Markov Processes in Random Environments

随机环境中的马尔可夫过程

胡迪鹤 著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Markov Processes in Random Environments

随机环境中的马尔可夫过程

胡迪鹤 著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是在测度论、泛函分析、点集拓扑和随机过程基础等预备知识的基础上展开讨论的。全书共十章, 第一章用以承前启后, 对经典 (确定性环境) 的马尔可夫过程作了简单的回顾。后面九章对随机环境中的马尔可夫过程作了系统研究, 包括依时的随机环境中的马尔可夫过程, 依空的随机环境中的马尔可夫过程和既依时又依空的随机环境中的马尔可夫过程。对几类重要的特殊的随机环境中的马尔可夫过程 —— 随机环境中的随机徘徊, 随机环境中的分支过程, 随机环境中的生灭过程也进行了相当的论述。本书就其研究的主题而言, 含有状态的分类、状态空间的分解、遍历极限与不变测度、大数定律、中心极限定理、不变原理、大偏差原理、Q 过程的构造理论等。

本书可供概率论与数理统计的理论研究者和应用研究者参考, 亦可用于研究生教学用书。

图书在版编目 (CIP) 数据

随机环境中的马尔可夫过程 / 胡迪鹤著. — 北京: 高等教育出版社, 2011. 3

ISBN 978-7-04-031537-0

I. ①随··· II. ①胡··· III. ①马尔可夫过程 - 研究 IV. ①O211.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 007478 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010–58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400–810–0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	涿州市京南印刷厂		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2011 年 3 月第 1 版
印　　张	28.75	印　　次	2011 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	490 000	定　　价	69.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　31537–00

作者谨以此书纪念

恩师许宝騄先生百岁诞辰，

并勉填一词，申诚達敬。

望海潮

物华天宝，地杰人灵，钱塘沃土育英。
汇文初露，清华基成，西渡万里英伦。
四载苦耕耘，跻身众魁元，桂冠双赢。(注一)
西南傳道，京師授業，炳千秋。宗師一代
清新。谙京昆韓柳，才调无伦。
加州讲学，北卡建系，扬我泱泱豪情。
卧榻稿尚温，英年駕鹤去，佟府无声。
濺淚丁香遥送，垂柳依依行。(注二)

注一．先生四载，获伦敦大学学院两个博士。

注二．先生佟府病逝，佟府周边，遍植垂柳，丁香。

廸鶴恭筆，2010年8月。

前言

本书是作者及其助手们近八年来, 对随机环境中的马尔可夫过程研究成果的一个小结, 为了全书的系统性, 也介绍了少量的其他作者的部分结果。

作者期望阅读本书的读者, 最好具备测度论、泛函分析、点集拓扑和随机过程的基本知识。

本书系统地研究了随机环境中的马尔可夫过程, 包括几类重要的特例, 如随机环境中的随机徘徊、随机环境中的分支过程和随机环境中的生灭过程。由于随机环境中的马尔可夫过程是近 20 多年来才发展起来的, 其理论成果还不能说很成熟完备, 故此书更难说成熟和完备。作者能以此书引起国人对此研究方向的兴趣和重视, 则作者足以自慰矣! 故期望读者不吝批评和指教。

本书是为纪念恩师许宝騄先生百岁诞辰而创作的。愿先生在我国创建的概率统计伟业长盛不衰, 青春永驻!

最后, 感谢国家自然科学基金委员会的资助 (项目批准号为: 10771185)。

胡迪鹤

2008 年 8 月

常用符号表

$\mathbf{R}^d$ (黑正体) 表 d 维欧氏空间, $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1, \mathbf{R}_+=[0,\infty)$.

$\mathbf{Z}^d$ (黑正体) 表 d 维整数格子点集, $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}_+=\mathbf{N}$ 为非负整数集.

$\mathbf{1}$ (黑正体) 表分量为 1 的列向量, 维数视具体情况而定.

$\mathbf{1}_A$ (黑正体) 表集合 A 上的示性函数.

