经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

数学

普通高中课程标准实验教科书

选修 3-1

数学史选讲

凤凰国标教材

凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

ISBN 7-5343-6755-7

9 787534 367557 >

ISBN 7－5343－6755－7
G·6440　定价:4.10 元

批准文号：苏价费[2006]160 号　举报电话：12358

经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

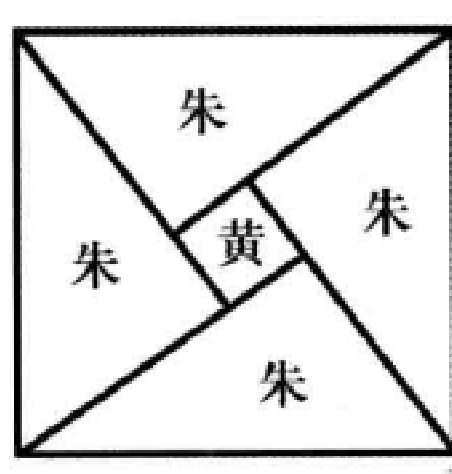
数学

数学史选讲

shuxueshi xuanjiang

选修 3-1

主　编：单　墫
副主编：李善良　陈永高　王巧林



凤凰国标教材
凤凰出版传媒集团
江蘇教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

普通高中课程标准实验教科书·数学

书　　名	数学史选讲(选修 3－1)
作　　者	本书编写组
责任编辑	蔡　立
出版发行	凤凰出版传媒集团 江苏教育出版社(南京市马家街 31 号 210009)
网　　址	http://www.1088.com.cn
集团网址	凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销	江苏省新华发行集团有限公司
照　　排	南京展望文化发展有限公司
印　　刷	江苏新华印刷厂
厂　　址	南京市张王庙 88 号(邮编 210037)
电　　话	025－85521756
开　　本	1000×1436 毫米　1/32
印　　张	3.5
版　　次	2005 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 3 次印刷
书　　号	ISBN　7－5343－6755－7/G·2
定　　价	4.10 元
批发电话	025－83260760,83260768
邮购电话	025－85400774,8008289797
短信咨询	10602585420909
E－mail	jsep@vip.163.com
盗版举报	025－83204538

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

编写人员　朱家生

参与设计　周焕山　李善良

责任编辑　蔡　立

目　　录

说　　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据2003年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设恰当的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法三条主线,通过问题将全书贯通.每个模块围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最佳发展.

众多的数学家、心理学家、学科教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写工作.参与本册讨论与审稿的专家与教师有仇炳生、徐稼红等,在此向他们深表感谢!

本书编写组

2005年7月

1.1 起源于河谷的数学文明

数学，作为人类文明的重要组成部分，有着非常悠久的历史. 那么，数学这门学科究竟是何时诞生的呢？据文字记载，至少在 5 000 年以前，人类就已有了数学活动. 数学也和其他人类文明一样，最早出现于尼罗河中下游的古埃及、幼发拉底河与底格里斯河两河流域的古巴比伦、黄河流域的中国和恒河流域的印度. 但就整个人类数学发展的源头而言，客观地讲，一般还应首推古埃及与古巴比伦.

1.1.1 纸草书中记录的数学

我们知道，非洲的尼罗河是世界上最长的河流之一. 早在公元前3000 年左右，在这条河的中下游，古埃及人就已经建立起了早期的奴隶制国家，其地理位置与现在的埃及区别不大(如图 1－1－1). 打猎、渔业及畜牧业是古埃及人最初的谋生方式. 一年一次的尼罗河洪水给这片谷

