 月第 9 次印刷

ISBN978-7-313-00022-4/O　定价：27.00 元

再版前言

高等数学是高等院校一门传统的基础理论课，在传授学生知识、启发学生思维和培养学生能力等方面都具有重要的作用. 1987 年，为了继承和发扬交通大学"起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新"的优良办学传统，上海交通大学应用数学系组织部分教授、副教授参照 1980 年教育部颁发的《高等工业学校高等数学教学大纲(草案)》的要求，在长期教学实践的基础上编写出版了《高等数学》一书(上、下册). 该教材以及与之配套的《高等数学习题集》不仅使上海交通大学的学生受益匪浅，而且受到其他高校师生的欢迎.

近年来，我国的高等教育事业发生了很大的变化，一方面随着招生规模的扩大，高等教育趋向于大众化，为了提高学生综合素质，各高校相继增加一些课程，使得高等数学的课时相对减少；另一方面由于科学技术的飞快发展和数学在各领域中的广泛应用，人们越来越认识到，高等数学不仅是学好其他基础课程的基础，是学好专业课程的工具，更主要的是它能培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力，从而获得发展的基础，创造的源泉，受益终生，于是对高等数学这门课程提出提高学生数学素养和应用能力的要求. 为了适应这些变化，我们采纳了一些教师的建议，对 1987 年版的《高等数学》进行了重新编写，出版了本教材.

本书并未改变原《高等数学》的框架结构，而是在保持原书特点的基础上对一些具体的内容进行了处理. 目的是在保证教学要求的同时，不但便于教师组织教学，而且使学生比较容易理解接受，从而在知识、能力和素质方面都有较大的提高.

1. 本书在内容的阐述方面进行了推敲，在力求语言简洁明了、通俗易懂的同时，内容的叙述也尽量由浅入深，循序渐进，定理和例题的表述尽可能严谨规范.

2. 本书注重高等数学的基本概念、基本理论、基本方法的描述，删去了原书中一些繁琐、冗长的推导内容.

3. 本书保持了原教材中例题丰富的特点，在删去一些繁杂和需要特殊技巧的例题的同时，适当补充一些基本的和应用方面的例题.

4. 本书的习题按章配置，既注意基本概念、基本理论和基本方法，又注意加强应用，循序渐进. 习题主要选自上海交通大学数学系 40 余年来不断使用、不断修改的《高等数学习题集》，同时增添了一些新的题目.

5. 本书删除了原书每章后面的附注，原因是这些内容超出教学的要求，学生在本书的学习过程中或学习结束后可根据需要和自己的能力阅读有关参考书获取

这方面的知识.

本书分上、下两册，上册内容包括一元函数微积分、空间解析几何与向量代数；下册内容包括多元函数微积分、微分方程、级数. 本书可作为广大高等院校非数学专业《高等数学》(微积分)的教材或参考书.

参加本书编写工作的有李重华、孙薇荣、景继良、贺才兴教授和王承国副教授，虽然编者在长期《高等数学》教学中积累了不少经验，又先后参加 1987 年版《高等数学》、《高等数学习题集》的编写，但深感编写一本好的《高等数学》教材并非易事，限于水平，书中有不妥之处，敬请专家、同仁和读者批评指正.

编　者

2008 年 4 月于上海交通大学

目　录

1 函　数

函数是高等数学中最基本的概念之一，它也是高等数学研究的主要对象.

函数的概念是随着人类社会生产力的发展而逐步形成的，有大量的问题要求人们去寻求变量与变量之间的依赖关系. 时至 17 世纪，德国数学家莱布尼兹①最早使用函数一词，当时虽然没有给出明确的定义，但他已考虑到变量 x 与随 x 同时变动的变量 y，即变量 x 的函数. 后经欧拉②、柯西③以及狄利希莱④等数学家对函数概念的不断修正、扩充而逐步形成接近现代概念的函数定义.

在高等数学课程中所涉及的数主要是实数. 为此，本章首先给出实数的绝对值和有关的不等式，然后给出函数的定义和它的简单性质，同时对基本初等函数的性质进行概括. 本章的内容是初等数学某些知识的复习、归纳和提高，也是学习高等数学的重要基础.