$\mathscr{B}(\mathscr{G})$ (花体) 表拓扑空间 $\mathscr{G}$ 中的 Borel σ 代数, 即 $\mathscr{G}$ 中一切开集所产生的 σ 代数.

$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 常表概率空间.

$\boldsymbol{E}$ (斜黑体) 表期望算子, $\boldsymbol{E}(\cdot|\widetilde{\mathscr{F}})$ 表关于 σ 代数 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 的条件期望算子, $P(A|\widetilde{\mathscr{F}})$ 表集合 A 关于 σ 代数 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 的条件概率.

var 表示方差.

cov 表示协方差.

R.V. 表示随机变量.

d.f. 表示分布函数.

c.f. 表示特征函数.

$\bigvee\limits_{r\in\Gamma}\mathscr{F}_r$ 表示 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_r, r\in\Gamma\}$ 取并后以它产生的 σ 代数.

$a\wedge b$ 表示取 a,b 中的最小者, $a\vee b$ 表示取 a,b 中的最大者.

$f\in\mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$ 表示 f 关于 σ 代数 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 可测, 即是 $f^{-1}(\mathscr{E}_2)\subset\mathscr{E}_1$, 特别地, $f\in\mathscr{E}_1$ 表示 $f\in\mathscr{E}_1/\mathscr{B}(R)$.

$\xrightarrow{\mathrm{w}}$ 表示测度的弱收敛.

$\xrightarrow{\mathrm{a.s}}$ 表示函数的几乎处处收敛.

$\xrightarrow{P}$ 表示函数的依概率收敛.

$\xrightarrow{L^p}$ 表示函数的 L^p 收敛.

MPRE 表示随机环境中的马尔可夫过程.

MCRE 表示随机环境中的马尔可夫链.

MCSTRE 表示依时依空的随机环境中的马尔可夫链.

MCSRE 表示依空的随机环境中的马尔可夫链.

MCTRE 表示依时的随机环境中的马尔可夫链.

MPTRE 表示依时的随机环境中的马尔可夫过程.

SKPMC 表示绕积马尔可夫链.

RTM 表示连续时间的可数状态的随机转移矩阵.

R.T.M. 表示离散时间的可数状态的随机转移矩阵.

RWSTRE 表示依时依空的随机环境中的随机徘徊.

RWSRE 表示依空的随机环境中的随机徘徊.

M.K. 表示马尔可夫核.

R.M.K. 表示随机马尔可夫核.

$\overline{m}$ 表示随机环境的分布.

$\overline{m}_i$ 表示随机环境的第 i 个随机变量的分布.

$\overline{m}_{mg}$ 表示随机环境中单个随机变量的公共分布.

$\widehat{P}((x, \overrightarrow{\theta}), F)$ 表示绕积马尔可夫链的马尔可夫核.

$x \rightarrow y$ 表示 x 可达 y.

$x \xrightarrow{\min}$ 表示 x 可极小达 y.

$x \xrightarrow{p} y$ 表示 x 可正概率达 y.

$x \longleftrightarrow y$ 表示 x 与 y 互通.

$x \overset{\min}{\longleftrightarrow} y$ 表示 x 与 y 极小互通.

$x \overset{p}{\longleftrightarrow} y$ 表示 x 与 y 以正概率互通.

$P(\theta)$ 表示随机转移矩阵, 其元素用 $p(\theta; x, y)$ 表示.

$P^{(n)}(\overrightarrow{\theta}) \overset{\text{def}}{=\!=} P(\theta_0)P(\theta_1)\cdots P(\theta_{n-1})$ 表示 n 步随机转移矩阵, 其中的元素用 $p^{(n)}(\overrightarrow{\theta}; x, y)$ 表示, $p^{(1)}(\overrightarrow{\theta}; x, y) = p(\theta_0; x, y)$, $\overrightarrow{\theta} = (\theta_i, i \in \mathbf{Z})$.

$\mu_1 \ll \mu_2$ 表示测度 μ_1 关于 μ_2 绝对连续.

