# 奥赛经典

专题研究系列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

# 奥林匹克数学中的组合问题

◇张 垚 冷岗松 沈文选/著

湖南师范大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

奥林匹克数学中的组合问题 / 张垚,冷岗松,沈文选著 .—长沙:湖南师范大学出版社,2004.6

(奥赛经典丛书 . 专题研究系列)

ISBN 7—81081—435—4

Ⅰ. 奥 ... Ⅱ. ①张 ... ②冷 ... ③沈 ... Ⅲ. 组合数学—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 043126 号

**奥林匹克数学中的组合问题**

张 垚 冷岗松 沈文选 著

◇丛书策划:周玉波 陈宏平 廖建军 廖小刚
◇组 稿:廖小刚
◇责任编辑:廖小刚 陈 琳
◇责任校对:蒋旭东
◇出版发行:湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山 邮编/410081
电话/0731.8853867 8872751 传真/0731.8872636
◇经销:湖南省新华书店
◇印刷:国防科技大学印刷厂

◇开本:730×960 1/16 开
◇印张:21.25
◇字数:428 千字
◇版次:2004 年 7 月第 1 版 2004 年 11 月第 2 次印刷
◇印数:5001—10000 册
◇书号:ISBN 7-81081-435-4/G·285
◇定价:23.00 元

# 前 言

组合数学历史悠久,几千年前,我国的《河图》、《洛书》就已经涉及一些简单有趣的组合问题.近20年来,由于计算机科学、编码理论、规划论、数字通讯、试验设计等学科的迅猛发展,提出了一系列需要离散数学解决的理论和实际问题,加上组合数学的自身的逻辑要求提出的问题以及其他数学分支向组合数学提出的问题,促进了组合数学的研究十分活跃而富有成果,解决问题的方法和技巧更富有变化,使这一古老的数学分支成为了一门充满了活力的数学学科.

数学竞赛中出现的组合问题往往表达形式上简单明了,而求解这些问题却需要敏锐的洞察力、丰富的想像力和必要的技巧,通常没有一个固定的解题模式可遵循,而且各种难易程度不同的问题都非常富有,所以在各类不同程度的智力训练和数学竞赛中,大都离不开组合问题.

本书分为7章,每章重点讨论和研究了一类在数学竞赛中经常出现的组合问题.除了介绍必要的组合数学的有关知识外,着重介绍了解这类问题的一些基本方法.在介绍解题方法时,配备了一些相当于全国高中数学联赛水平的例题(个别例题为中国数学奥林匹克(CMO)和国际中学生数学奥林匹克(IMO)中较易的问题).每章最后一节为典型例题解题分析,所配备的例题相当于CMO和IMO的水平.

每章配备有一定数量的习题,A类习题相当于高中联赛水平,B类习题相当于CMO和IMO的水平.

在例题、习题的选择方面,我们尽可能选编一些较新颖的,尤其是近几年国内外数学竞赛中有关组合数学的试题,也包括少量作者自己编拟的问题.在本书中我们特别注意引导读者对解决问题的思想方法进行探索、分析和总结,希望通过这部分内容的学习,能使读者的数学修养以及解决有关数学竞赛中组合问题的能力有所提高.

编者

2004年3月

# 目 录

# 第一章 组合数学中的计数问题

## §1 基础知识

### 1. 加法原理与乘法原理

如果完成一件事情的方法可分成 $n$ 个互不相交的类，且第一类中有 $m_1$ 种方法，第 2 类中有 $m_2$ 种方法，…，第 $n$ 类中有 $m_n$ 种方法，那么完成这件事一共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法. 这就是加法原理，简称为分类相加.

如果完成一件事要分 $n$ 步，且第 1 步有 $m_1$ 种方法，第 2 步有 $m_2$ 种方法，…，第 $n$ 步有 $m_n$ 种方法，那么完成这件事一共有 $m_1 m_2\cdots m_n$ 种方法. 这就是乘法原理，简称为分步相乘.