1.1 函数的概念

1.1.1 实数的绝对值与不等式

设 a 为任意实数，则定义 a 的绝对值为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{当 } a < 0. \end{cases}$$

根据定义，明显地有 $|a| \geqslant 0$. 并且，当且仅当 $a = 0$ 时，$|a| = 0$. 此外，还有

$$|-a| = |a|, \quad |b-a| = |a-b|.$$

从几何图形上来看，$|a|$ 就是原点到 a 点的距离，而 $|a-b|$ 则为 a、b 两点之间的距离.

又对于任意两个实数 a 和 b，有

---

① 莱布尼兹(G. W. Leibniz, 1646 ~ 1716)，德国数学家，同牛顿被称为微积分的创始人.

② 欧拉(L. Euler, 1707 ~ 1783)，瑞士数学家.

③ 柯西(A. L. Cauchy, 1789 ~ 1857)，法国数学家.

④ 狄利希莱(P. G. L. Dirichlet, 1805 ~ 1859)，德国数学家.

$$|ab|=|a||b|;$$

当 $b\neq 0$ 时，

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

下面再讨论几个关于绝对值的不等式.

1° 不等式 $|a|\leqslant A$ 等价于 $-A\leqslant a\leqslant A$.

事实上,如果 $|a|\leqslant A$,则 $-|a|\geqslant -A$. 又因为 $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$,故有 $-A\leqslant a\leqslant A$.

反之,设 $-A\leqslant a\leqslant A$,即:

当 $a\geqslant 0$ 时,有 $|a|=a$,因此 $|a|\leqslant A$;

当 $a<0$ 时,有 $|a|=-a$,由假设 $-A\leqslant a$ 得 $A\geqslant -a$,从而有 $|a|\leqslant A$.

2° $|a+b|\leqslant |a|+|b|$.

事实上,由 $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$ 及 $-|b|\leqslant b\leqslant |b|$ 相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|,$$

由 1° 即得 $$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

把这个不等式推广,得

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

3° $|a-b|\geqslant ||a|-|b||$.

因为 $a=(a-b)+b$,由 2° 得

$$|a|\leqslant |a-b|+|b|,$$

从而有 $$|a|-|b|\leqslant |a-b|.$$

又因为 $b=a+(b-a)$,故由 2° 得

$$|b|\leqslant |a|+|b-a|=|a|+|a-b|,$$

从而又有 $$-|a-b|\leqslant |a|-|b|.$$

合并以上结果得

$$-|a-b|\leqslant |a|-|b|\leqslant |a-b|.$$

由 1° 得 $$|a-b|\geqslant ||a|-|b||.$$

1.1.2 变量与常量

世界上一切事物都是处于不停地运动和变化之中. 在研究事物运动过程时,常常会遇到两种不同的量. 在某一过程中可取不同数值的量称为**变量**(或变数);数值保持不变的量称为**常量**(或常数).

在高等数学中,常用各种**区间**表示变量的取值范围,借助于集合符号将其表示如下:

开区间　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

闭区间　$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

左开右闭区间　$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；

左闭右开区间　$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；

无穷区间　$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$；

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$；

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$；

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

图 1 - 1 给出部分区间在数轴上的表示.

以上各种区间中的 a 和 b 称为**区间的端点**，a 称为**左端点**，b 称为**右端点**. 属于区间内而不是端点的点称为**内点**.

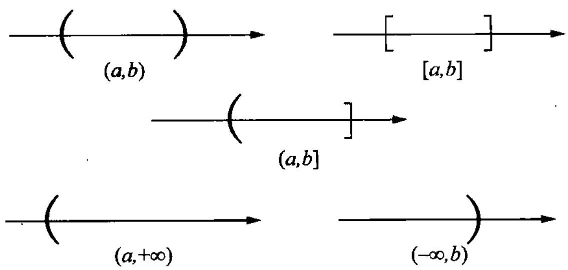


图 1 - 1

开区间 $(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta(\delta>0)\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**（或称点 a 的邻域），记作 $U(a,\delta)$，a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径；而对于点 a 除外的邻域 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为**去心邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$（图 1 - 2）.

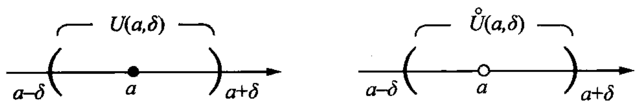


图 1 - 2

1.1.3　函数概念

自然界中各种现象的变化不是孤立的、各不相关的，而是互相依赖的. 例如，在气缸内一定质量的气体，它的压强 p、体积 V 及温度 T 之间有下列关系，称为克拉伯龙（Claperon）公式：

$$pV=RT$$

其中 R 是常数. 为了使讨论问题简单化,可假定温度保持不变,于是压强与体积两个变量之间互相依赖的规律为

$$p = \frac{C}{V},$$

其中 C 为常数. 这个关系式称为波义耳-马略特(Boyle - Mariotte) 定律.