R.S.T.F. 表示随机半转移函数.

R.T.F. 表示随机转移函数.

R–K–C 表示随机 Kolmogorov–Chapmann 方程.

RMTF 表示随机的马尔可夫转移函数.

RMG 表示随机的马尔可夫生成元.

目　录

第一章

经典马尔可夫过程的简单回顾

马尔可夫过程是随机过程中历史最悠久且至今仍充满活力的一个分支. 自 1916 年俄罗斯数学家 A. A. MapkoB 发表那篇有关马尔可夫过程的奠基性论文以来，数学家们对马尔可夫过程的研究就经久不衰. 特别是 20 世纪 30 年代末, A. Kolmogorov 等人奠定了概率论的公理化系统以后, 随机过程论, 特别是马尔可夫过程得到了长足的发展. 它有极为深厚的理论基础, 涉及数学的诸多领域, 如拓扑学、泛函分析、函数论、近世代数及几何学等; 它又有极为广泛的应用, 如近代物理、分子生物学、分子化学、随机服务系统、电子信息、网络理论、计算科学、数理金融及保险事业等.

为了区别于本书所研究的主要课题 —— 随机环境中的马尔可夫过程, 我们称马尔可夫过程为经典马尔可夫过程.

在讲述随机环境中的马尔可夫过程之前, 对经典马尔可夫过程作一个简单的回顾, 其目的有四个.

第一, 为今后讲述随机环境中的马尔可夫过程提供一个较为简单的背景;

第二, 凸显出随机环境中的马尔可夫过程与经典马尔可夫过程的本质差异及前者的难点;

第三, 借鉴经典马尔可夫过程对问题的提法、工具和技巧, 来研究随机环境中的马尔可夫过程;

第四, 对于不太熟悉经典马尔可夫过程的读者, 也可从中知道经典马尔

可夫过程的一些基本内容.

作者希望本书的读者对测度论、概率论、泛函分析、点集拓扑、随机过程初步等内容有一定的了解.

首先介绍本书一些常用的符号. 例如, $\mathbf{R}^d$ 表示 d 维欧氏空间, $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}_+=[0,\infty)$; $\mathscr{B}(\mathscr{G})$ 表示拓扑空间 $\mathscr{G}$ 中的 Borel σ 代数, 即 $\mathscr{G}$ 中一切开集所产生的 σ 代数; $\mathbf{Z}$ (如不特别声明) 表示整数集, $\mathbf{Z}_+$ 表示非负整数集; $\boldsymbol{E}$ 表示期望算子; $\boldsymbol{E}(X|\mathscr{F})$ 表示随机变量 X 对 σ 代数 $\mathscr{F}$ 的条件期望; $\mathbf{1}_A$ 表示集合 A 上的示性函数; 当 A 为可测集时, $P(A|\mathscr{F})\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A|\mathscr{F})$ 表示集合 A 对 σ 代数 $\mathscr{F}$ 的条件概率; 若 E_1 和 E_2 是两个集合, 由 E_1 到 E_2 的算子 f 常用 $f:E_1\mapsto E_2$ 表示, 特别地, 若 $(E_1,\mathscr{E}_1),(E_2,\mathscr{E}_2)$ 是两个可测空间, 即 $\mathscr{E}_i$ 是 E_i 上的 σ 代数, $f:E_1\to E_2, f\in\mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$ 表示 f 关于 σ 代数 $\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2$ 可测, 即是 $f^{-1}(\mathscr{E}_2)\subset\mathscr{E}_1$, 更特别地, 若 $(E_2,\mathscr{E}_2)=(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$, 则 $f\in\mathscr{E}_1/\mathscr{B}(\mathbf{R})$ 简记为 $f\in\mathscr{E}_1$, 并简称 f 是 $\mathscr{E}_1$ 可测的, 这时, 记 $b\mathscr{E}_1$ 为全部 $\mathscr{E}_1$ 可测的有界实值函数; $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 常表示概率空间, 即 Ω 是任一集合, $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的 σ 代数, P 是 $\mathscr{F}$ 上的概率测度; 若 $(E,\mathscr{E})$ 是可测空间, $X:\Omega\mapsto E, X\in\mathscr{F}/\mathscr{E}$, 则称 X 为 E 值随机元 (或 E 值随机变量), 实值随机变量简称为随机变量, 随机变量常用 R.V. 表示. var、cov 分别表示方差和协方差算子. d.f. 和 c.f. 分别表示分布函数与特征函数. $\mathbf{1}$ 表示诸分量恒为 1 的列向量 (维数视具体情况而定).