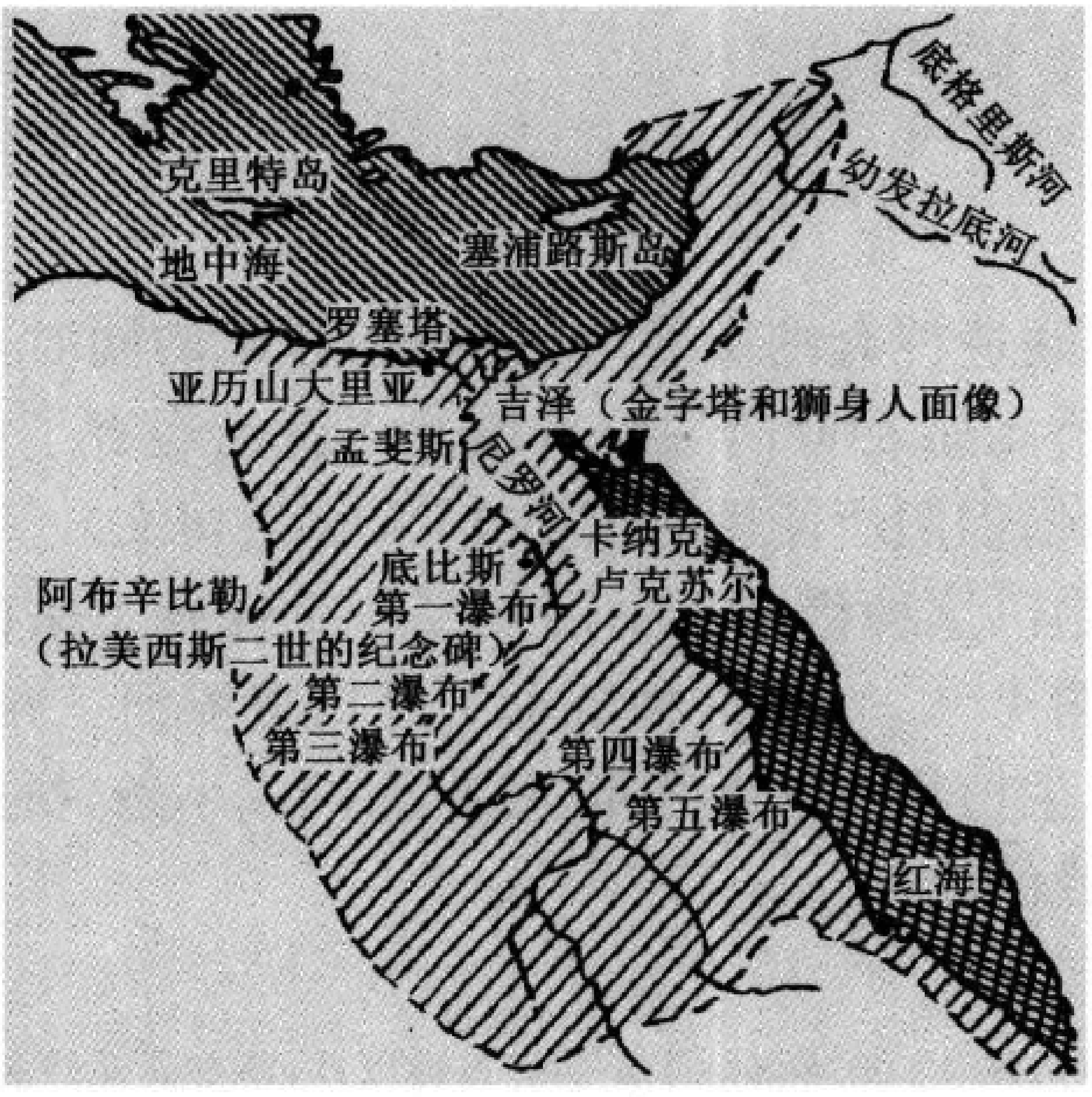


图 1－1－1　古代埃及所处的地理位置

地带来了肥沃的淤泥，那些以游牧为生的古埃及人便在这里定居下来，由狩猎转向耕种. 在发展农业的同时，手工业与贸易也随之迅速发展起来，这些都推动了包括数学在内的自然科学各学科知识的积累.

提到古埃及，大家就会自然想到作为世界七大奇迹之一的金字塔. 位于开罗附近的胡夫金字塔（法老胡夫的陵墓）是埃及最大的金字塔，大约建于公元前 2 500 年左右. 该金字塔呈正四棱锥形①，底面正方形面向东西南北四个正方向，边长 230.5 m，塔高 146.6 m（现高约 137 m）. 上一世纪，科学家们曾使用精密的仪器对这一金字塔进行了测量，他们惊奇地发现，其底基正方形边长的相对误差不超过 1∶14 000，即不超过 2 cm，四底角的相对误差不超过 1∶27 000，即不超过 12″，四个方向的误差也仅在 2′～5′之间，这些都说明当时的测量水平已相当高.