又如一质点在一单位圆周上作等角速转动时,其直角坐标 x、y 随时间 t 而定的情况可由下式表达:

$$x = \cos \omega t,\ y = \sin \omega t,$$

其中常量 ω 是质点旋转的角速度. 自然界中这种例子是很多的. 从这些例子抽出它们共同的特性,可建立一重要概念,这就是函数概念.

定义 1 设有一变量 x,它的取值范围是一数集 X,如果在 X 内所取的每一数值 x,根据一确定法则 $f(\quad)$,有另一变量 y 的唯一确定的数值与它相对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作:

$$y = f(x), x \in X.$$

称 x 为**自变量**,y 为**因变量**. X 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**,记为 $D(f)$,y 值构成的数集 Y 称为函数 $f(x)$ 的**值域**,记为 $R(f)$.

如果函数的定义域为区间,则称这区间为函数的**定义区间**.

定义 2 设 X 和 Y 是两个数集,f 是 $X \to Y$ 的映射,则称 f 是定义在 X 上的函数,记作

$$f: X \to Y, \text{或 } X \xrightarrow{f} Y,$$

或

$$y = f(x), x \in X.$$

此时 f 的定义域 $D(f) = X$,值域 $R(f) = Y$.

例如,函数 $y = ax + b, y = x^2, y = x^3, x \in (-\infty, +\infty)$,它们的定义区间是 $(-\infty, +\infty)$;而函数 $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}\,(a < b), x \in [a,b]$,它的定义区间是 $[a,b]$. 约定:当不考虑函数中两个变量所表示的实际意义时,函数的定义域将由解析式子本身来确定.

在函数定义中,重要的是必有一确定法则存在. 据此,自变量取定后,函数随着必有唯一的定值,至于法则的内容,是否能用一个公式加以表达,是另一回事,不是函数定义所要求的. 例如

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 - x, & \text{当 } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

是一个函数,其中 y 随 x 而定的法则,用两个公式分别来说明,这种表达形式的函数常称为**分段函数**.

只要有一条明确的法则,不问其内容、说明方式如何,当自变量在某数集内任

取一值时，必有因变量的唯一数值，依据此法则随着而定，那么，这就是一个函数，它的法则常用记号 $f(\quad)$ 表达. 对函数定义域内任何 x 运用法则 $f(\quad)$，从而获得的 $f(x)$，它就是对应于 x 的 y 值：$y = f(x)$，称为 x 的**函数值**. 不同的法则用不同的符号来表示，例如

$$g(\quad) \text{ 或 } \varphi(\quad) \text{ 或 } F(\quad)$$

等等. 有时，也用 $y(\quad)$ 来表示因变量 y 的对应法则.

这样抽象而广泛地来理解的函数概念，在近代数学中所产生的影响是深远的.

下面再举三个常用的函数例子.

例 1 符号函数(也称克罗内克尔①函数)：

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x < 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ 1, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

通过它可以表示任何实数 x 的绝对值：$|x| = x\operatorname{sgn}(x)$. 因此 $\operatorname{sgn}(x)$ 起了 x 的符号作用，故称它为符号函数.

例 2 取整函数：对于任意实数 x，对应的 y 是不超过 x 的最大整数，记作

$$y = [x].$$

下面列出它的几个函数值：$[1.2] = 1$；$[3.9] = 3$；$[0] = 0$；$[0.3] = 0$；$[-0.7] = -1$；$[-3.1] = -4$.

例 3 狄利希莱函数：

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

在讨论函数时除了对应法则之外，还应注意它的定义域. 为了加深对函数定义的理解和记忆，作一表格再次说明函数的概念.

x 在 X 中取值 $x \in X$	确定的法则 $f(\quad)$	对应于 x 的 y 值 $y = f(x)$
$x \in (-\infty, +\infty)$	$(\quad)^2$	$y = x^2$
$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\sin(\quad)$	$y = \sin x$
$x \in [0, +\infty)$	$e^{-(\quad)}[\sin(\quad) + \cos(\quad)]$	$y = e^{-x}(\sin x + \cos x)$

① 克罗内克尔(L. Kronecker，1823 ～ 1891)，德国数学家.