本书正文前列有本书中的常用符号表.

§1 马尔可夫过程的基本概念及分类

本节恒设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一个概率空间, 即 Ω 是一个抽象的集合, 称之为样本空间, $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数, 对每个 $A\in\mathscr{F}$, 称 A 为可测集 (或通俗地称之为随机事件), P 是 $\mathscr{F}$ 上的一个概率测度.

从概率论发展的历史看, 最初人们研究的是所谓的古典概型, 即研究与有限的样本空间 Ω 所涉及的随机事件 A 的概率 $P(A)$. 随着科学的进步, 样本空间 Ω 逐步拓广到可数无穷集或任一抽象集合, 研究的对象也不仅是单个随机事件 A 的概率 $P(A)$, 而是 Ω 上的随机变量 X 的概率规律性, 甚至是 Ω 上的一列随机变量 $X_0,X_1,X_2,\cdots$ 的概率规律性. 首先研究的是易于处理的较为简单的随机变量序列 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$, 即相互独立的随机变量序列 $\{X_n,n\geqslant 0\}$. "相互独立性" 的假设, 多半是为了简单和易于处理. 其实, 客观世界的事物多是相互联系、互相影响的. 这就有必要研究相互依赖的即并

不相互独立的随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 0\}$. 比较简单也近乎符合实际的相互依赖性是所谓的 "马尔可夫性", 即是,"知道现在","过去" 与 "将来" 是相互独立的, 也就是说,"知道现在的信息" 与 "知道现在以及此前的历史的全部信息", 对将来的预测是等效的.

下面给出马尔可夫过程的严格定义.

设 Ω 是任一抽象集合, $\mathscr{M}$ 是 Ω 中的某些子集构成的集合系, 记 $\sigma(\mathscr{M})$ 为包含 $\mathscr{M}$ 的最小 σ 代数, 称之为由 $\mathscr{M}$ 产生的 σ 代数. 若$\{\mathscr{F}_t, t \in \Gamma\}$ 是Ω 上的一族 σ 代数, $\bigvee\limits_{t\in\Gamma} \mathscr{F}_t$ 定义为 $\sigma(\bigcup\limits_{t\in\Gamma} \mathscr{F}_t)$, 此处 Γ 是任意一个指标集.

注意: $\bigcup\limits_{t\in\Gamma} \mathscr{F}_t$ 未必为 σ 代数, 但 $\bigvee\limits_{t\in\Gamma} \mathscr{F}_t$ 必为 σ 代数.

设 $(E_1, \mathscr{E}_1), (E_2, \mathscr{E}_2)$ 是两个可测空间, Γ 是任一指标集, 对任何 $t \in \Gamma$, $f_t \in \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$, 记

$\sigma(f_t, t \in \Gamma) = \bigvee\limits_{t\in\Gamma} \sigma(f_t), \sigma(f_t) = f_t^{-1}(\mathscr{E}_2)$, 称 $\sigma(f_t, t \in \Gamma)$ 是由 $\{f_t, t \in \Gamma\}$ 所产生的 σ 代数.

注意: $b\sigma(f_t, t \in \Gamma) = \{f\colon E_1 \mapsto \mathbf{R}, f$ 有界, 且 $f \in \sigma(f_t, t \in \Gamma)/\mathscr{B}(\mathbf{R})\}$.