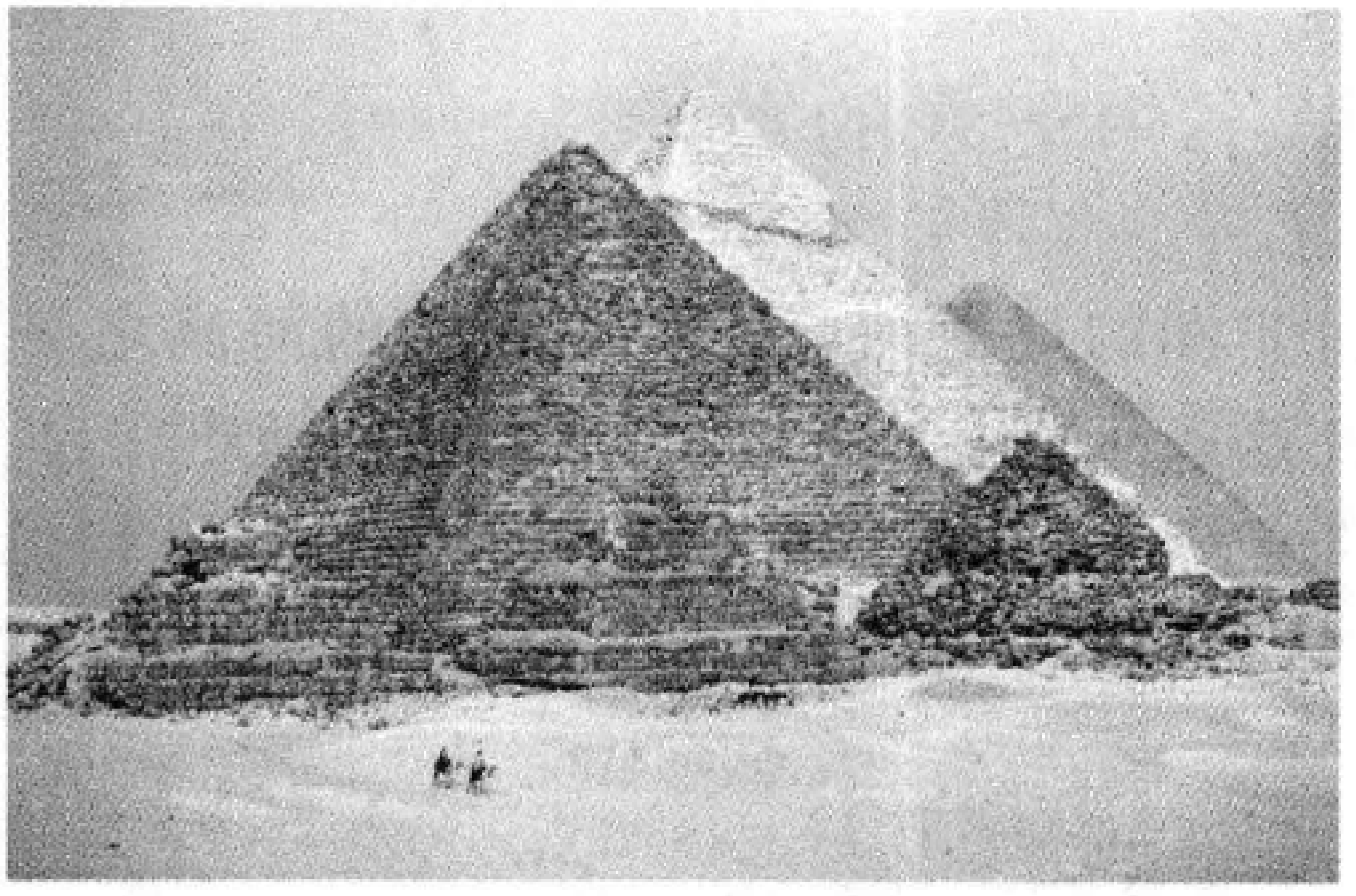


图 1-1-2 古埃及的金字塔

古埃及人在建造神奇的金字塔、神庙和宫殿的同时，也创立了相当发达的数学. 从公元前 3 000 年起，古埃及人就已经有了象形文字，其中最具代表性的是僧侣们所使用的僧侣文（又称祭司文）. 流传至今的古埃及文献，大部分是以这种僧侣文书写在纸草上保存下来的，人们通常称其为纸草书（如图 1-1-3）. 这种纸草书是用尼罗河三角洲盛产的一种形状如芦苇的水生植物——纸莎草，从纵面剖成小条，拼排整齐，连接成片，压榨晒干而成的.

① 经科学家考证，埃及的金字塔除了正四棱锥形以外，还有其他许多种形状，如圆锥形、四棱台形等. 但大多数都呈正四棱锥形.