1.1.4　隐函数与显函数

平面上一条直线的方程是

$$Ax + By + C = 0.$$

这是一个二元一次方程，其中 x 及 y 不能各自独立地取值；若 x 任意取一定值时，为了能满足方程，y 当然不能任意取值. 这样一个方程表示两个变量间相依而变的关系. 若指定 x 为自变量，y 为因变量，则当 $B \neq 0$ 时，

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

它的对应法则是

$$f(\quad) = -\frac{A}{B}(\quad) - \frac{C}{B}.$$

因而方程 $Ax + By + C = 0$ 确定了函数 y，称 y 是自变量 x 的隐函数.

一般说来，设有两个变量 x、y 的方程为

$$F(x,y) = 0,$$

如果存在一个函数 $y(x)$，$x \in X$，将它代入上列方程，得恒等式

$$F(x,y(x)) \equiv 0,$$

则称方程 $F(x,y) = 0$ 定义了 y 为 x 的**隐函数**. 如果函数 y 能够通过自变量 x 直接表达为 $y = f(x)$ 形式，则称为**显函数**.

例如，椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

定义了 y 为 x 的隐函数，它的显函数为

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},\ x \in [-a, a]$$

或

$$y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},\ x \in [-a, a].$$

实际上，显函数与隐函数并没有严格的界限，有时可以从隐函数 $F(x,y) = 0$ 解出显函数来. 但是，一般说来，解一个方程并不容易，因此，将隐函数化为显函数就有一定的困难. 例如，方程 $y^5 + xy + x^5 = 0$ 定义的隐函数就不能用代数的方法化为显函数.

1.2　函数的简单性质

讨论函数，主要是认识函数值随自变量而定的规律性，这就需要研究函数的一

些性质．随着数学工具的发展，可以逐步对函数作深入的研究．这里只能讨论函数的一些简单性质．此外，为了使函数的规律性能有直观形象，可对函数作图：应用笛卡儿[1]直角坐标系，以 x 为横坐标，以对应于 x 的函数值 $y=f(x)$ 为纵坐标，作出平面上满足这函数关系的点 (x,y)，这种点的集合（通常是曲线）构成函数 $y=f(x)$ 的图形．

下面列出函数的几个性质．

(1) 单值性

根据函数的定义，在定义区间内函数值是唯一的，这称为函数的单值性．例如，由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 确定的关系式

$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

应当分别看作两个函数

$$f(x)=+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\ g(x)=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

而每一个都是单值的．函数的单值性，反映到它的图形上是：任何与 Oy 轴平行的直线，如果与它的图形相交，只能有一个交点（图 1-3）．

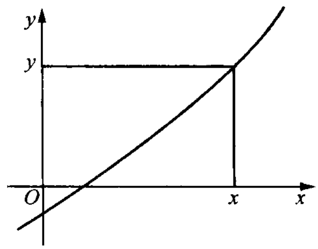


图 1-3

(2) 奇偶性

设有函数 $y=f(x)$，它的定义域 X 对称于原点．如果对任何 $x\in X$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对于任何 $x\in X$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**．奇函数的图形对称于原点，而偶函数的图形对称于 Oy 轴．例如函数 $y=x^3$（图 1-4）、$y=\sin x$（图 1-5）和 $y=\tan x$（图 1-6）都是奇函数；$y=x^2$（图 1-7）和 $y=\cos x$（图 1-8）都是偶函数．

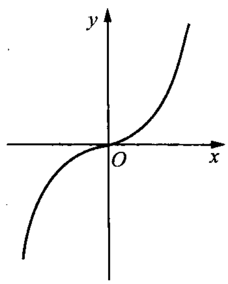


图 1-4

(3) 单调性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in X$．如果对任意两点 x_1、$x_2\in X$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上**严格单调增**