设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个概率空间, $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}, \{\mathscr{F}_t, t \in \mathbf{T}\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一族单调非降子 σ 代数族, 即对任何 $t \in \mathbf{T}, \mathscr{F}_t$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个子 σ 代数, 而对任何 $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$, 只要 $t_1 < t_2$, 必有 $\mathscr{F}_{t_1} \subset \mathscr{F}_{t_2}$.

定义 1.1 设 $(E, \mathscr{E})$ 为一可测空间, $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间, $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ 是一族 E 值随机变量, 即对任何 $t \in \mathbf{T}, X(t) \in \mathscr{F}/\mathscr{E}$, 则称 $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ 是一个以 $\mathbf{T}$ 为时间参数集以 $(E, \mathscr{E})$ 为状态空间的随机过程, E 中每一点均称为一个状态. 若还有 $\mathscr{F}$ 中的一族单调非降的子 σ 代数 $\{\mathscr{F}_t, t \in \mathbf{T}\}$, 使得对每个 $t \in \mathbf{T}$, 都有

$$X(t) \in \mathscr{F}_t/\mathscr{E},$$

即 $X(t)$ 关于 $\mathscr{F}_t/\mathscr{E}$ 可测, 则称 $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的适应于 $\{\mathscr{F}_t, t \in \mathbf{T}\}$ 的随机过程. 有时记 $X(t)$ 为 X_t.

对任何 $\Gamma \subset \mathbf{T}$, 记 $\sigma(X(t), t \in \Gamma)$ 为由 $\{X(t), t \in \Gamma\}$ 所产生的 σ 代数, 即 $\sigma(X(t), t \in \Gamma) = \bigvee\limits_{t\in\Gamma} \sigma(X(t)), \sigma(X(t)) = (X(t))^{-1}(\mathscr{E})$. 而简记 $\mathbf{E}(Y/\sigma(X(t), t \in \Gamma))$ 为 $\mathbf{E}(Y/X(t), t \in \Gamma)$.

定义 1.2 设 $\{\mathscr{F}_t : t \in \mathbf{T}\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中一族单调非降子 σ 代数族, $\{X(t) :$

$t \in \mathbf{T}\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的适应于 $\{\mathscr{F}_t : t \in \mathbf{T}\}$ 的以 $(E, \mathscr{E})$ 为状态空间的随机过程. 如果对每个 $t \in \mathbf{T}, \sigma$ 代数 $\mathscr{F}_t$ 与 $\mathscr{G}^t \overset{\text{def}}{=\!=} \sigma(X(s), s \geqslant t, s \in \mathbf{T})$ 关于 $\sigma(X(t))$ 条件独立, 即对任何 $A \in \mathscr{F}_t, B \in \mathscr{G}^t$, 有

$$P(A \bigcap B|X(t)) = P(A|X(t))P(B|X(t)),$$

则称 $\{X(t) : t \in \mathbf{T}\}$ 是关于 $\{\mathscr{F}_t : t \in \mathbf{T}\}$ 的马尔可夫过程. 特别地, 若 $\mathscr{F}_t = \mathscr{G}_t \overset{\text{def}}{=\!=} \sigma(X(s), s \leqslant t, s \in \mathbf{T})$, 则简称 $\{X(t) : t \in \mathbf{T}\}$ 是马尔可夫过程.

若 E 是可数集, $\mathscr{E}$ 是 E 的全体子集构成的 σ 代数, 则称以 $(E, \mathscr{E})$ 为状态空间的马尔可夫过程为可数状态的马尔可夫过程. 对于可数状态的马尔可夫过程而言, 对 E 中每一个单点集 $\{i\} \in \mathscr{E}$, 必有 $\mathscr{E}$ 含 E 的一切子集, 所以, 今后言及可数状态的马尔可夫过程, 其状态空间只需说明 E 是什么即可, 而 $\mathscr{E}$ 就不再提及了.