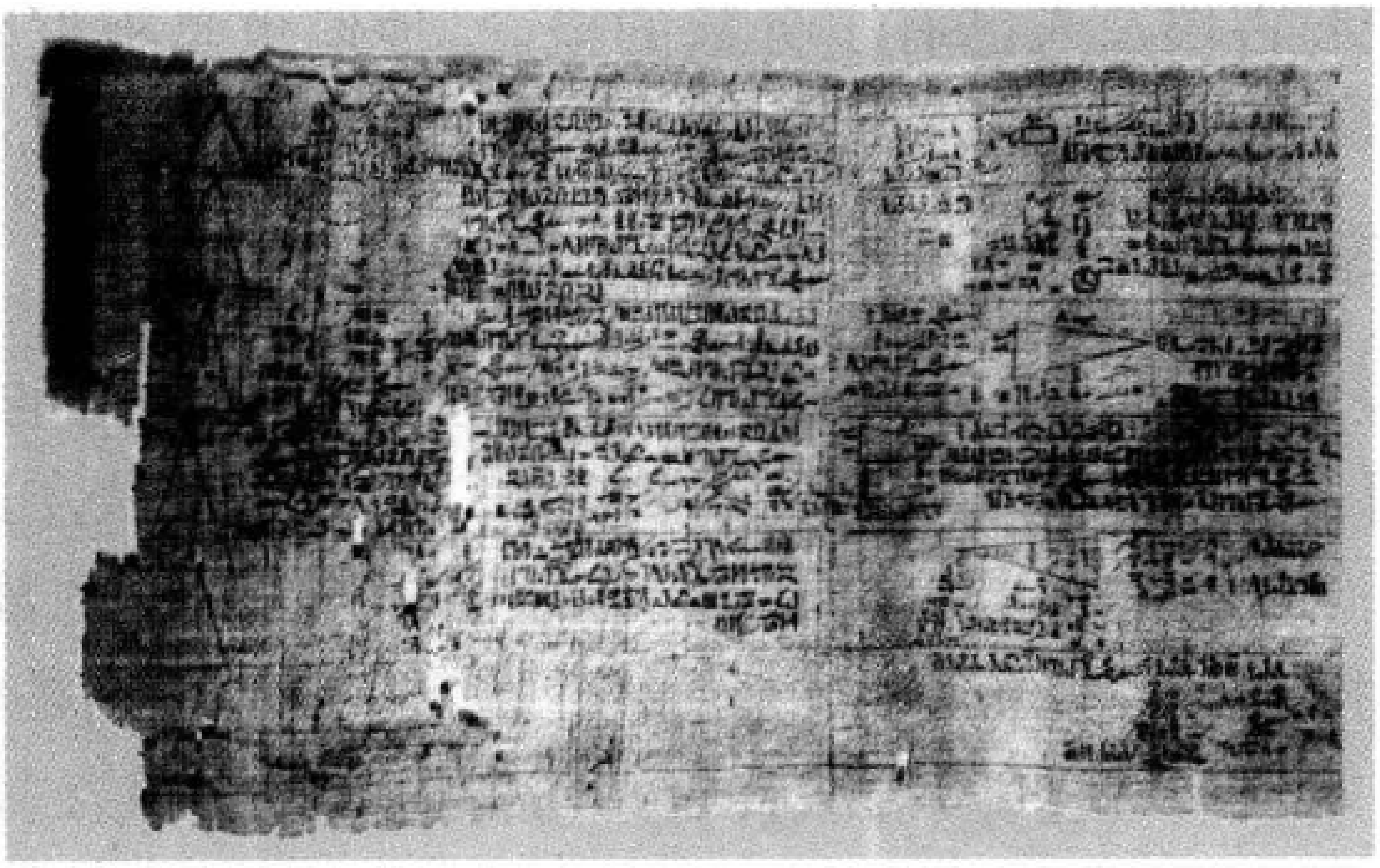


图 1-1-3 古埃及的数学纸草书

保存至今有关数学的纸草书主要有两种：一种是陈列于英国伦敦大不列颠博物馆东方展室中的兰德纸草书，这是由英国人兰德(H. Rhind) 1858 年搜集到的；另一种收藏于俄国莫斯科美术博物馆，被称为莫斯科纸草书，这是由俄罗斯人郭列尼舍夫于 1893 年搜集到的. 这两份纸草书都是公元前 2000 年前后的作品，为古埃及人记录一些数学问题的问题集. 现在人们对古埃及数学的了解主要来自这些纸草书以及其他保留至今的历史文献.