### 2. 无重复的排列与组合

(1)无重复的排列

从 $n$ 个不同元素中，任取 $m(\leqslant n)$个不同元素，按照一定的顺序排成一列(或者从 $n$ 个不同元素中，有序地任取 $m(\leqslant n)$个不同元素)，叫做从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个不同元素的一个排列.

从 $n$ 个不同元素中取出 $m(\leqslant n)$个不同元素的排列的个数，叫做从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个不同元素的排列数，用符号 $P_n^m$ 或 $A_n^m$ 表示. 由乘法原理得

$$P_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1).$$

(取第 1 个元素放在第 1 个位置有 $n$ 种方法，取定第一位后，由于元素不允许重复，选择第二位有 $n-1$ 种方法，…，选择第 $m$ 位有 $n-m+1$ 种方法).

特别 $m=n$，就得到 $n$ 个不同元素的全排列数公式

$$P_n^n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!.$$

为了方便起见，约定 $0!=1$，则上面的公式可写为 $P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)}$.

(2)无重复的组合

从 $n$ 个不同元素中任取 $m(\leqslant n)$个不同元素并成一组(或者从 $n$ 个不同元素中，无

序地任取 $m(\leqslant n)$个不同元素),叫做从 $n$ 个不同元素中任取 $m$ 个不同元素的组合.

从 $n$ 个不同元素中取 $m$ 个不同元素的所有组合的个数,叫做从 $n$ 个不同元素中取 $m$ 个不同元素的组合数,用符号 $C_m^n$ 表示,其计算公式为

$$C_m^n=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}.$$

事实上,对于每一个从 $n$ 个不同元素取 $m$ 个不同元素的组合,将其元素作全排列可产生 $m!$ 个不同的排列.显然不同的组合产生的排列互不相同,且每个排列都可以分 2 步得到.由乘法原理可得 $P_n^m=C_n^m\cdot m!$,于是 $C_n^m=\dfrac{P_n^m}{m!}$.

**3. 可重复的排列与组合**

(1)可重复的排列

从 $n$ 个不同元素中任取(允许重复)$m(\geqslant 1)$个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 $n$ 个不同元素中取 $m$ 个元素的可重复排列.

由乘法原理易知,从 $n$ 个不同元素中取 $m(\geqslant 1)$个元素的所有可重复排列个数为 $n^m$(选第 1 位元素有 $n$ 种方法,选定第 1 位后,选第 2 位仍有 $n$ 种方法,…,最后,选第 $m$ 位也有 $n$ 种方法).

(2)有限个重复元素的全排列

设 $n$ 个元素由 $k$ 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 组成,其中 $a_1$ 有 $n_1$ 个,$a_2$ 有 $n_2$ 个,…,$a_k$ 有 $n_k$ 个($n_1+n_2+\cdots+n_k=n$),那么这 $n$ 个元素的全排列称为有限个重复元素的全排列,其排列数为$\dfrac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$.

事实上,若 $n$ 个元素互不相同,则全排列数为 $n!$,但其中 $a_i$ 有 $n_i$ 个,它们之间任意交换顺序(共有 $n_i!$ 种交换顺序的方法),得到的是同一排列($i=1,2,\cdots,k$).故不同的排列个数为$\dfrac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$.

(3)可重复的组合

从 $n$ 个不同元素中,任意可重复地选取 $m(\geqslant 1)$个元素,称为 $n$ 个不同元素取 $m$ 个元素的可重复的组合,其不同组合的个数为 $C_{n+m-1}^m$.

事实上,不妨设 $n$ 个元素为 $1,2,\cdots,n$,设取出的 $m$ 个元素为

$(1\leqslant)a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_m(\leqslant n)$,

则显然$(1\leqslant)a_1+0<a_2+1<\cdots<a_m+m-1(\leqslant n+m-1)$.