定理 1.1 设 $\{X(t) : t \in \mathbf{T}\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的以 $(E, \mathscr{E})$ 为状态空间的适应于 $\{\mathscr{F}_t : t \in \mathbf{T}\}$ 的随机过程, 则下列陈述等价:

(0) $\{X(t) : t \in \mathbf{T}\}$ 是关于 $\{\mathscr{F}_t : t \in \mathbf{T}\}$ 的马尔可夫过程;

(i) $P(A \bigcap B|X(t)) = P(A|X(t))P(B|X(t))$

$$(A \in \mathscr{F}_t, \quad B \in \mathscr{G}^t \overset{\text{def}}{=\!=} \sigma(X(s), \quad s \geqslant t, \quad s \in \mathbf{T}), \quad t \in \mathbf{T}); \tag{1.1}$$

(ii) $P(X(u) \in \Lambda|\mathscr{F}_t) = P(X(u) \in \Lambda|X(t))$

$$(\Lambda \in \mathscr{E}, u \geqslant t, t, u \in \mathbf{T}); \tag{1.2}$$

(iii) $\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{F}_t) = \boldsymbol{E}(\xi|X(t))$

$$(\xi \in b\sigma(X(u)), \quad u \geqslant t, \quad t, u \in \mathbf{T}); \tag{1.3}$$

(iv) $\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{F}_t) = \boldsymbol{E}(\xi|X(t))$

$$(\xi \in \sigma(X(u)), \quad \boldsymbol{E}(|\xi|) < \infty, \quad u \geqslant t, \quad t, u \in \mathbf{T}); \tag{1.4}$$

(v) 对任意 $t \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_m, t, u_i \in \mathbf{T}, \Lambda_i \in \mathscr{E}(i = 1, \cdots, m)$, 有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{X(u_i) \in \Lambda_i\}|\mathscr{F}_t\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{X(u_i) \in \Lambda_i\}|X(t)\right); \tag{1.5}$$

(vi) $\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{F}_t) = \boldsymbol{E}(\xi|X(t)) \quad (\xi \in b\mathscr{G}^t, t \in \mathbf{T});$ (1.6)

(vii) $\boldsymbol{E}(\xi|\mathscr{F}_t) = \boldsymbol{E}(\xi|X(t))$

$$(\xi \in \mathscr{G}^t, \boldsymbol{E}(|\xi|) < \infty, t \in \mathbf{T}); \tag{1.7}$$

(viii) $\boldsymbol{E}(\xi \cdot \eta|X(t)) = \boldsymbol{E}(\xi|X(t)) \cdot \boldsymbol{E}(\eta|X(t))$

$$(\xi \in b\mathscr{F}_t, \eta \in b\mathscr{G}^t, t \in \mathbf{T}). \tag{1.8}$$

证明可参考文献 [115] P.255.

本定理中的 (i)~(viii) 是马尔可夫过程的八种等价描述.

在定理 1.1 中, 特别地, 取 $\mathscr{F}_t = \mathscr{G}_t \overset{\text{def}}{=\!=} \sigma(X(u), u \leqslant t, u \in \mathbf{T})$ 时, 我们有如下定理.

定理 1.1′ 设 $\{X(t) : t \in \mathbf{T}\}$ 是以 $(E, \mathscr{E})$ 为状态空间的随机过程, 则下列陈述等价:

(i) $\{X(t) : t \in \mathbf{T}\}$ 是马尔可夫过程;

(ii) 对任何正整数 n, 任何 $u \geqslant t_n \geqslant \cdots \geqslant t_1, t_j, u \in \mathbf{T}$, 以及任何 $A \in \mathscr{E}$, 都有

$$P(X(u) \in A|X(t_1), \cdots, X(t_n)) = P(X(u) \in A|X(t_n)); \tag{1.9}$$

(iii) 对任何正整数 n, 任何 $u \geqslant t_n \geqslant \cdots \geqslant t_1, t_j, u \in \mathbf{T}$, 任何 $f \in b\mathscr{E}$, 有

$$\boldsymbol{E}(f(X(u))|X(t_1), \cdots, X(t_n)) = \boldsymbol{E}(f(X(u))|X(t_n)). \tag{1.10}$$

证明可参考文献 [115] P.257.