---

[1] 笛卡儿（R. Descartes，1596～1650），法国哲学家、物理学家、数学家和生理学家，解析几何的创始人．

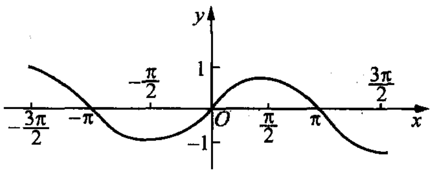


图 1-5

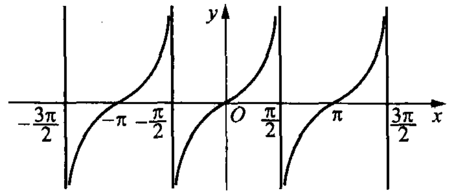


图 1-6

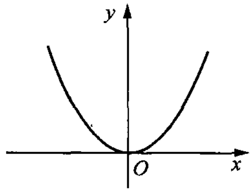


图 1-7

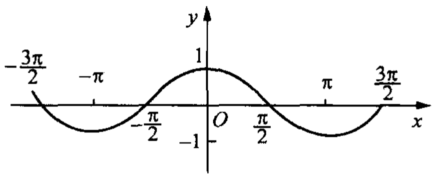


图 1-8

加；当 $x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上**严格单调减少**. $f(x)$ 统称为**严格单调函数**. 此外，若 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上**单调增加**；若 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上**单调减少**. 这时 $f(x)$ 统称为**单调函数**.

由单调性的定义，可知在某区间内的严格单调增函数(图 1-9)、(图 1-10) 的图形为沿横轴正向而上升的曲线；而严格单调减函数的图形为沿横轴正向而下降的曲线(图 1-11).

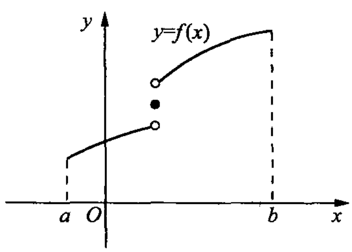


图 1-9

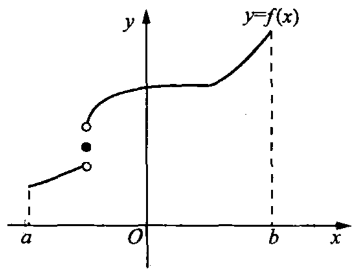


图 1-10

例如：$y = x^2$ 在$(-\infty, 0]$ 上是严格单调减，在$[0, +\infty)$ 上是严格单调增；而 $y = x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是严格单调增函数；$y = [x]$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是单调增函数.

(4) 周期性

设有函数 $y = f(x)$，$x \in X$. 若存在非零常数 l，使

$$f(x + l) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，而 l 称为函数的一个**周期**.

由定义可知，kl（k 为非零整数）也是它的周期，通常所讲的周期是指最小的正周期（若它存在的话）. 例如，$\sin x$、$\cos x$ 与 $\tan x$ 都是周期函数，它们的周期分别为 2π、2π 和 π.

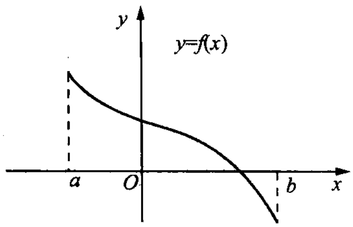


图 1-11

(5) 有界性

设有函数 $y=f(x), x\in X$. 若存在正数 M，使

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 为**有界函数**.

若存在常数 A 和 B，使

$$A\leqslant f(x)\leqslant B$$

则 A 和 B 分别称为 $f(x)$ 的**下界**和**上界**. 当然，比 A 小的数也是 $f(x)$ 的下界；比 B 大的数也是 $f(x)$ 的上界.

显然，如果 $f(x)$ 是有界函数，则它必有下界和上界；反之，如果 $f(x)$ 同时有下界及上界，那么它必是有界函数. 在几何上，有界函数的图形介于两条平行于 Ox 轴的直线之间. 例如，$y=\sin x$ 是有界函数，因对于任意 x，$|\sin x|\leqslant 1$. $y=1/x$ 在 $[1,2]$ 上是有界的，1 是上界，3 也是上界；1/2 是下界，-1 也是下界. 但 $y=1/x$ 在 $(0,1)$ 上不是有界的. 不是有界的函数称为**无界函数**.

上面举出了函数的几种简单性质，从这里可以看出，函数的性质都能在其图形中得到反映；因此可以把函数的规律性，通过图形显示出来.

1.3 反函数

1.3.1 反函数概念

设有函数

$$y=f(x), x\in X.$$

可以讨论，这函数关系是否可以解出 x 而有一单值的

$$x=\varphi(y) \text{ 或 } x=f^{-1}(y), y\in Y,$$

如果可能，则称 $\varphi(y)$ 或 $f^{-1}(y)$ 为 $f(x)$ 的**反函数**，而 $f(x)$ 称为**直接函数**. 例如线性函数

$$y=ax+b$$

在 $a\neq 0$ 时有一反函数