将$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$与$(a_1+0,a_2+1,\cdots,a_m+m-1)$对应,后者为从 $n+m-1$ 个不

同元素1,2,3,…,$n+m-1$ 中取 $m$ 个不同元素的组合,且不同的($a_1,a_2,\cdots,a_m$)对应的($a_1+0,a_2+1,\cdots,a_m+m-1$)是不同的.反过来,从 1,2,…,$n+m-1$ 中任取 $m$ 个不同的数的组合

$(1\leqslant)b_1<b_2<\cdots<b_m(\leqslant n+m-1)$

也恰好对应于一个从 $n$ 个元素 1,2,…,$n$ 中取 $m$ 个可重复元素的组合

$(1\leqslant)b_1-0\leqslant b_2-1\leqslant\cdots\leqslant b_m-m+1(\leqslant n)$.

因此,上面所说对应是一一对应,故所求组合数等于从 $n+m-1$ 个不同的元素 1,2,…,$n+m-1$ 中取 $m$ 个不同元素的组合数,即 $C_{n+m-1}^{m}$.

**4. 圆排列与项链数**

从 $n$ 个不同元素中取 $m$ 个不同元素排在一个圆周上,称为从 $n$ 个不同元素中取 $m$ 个不同元素的圆周排列,其排列数为

$$\frac{P_n^m}{m}=\frac{n!}{m\cdot(n-m)!}.$$

事实上,对每一个固定的 $m$ 个元素的圆排列,在任意两个元素之间将圆周剪开,沿顺时针方向拉直恰产生 $m$ 个直线排列,且不同的圆排列所产生的直线排列互不相同.又易见从 $n$ 个不同元素取 $m$ 个不同元素的排列都可以这样从圆排列中得到,所以,所求圆排列数的 $m$ 倍恰是从 $n$ 个不同元素中取 $m$ 个不同元素的排列数 $P_n^m$,由此得出上述结论.

特别地,将 $n$ 个不同元素排成一个圆周的圆排列数为$\frac{P_n^n}{n}=(n-1)!$.

若将 $n$ 粒不同的珍珠,用线串成一根项链的不同方法数记为 $D_n$,则

$$D_n=\begin{cases}1(n=1\text{ 或 }2),\\ \frac{1}{2}(n-1)!\ (n\geqslant 3).\end{cases}$$

这是因为将一个按顺时针方向排列的 $n(\geqslant 3)$个不同元素的圆排列,改为逆时针方向排列时,得到的是不同的圆排列,而项链则没有顺时针方向与逆时针方向排列的区别,故 $n\geqslant 3$ 时,$n$ 粒不同珠子的项链数等于 $n$ 粒不同珠子的圆排列数的一半.而 $n=1$ 或 2 时,显然项链数等于 1.

**5. 容斥原理**

对于有限集合 $S$,我们用 $|S|$ 表示 $S$ 中元素的个数,若 $S_1$ 是 $S$ 的子集,则 $\overline{S_1}=S\setminus S_1$ 表示 $S_1$ 在 $S$ 中的补集.

**定理 1(容斥原理)** 设 $S$ 是有限集合,$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是 $S$ 的子集,则

$$\begin{aligned}|\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\cdots\cap\overline{S}_n| = |S| - \sum_{i=1}^{n}|S_i| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|S_i\cap S_j| - \cdots +\\ (-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap\cdots\cap S_{i_k}| + \cdots +\\ (-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.\end{aligned} \quad ①$$

**证明(贡献法)** 只要对任意 $x\in S$,证明①式两边计算 $x$ 的次数是相同的即可.

若 $x$ 不属于$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 中任何集合,则 $x$ 在①式左边计算了 1 次,$x$ 在①式右边第 1 项$|S|$中计算了 1 次,而在①式右边其余各个和式项中计算的次数为 0,故 $x$ 在①式右边计算的总次数也为 1.