附注 1.1 定理 1.1 和定理 1.1′ 中的马尔可夫过程是存在的, 只需对它们的状态空间 $(E, \mathscr{E})$ 中 E 的拓扑略加限制即可. 证明可参考文献 [115] P.263.

定义 1.3 设 $(E, \mathscr{E})$ 为任一可测空间, $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$, 称 $P(s, t, x, A)(s < t, s, t \in \mathbf{T}, x \in E, A \in \mathscr{E})$ 为 $(E, \mathscr{E})$ 上的准转移函数, 简称准转移函数, 如果:

(1) 固定 $s, t, x, P(s, t, x, \cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的测度, 而且 $P(s, t, x, E) \leqslant 1$;

(2) 固定 $s, t, A, P(s, t, \cdot, A) \in \mathscr{E}$;

(3) 对任何 $s < t < u, s, t, u \in \mathbf{T}, x \in E, A \in \mathscr{E}$, 恒有

$$P(s, u, x, A) = \int_E P(s, t, x, \mathrm{d}y) P(t, u, y, A), \tag{1.11}$$

(1.11) 式称为 Kolmogorov–Chapmann 方程式, 简称 K–C 方程式.

满足 $P(s,t,x,E)\equiv 1$ 的准转移函数称为转移函数. 如果存在函数 $P(t,x,A)$ 使 (准) 转移函数

$$P(s,t,x,A)=P(t-s,x,A)\quad (s,t,t-s\in\mathbf{T},x\in E,A\in\mathscr{E}),\tag{1.12}$$

则称 $P(t,x,A)$ 是时齐的 (准) 转移函数. 这时 K–C 方程式变为

$$P(s+t,x,A)=\int_E P(s,x,\mathrm{d}y)P(t,y,A)$$
$$(s,t,s+t\in\mathbf{T},x\in E,A\in\mathscr{E}).\tag{1.13}$$

定义 1.4 设 $\{X(t),t\in\mathbf{T}\}$ 是以 $(E,\mathscr{E})$ 为状态空间的适应于 $\{\mathscr{F}_t,t\in\mathbf{T}\}$ 的随机过程, $P(s,t,x,A)$ 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的转移函数, 定义算子

$$P_{t,u}(x,f)=\int_E P(t,u,x,\mathrm{d}y)f(y)$$
$$(t,u\in\mathbf{T},t<u,x\in E,f\in b\mathscr{E}),\tag{1.14}$$

如果

$$\boldsymbol{E}(f(X(u))|\mathscr{F}_t)=P_{t,u}(X(t),f)\quad (t,u\in\mathbf{T},t<u,f\in b\mathscr{E}),\tag{1.15}$$

则称 $\{X(t),t\in\mathbf{T}\}$ 是关于 $\{\mathscr{F}_t,t\in\mathbf{T}\}$ 的以 $P(s,t,x,A)$ 为转移函数的马尔可夫过程, 或称之为规则的马尔可夫过程.

附注 1.2 定义 1.2 与定义 1.4 是相容的, 即关于 $\{\mathscr{F}_t,t\in\mathbf{T}\}$ 的规则的马尔可夫过程必为定义 1.2 中的关于 $\{\mathscr{F}_t,t\in\mathbf{T}\}$ 的马尔可夫过程.

事实上, 把 (1.15) 式两边对 σ 代数 $\sigma(X(t))$ 取条件期望即得 (注意 $\mathscr{F}_t\supset\sigma(X(t))$)

$$\boldsymbol{E}(f(X(u))|X(t))=P_{t,u}(X(t),f)\quad (t<u,t,u\in\mathbf{T},f\in b\mathscr{E}),\tag{1.16}$$

由 (1.15) 式、(1.16) 式和定理 1.1 中的 (iii) 即知 $\{X(t),t\in\mathbf{T}\}$ 是关于 $\{\mathscr{F}_t,t\in\mathbf{T}\}$ 的马尔可夫过程.