若 $x$ 恰属于$S_1,\cdots,S_n$ 中$k$ 个集合,这里 $k\geqslant1$,则 $x$ 在①式左边计算的次数为 0,而在右边的第一项,第二项,…,第 $k+1$ 项,…,最后一项中,$x$ 计算的次数分别为 1,$C_k^1$,$C_k^2,\cdots,C_k^k,0,0,\cdots,0$.故 $x$ 在①式右边计算的总数为

$$1-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^kC_k^k+0+\cdots+0=(1-1)^k=0.$$

综合上面的讨论,我们知道对任意 $x\in S$,①式两边计算 $x$ 的次数(即 $x$ 对等式两边所作的贡献)相等.故①式成立.

对 $S$ 的任意子集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,因

$$\overline{S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n}=\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\cdots\cap\overline{S}_n,$$

故$|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n|+|\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\cdots\cap\overline{S}_n|=|S|$.于是,由定理 1 可推出下面定理 2.

**定理 2(容斥原理的对偶形式)** 对任意有限集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,我们有

$$\begin{aligned}|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n| = \sum_{i=1}^{n}|S_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|S_i\cap S_j| + \cdots +\\ (-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap\cdots\cap S_{i_k}| + \cdots +\\ (-1)^{n-1}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|.\end{aligned}$$

**注** 有的书中称定理 1 为包含排斥原理,而将定理 2 称为容斥原理.本书中将定理 1 和 2 都称为容斥原理.

### 6. 算二次原理(富比尼原理)

所谓算二次原理(又称富比尼原理)就是对同一个量,如果用两种不同的方法去计算,所得的结果应相等.

例如一个 $m\times n$ 的数表(数学中称之为 $m\times n$ 矩阵):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn}\end{vmatrix}.$$

若先算第 $i$ 行元素之和 $r_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(i=1,2,\cdots,m)$，再把各行的和加起来，得到表内各数的总和为 $\sum\limits_{i=1}^{m}r_i=\sum\limits_{i=1}^{m}(\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij})$.

另一种算法是先算出第 $j$ 列元素之和 $l_j=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}$，$l_j=1,2,\cdots,n$，再把各列的和加起来，也得到表内各数的总和 $\sum\limits_{j=1}^{n}l_j=\sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij})$．于是，我们有 $\sum\limits_{i=1}^{m}r_i=\sum\limits_{j=1}^{n}l_j$．即

$$\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}).$$

一般说来，设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 是两个有限集合，我们称 $S=A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$ 为 $A$ 与 $B$ 的笛卡尔乘积．对任意 $a_i\in A$，设 $C_i=\{(a_i,b)\mid b\in B\}(i=1,2,\cdots,m)$，对任意 $b_j\in B$，设 $D_j=\{(a,b_j)\mid a\in A(j=1,2,\cdots,n)$．于是 $|S|=\sum\limits_{i=1}^{m}|C_i|=\sum\limits_{j=1}^{n}|D_j|$．

计数中的富比尼原理是富比尼(G. Fubini)最先证明的关于测度空间中二重积分交换次序的富比尼定理之特例．在应用富比尼定理时，关键在于按照适当的条件，选择集合 $A$ 和 $B$ 并将 $A$ 中元素与 $B$ 中元素配对，然后用两种不同的方法进行计算，故又称为算二次原理．

## §2　解组合计数问题的基本方法

### 1．枚举法和利用基本计数原理及基本公式

所谓枚举法，就是把要计数的集合 $M$ 中的元素逐一列举出来，不重复不遗漏，从而计算出 $M$ 中元素的个数．在枚举的过程中，常常要适当地分类和分步枚举，这就还要用到加法原理和乘法原理以及计数的基本公式．

**例 1**　方程 $2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$ 的非负整数解共有________组．　　　　(1985 年全国高中联赛试题)

**解**　$\because$　$0\leqslant 2x_1\leqslant 3$ 且 $x_1$ 为非负整数，$\therefore x_1=0$ 或 1，下面分两种情形．

(1)若 $x_1=1$，则必有某 $x_i=1(2\leqslant i\leqslant 10)$，其余 $x_j=0(j\neq 1,i)$，这样的解有 $C_9^1=9$ 组．

(2)若 $x_1=0$，则又分为三种情形．

(i)有某一个 $x_i=3(2\leqslant i\leqslant 10)$，则其余 $x_j=0(j\neq 1,i)$，这时，有 $C_9^1=9$ 组解．

(ii)有某一个 $x_i=2(2\leqslant i\leqslant 10)$，则必还有一个 $x_j=1(j\neq 1,i)$，其余 $x_k=0(k\neq 1,i,j)$，这时有 $C_9^1C_8^1=72$ 组解．

(iii)所有 $x_i \neq 2$ 或 $3(2 \leq i \leq 10)$,则 $x_2, x_3, \cdots, x_{10}$ 中必有 3 个等于 1,其余 6 个等于 0,这时有 $C_9^3 = 84$ 组解.

于是,原方程共有 $9+9+72+84=174$ 组解.

**例 2** 设 $ABCDEF$ 为正六边形,一只青蛙开始在顶点 $A$ 处,它每次可随意跳到相邻两顶点之一.若在 5 次内跳到 $D$ 点,则停止跳动.若 5 次内不能到达 $D$ 点,则跳完 5 次也停止跳动.那么这只青蛙从开始到停止,可能出现的不同跳法共________种.

(1997 年全国高中联赛试题)

**解** 如图 1-1,显然青蛙不可能经过跳 1 次,2 次,4 次到达 $D$ 点,故青蛙的跳法只有两种情形.

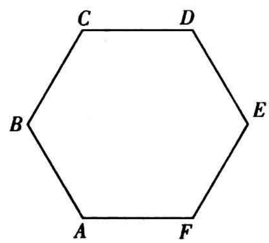

图 1-1

(1)青蛙经过跳 3 次到达 $D$ 点,这时只有 2 种跳法.

(2)青蛙一共跳 5 次后停止,这时跳 3 次的跳法(一定不能到达 $D$ 点)有 $2^3-2$ 种(每次有 2 种跳法,跳 3 次共有 $2^3$ 种跳法,其中有 2 种跳法到达 $D$ 点应去掉),后 2 次跳法有 $2^2$ 种,故青蛙一共跳 5 次后停止的跳法有 $(2^3-2)\cdot 2^2=24$ 种.

由(1)及(2)知青蛙共有 $2+24=26$ 种跳法.

**例 3** 过正方体的任意 2 个顶点作一直线,在这些直线中,不互相垂直的异面直线共有________对.

(2000 年湖南省中学生数学奥林匹克夏令营试题)

**解** 首先,与一条棱不垂直且异面的直线有 6 条(4 条侧面对角线及 2 条体对角线所在直线),12 条棱可生成 $12 \times 6 = 72$ 对异面直线.

其次,与一条面对角线不垂直且异面的直线有 8 条(4 条棱及 4 条侧面对角线所在直线),12 条侧面对角线可生成 $12 \times 8 = 96$ 对异面直线.

最后,与一条体对角线不垂直且异面的直线有 6 条(6 条棱所在直线),4 条体对角线可生成 $6 \times 4 = 24$ 对异面直线.

因为上述计数中,每对异面直线计算了 2 次,故不互相垂直的异面直线共有 $\frac{1}{2}(72+96+24)=96$ 对.

**例 4** 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 是 $\{1901, 1902, \cdots, 2000\}$ 的任意排列,部分和数列 $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $\cdots$, $S_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$.若数列 $S_j(1 \leq j \leq 100)$ 中每一项均不被 3 整除,问这样的数列有多少个?