定义 1.5 具有转移函数 $P(s,t,x,A)$ 的马尔可夫过程 $\{X(t),t\in\mathbf{T}\}$ 称为时齐的, 如果其转移函数是时齐的.

转移函数 $P(s,t,x,A)$ 的直观概率意义是: 给定 $X(s)=x$ 时, $\{X(t)\in A\}$ 的条件概率, 或者说, 在时刻 s, 过程处于状态 x 的条件下, 到时刻 t, 过程转

移到状态集合 A 的条件概率. 转移函数是刻画马尔可夫过程的概率特性的最重要工具.

下面对具有转移函数 $P(s,t,x,A)$ 的以 $(E,\mathscr{E})$ 为状态空间且以 $\mathbf{T}$ 为时间参数集的马尔可夫过程 $\{X(t),t\in\mathbf{T}\}$ 进行分类.

(1) 按时间参数集 $\mathbf{T}$ 进行分类

(A) $\mathbf{T}$ 是离散集, 最重要的场合是 $\mathbf{T}=\{0,1,2,\cdots\}$, 这时, $\{X(t),t\in\mathbf{T}\}$ 可写为 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$, $P(s,t,x,A)$ 可写为 $P(m,m+n,x,A)$, 称之为 n 步转移函数. 由于它满足 K–C 方程式, 它由一步转移函数 $P(m,m+1,x,A)$ 所唯一确定. 具有离散时间参数集 $\mathbf{T}$ 的马尔可夫过程通常称为马尔可夫链.

(B) $\mathbf{T}$ 是连续集, 最重要的场合是 $\mathbf{T}=[0,\infty)$, 这时称之为具有连续时间参数集的马尔可夫过程.

如不特别声明, 不管是连续时间参数集的马尔可夫过程, 或具有离散时间参数集的马尔可夫链, 有时统称为马尔可夫过程.

(2) 按状态空间 $(E,\mathscr{E})$ 进行分类

(A) E 是可数集, 不失一般性可设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$, 这时, 转移函数 $P(s,t,x,A)$ 由 $P(s,t,i,\{j\})$ 所唯一确定 (因为 $P(s,t,x,\cdot)$ 是概率测度), $i,j=0,1,2,\cdots$. 若简单记 $P(s,t,i,\{j\})=P(s,t,i,j)$, $P(s,t)=(P(s,t,i,j),i,j=0,1,2,\cdots)$ 为矩阵, 则可数状态的马尔可夫过程的概率特性主要由转移矩阵 $P(s,t)$ 来决定.

(B) E 是一般的集合, 有时是某种拓扑空间. 这时, 马尔可夫过程称为一般状态的马尔可夫过程, 其概率特性主要由转移函数 $P(s,t,x,A)$ 所决定.

(3) 按转移函数 $P(s,t,x,A)$ 来分类

(A) $P(s,t,x,A)$ 是时齐的, 即存在函数 $P(t,x,A)=P(u,u+t,x,A)$ (对一切 $t,u,u+t\in\mathbf{T},x\in E,A\in\mathscr{E}$), 这时, 马尔可夫过程称为时齐的马尔可夫过程.

(B) $P(s,t,x,A)$ 是非时齐的, 则亦称马尔可夫过程是非时齐的马尔可夫过程.

按照上述三个标准, 可以把马尔可夫过程分为八类.

(1) 非时齐的一般状态的连续时间参数的马尔可夫过程, 它的概率特性主要由转移函数 $P(s,t,x,A)$ 决定;

(2) 非时齐的一般状态的离散时间参数的马尔可夫链, 它的概率特性主要由一步转移函数 $P(m,m+1,x,A)$ 决定;

(3) 非时齐的可数状态的连续时间参数的马尔可夫过程, 它的概率特性主要由转移矩阵 $P(s,t)=(P(s,t,i,j),i,j\in E)$ 决定;