(2000 年加拿大数学奥林匹克试题)

**解** 令 $\{1901, 1902, \cdots, 2000\} = R_0 \cup R_1 \cup R_2$,这里 $R_i$ 中的任意元素模 3 与 $i$ 同余 $(i=0,1,2)$,则 $|R_0| = |R_1| = 33$, $|R_2| = 34$.设 $a_i$ 除以 3 的余数为 $a'_i(i=1,2,\cdots,100)$,于是排列 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_{100}\}$ 的部分和能否被 3 整除由排列 $S' = \{a'_1, a'_2, \cdots, a'_{100}\}$ 来决定,且 $S'$ 中共 33 个 0,33 个 1,34 个 2.故欲使 $S$ 的任何部分和数列不被 3 整

除，则 $S'$ 中 67 个由 1 和 2 组成的数列应为 1,1,2,1,2,…,1,2 或 2,2,1,2,1,…,2,1，但 $|R_2|=|R_1|+1$，故只有第 2 种情形才可能．$S'$ 中 33 个 0，除了 $a'_1\neq 0$ 可放在其他任何位置，这样有 $C_{99}^{33}$ 种方式，故满足条件的排列共有 $C_{99}^{33}\cdot 33!\ 33!\ 34!\ =\dfrac{99!\ 33!\ 34!}{66!}$ 种．

**例 5** 将一个四棱椎的每一个顶点染上一种颜色，并使同一棱的两端点异色．如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法总数是________．

(1995 年全国高中联赛试题)

**解法一** 依题意，四棱锥 $S-ABCD$ 的顶点 $S,A,B$ 互不同色，它们有 $P_5^3=60$ 种染色方法．

当 $S,A,B$ 的颜色染好后，不妨设其颜色分别为 1 色，2 色和 3 色，则 $C$ 只可染 2，4，5 色中的一色．

(1)若 $C$ 染 2 色，则 $D$ 可染 3，4，5 色之一，有 $C_3^1=3$ 种方法．

(2)若 $C$ 染 4 色，则 $D$ 可染 3，5 色之一，有 $C_2^1=2$ 种方法．

(3)若 $C$ 染 5 色，则 $D$ 可染 2，4 色之一，有 $C_2^1=2$ 种方法．

故总的染色方法数为 $60(3+2+2)=420$ 种．

**解法二** 显然四棱锥 $S-ABCD$ 中，$S,A,B$ 不同色，故至少要用 3 种颜色．

若 5 种颜色都用，则有 $P_5^5=120$ 种方法．

若只用 4 色，则从 5 色中取 4 色有 $C_5^4$ 种方法，从 4 色中取 1 色染顶点 $S$ 有 $C_4^1$ 种方法，这时 $A,B,C,D$ 中必有一对顶点($A$ 与 $C$ 或 $B$ 与 $D$)同色．染 $A,B,C,D$ 的方法有 $C_2^1\cdot P_3^3$ 种，故只用 4 色时有 $C_5^4C_4^1C_2^1P_3^3=240$ 种染色方法．

若只用 3 色，则从 5 色中取 3 色，再从取出的 3 色中取 1 色染顶点 $S$ 有 $C_5^3C_3^1$ 种方法，其余 2 色染 $A,B,C,D$(这时必有 $A$ 与 $C$ 同色且 $B$ 与 $D$ 同色)有 $P_2^2$ 种方法，故只用 3 色时，有 $C_5^3C_3^1P_2^2=60$ 种染色方法．

综合上述，知一共有 $120+240+60=420$ 种不同的染色方法．

**例 6** 从给定的 6 种不同颜色中选用若干种颜色，将一个正方体的六个面染色，每面恰染一色，具有公共棱的两个面不同色，则不同的染色方案有________种．(约定经过翻滚或旋转可以重合的染色方案认为是相同的染色方案)

(1996 年全国高中联赛试题)

**解** 因有公共顶点的三个面互不同色，故至少要用 3 色，下面分 4 种情形．

(1)6 种颜色都用时，现将染某种固定颜色的面朝上，从剩下 5 色中取 1 色染下底面有 $C_5^1$ 种方法，余下 4 色染余下的 4 个侧面(应是 4 种颜色的圆排列)有 $(4-1)!$ 种染法，所以 6 种颜色都用时，染色方案有 $C_5^1\cdot(4-1)!\ =30$ 种．

(2)只用 5 种颜色时，从 6 色中取 5 色有 $C_6^5$ 种方法，这时必有一组对面同色，从 5

色中取1色染一组对面，并将它们朝上和朝下，有 $C_5^1$ 种方法，其余 4 色染余下 4 个侧面(应是 4 种不同颜色珠子的项链)有$\frac{1}{2}(4-1)!$ 种染法，所以只用 5 色时的染色方案有 $C_6^5C_5^1\cdot\frac{1}{2}(4-1)!=90$ 种.

(3)只用 4 种颜色时，从 6 色中取 4 色有 $C_6^4$ 种方法，这时必有 2 组对面同色，另一组对面不同色，将不同色的一组对面朝上和朝下并从 4 色中取 2 色染上、下底面(注意这时上、下底面没有区别)有 $C_4^2$ 种方法，余下 2 色染余下的 4 个侧面且使 2 组对面同色(应是 2 种颜色珠子的项链)只有 1 种染法，所以只用 4 色时的染色方案有 $C_6^4C_4^2\cdot 1=90$ 种.

(4)只用 3 色时，从 6 色中取 3 色有 $C_6^3$ 种方法，这时 3 组对面都同色，用 3 种颜色去给它们染色只有 1 种方法，所以只用 3 色时的染色方案有 $C_6^3=20$ 种.

综上所述，知不同的染色方案共有 $30+90+90+20=230$ 种.

**例 7**　把 $n$ 个不同的球，分别装入 $k$ 个盒子中，使其中 $k_1$ 个盒子中每个有 $p_1$ 个球，$k_2$ 个盒子中每个都有 $p_2$ 个球，…，$k_m$ 个盒子中每个都有 $p_m$ 个球，这里 $k=k_1+k_2+\cdots+k_m$，$n=k_1p_1+k_2p_2+\cdots+k_mp_m$.求下列情形下，各有多少种不同放法?

(1)盒子均不相同(即可辨)；

(2)装有相同数目的球的盒子相同(即不可辨).

**解**　(1)设符合条件的方法数为 $f$.我们先考虑把 $n$ 个球放入 $k$ 个盒子后，都将球作直线排列，其排列数为 $n!$.我们将这个排法分下列 $n$ 步:第 1 步，依题意将 $n$ 个球放入 $k$ 个盒子中，有 $f$ 种方法;第 2 步，将 $k_1$ 个盒子中的每个盒内均放有的 $p_1$ 个球作直线排列，有$(p_1!)^{k_1}$种方法;第 3 步，将 $k_2$ 个盒子中的每个盒内均放有的 $p_2$ 个球作直线排列，有$(p_2!)^{k_2}$种方法;…;第 $m+1$ 步，将 $k_m$ 个盒子中的每个盒内均放有的 $p_m$ 个球作直线排列，有$(p_{m!})^{k_m}$种方法.于是由乘法原理得

$$n!=f\cdot(p_1!)^{k_1}(p_2!)^{k_2}\cdots(p_m!)^{k_m}.$$

故符合条件的放法为 $f=n!/[(p_1!)^{k_1}(p_2!)^{k_2}\cdots(p_m!)^{k_m}]$.

(2)因为放有相同数目的球的盒子不可辨，故符合题意的方法数为

$$f/[(k_1!)\cdot(k_2!)\cdots(k_m!)].$$

**注**　上述问题称为“放球问题”，其中当球不可辨时，称为“第一类放球问题”，而当球可辨时，称为“第二类放球问题”.上述例 7 属于“第二类放球问题”.关于放球问题，后面还要作进一步的讨论.

**2. 映射方法与一般对应方法**

**定义**　设 $f$ 是从集合 $M$ 到集合 $N$ 的映射.若对任意 $x_1,x_2\in M$，当 $x_1\neq x_2$ 时有

$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 $f$ 为从 $M$ 到 $N$ 的单射；若对任意的 $y\in N$，存在 $x\in M$，使得 $f(x)=y$，则称 $f$ 是从 $M$ 到 $N$ 上的满射；若 $f$ 既是单射又是满射，则称 $f$ 是从 $M$ 到 $N$ 上的双射，又称 $f$ 是 $M$ 与 $N$ 之间的一个一一映射．

**定理 1** 对于两个有限集合 $M$ 与 $N$，若存在从 $M$ 到 $N$ 的单射，则 $|M|\leqslant|N|$；若存在 $M$ 到 $N$ 上的满射，则 $|M|\geqslant|N|$；若存在 $M$ 到 $N$ 上的双射，则 $|M|=|N|$．

当计算有限集合 $M$ 中的元素个数比较困难时，我们设法建立 $M$ 到另一个有限集合 $N$ 上的双射，如果 $N$ 中的元素个数 $|N|$ 容易算出，于是由 $|M|=|N|$，得出 $M$ 中元素个数，这种计数方法称为映射方法．这种方法实质上是通过双射将 $M$ 中的元素与 $N$ 中的元素配对，故它又称为配对法．

**例 1** 考察集合 $\{x^2+px+q=0\mid p,q$ 为整数，$1\leqslant p\leqslant1997,1\leqslant q\leqslant1997\}$ 的如下两个子集：第一个子集由所有具有整根的二次三项式组成；第二个子集由所有无实根的二次三项式组成．试问：哪一个子集中的元素较多？

**解** 设 $x^2+px+q=0$ 有两个整根 $r,s$，且 $r\geqslant s$，则 $r+s=-p,rs=q$，易知 $(p,q)$ 与 $(r,s)$ 一一对应，且 $r,s$ 均为负整数，这样 $r^2\leqslant rs=q\leqslant1997$，故 $|r|\leqslant44$．而对于 $|r|\geqslant2$，$|s|=\dfrac{q}{|r|}\leqslant\dfrac{q}{2}<1000$，对于 $|r|=1$，$|s|=p-|r|\leqslant1996<2000$，故这样的 $(r,s)$ 对少于 $2000+43\times1000=45000$．可见，第一类子集中元素个数少于 45000 个．

对于 $x^2+px+q=0$ 没有实根的情况，有 $p^2-4q<0$．若 $p\leqslant44$，则只要 $4q\geqslant1940>44^2$，就有 $p^2-4q<0$ 成立，从而 $q\geqslant485$．而在 $[485,1997]$ 中有 1513 种取值．故 $(p,q)$ 对至少有 $44\times1513>45000$，即第二个子集中元素多于 45000．由此可知第二个子集中元素较多．

**例 2** 证明：不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$（$k,n$ 为正整数）的非负整数解组的组数为 $C_{n+k-1}^{k-1}$．

**证明** 我们将不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 的任意一组非负整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 对应于一个由 $n$ 个圆圈"○"，$k-1$ 条竖线"|"组成的如下排列：

$$\underbrace{0\cdots0}_{x_1\text{个}}|\underbrace{0\cdots0}_{x_2\text{个}}|\cdots|\underbrace{0\cdots0}_{x_k\text{个}}.$$

其中第一根竖线"|"的左侧恰有 $x_1$ 个圆圈"○"；第 $i-1$ 根竖线"|"与第 $i$ 根竖线"|"之间恰有 $x_i$ 个圆圈"○"$(i=2,3,\cdots,k-1)$；第 $k-1$ 根竖线"|"的右侧恰有 $x_k$ 个圆圈"○"．显然，不定方格 $x_1+\cdots+x_k=n$ 的不同的解 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 对应于不同的排列，且每一个这样的排列对应于不定方程 $x_1+x_+\cdots+x_k=n$ 的一组非负整数解．因此，我们所建立的对应是一个双射．又因为由 $n$ 个圆圈"○"及 $k-1$ 根竖线"|"组成的 $n+k-1$ 个元素的全排数为 $C_{n+k-1}^{k-1}=C_{n+k-1}^{n}$，所以，不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 的非负