古埃及人使用的是十进记数制，并且有表示数字的专门符号(如图 1-1-4). 当在一个数中出现某个数码的若干倍时，就将它的符号重复写若干次，即遵守加法的法则，这说明，古埃及人的记数系统是迭加制

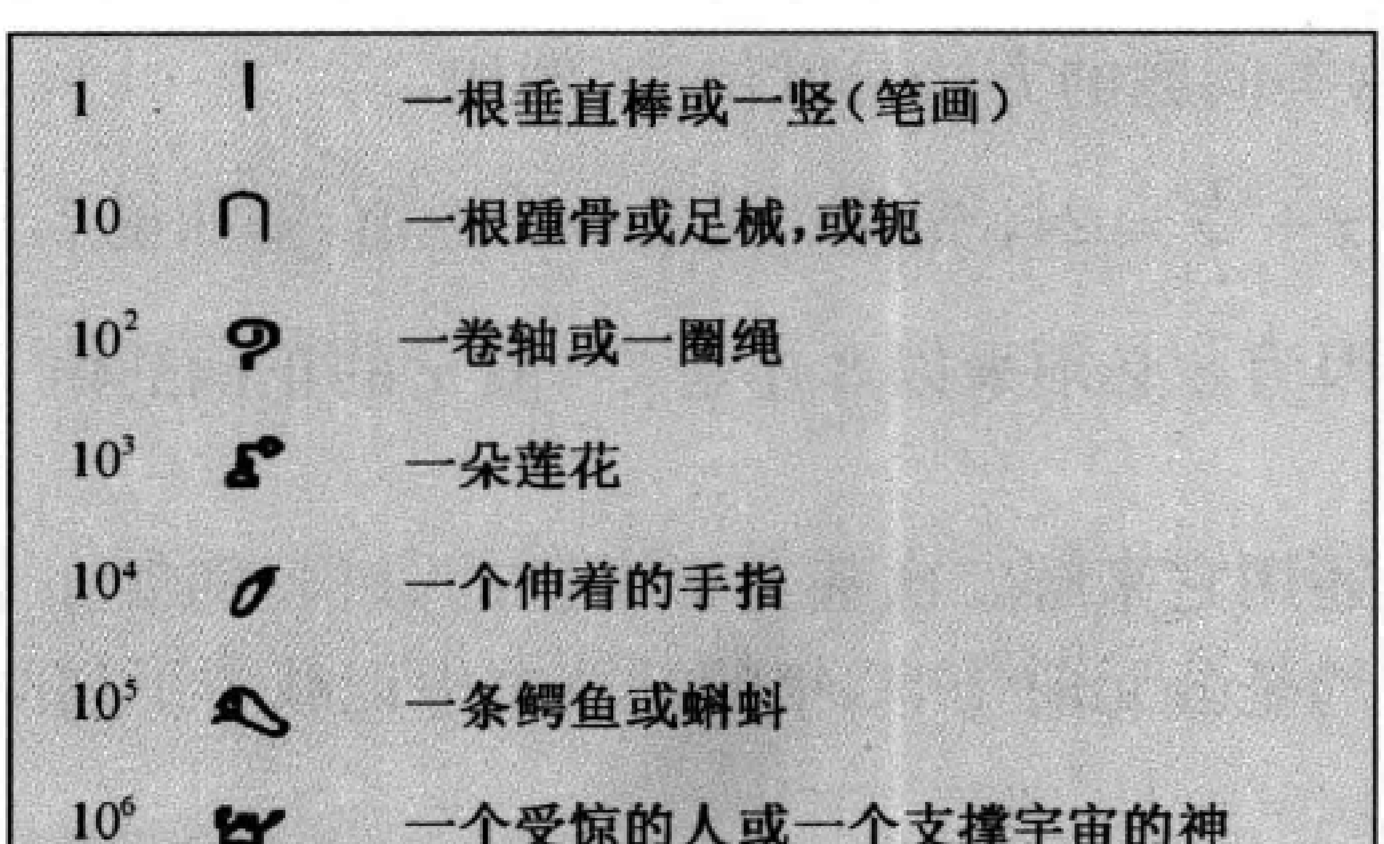


图 1-1-4 古埃及人的数字记号

而不是位值制.古埃及人已有了分数的概念,他们也是根据除法运算的需要引入分数的,但他们仅使用单位分数,也就是分子为1的分数,表示整体的若干等份中的一份,只有$\frac{2}{3}$是一个例外.

古埃及人的乘法运算与除法运算是通过迭加来进行的.例如计算26×33,他们先将33的倍数列表(如表1-1-1),然后从左边一列中选取出和为26的2,8和16,再将右边一列中它们各自对应的数相加,即将66,264,528相加,得到858,这就是所求.又如$19\div8$,他们是将8的倍数与部分列表(如表1-1-2),再从右边一列中选取出其和为19的16,2,1这三个数,并将其对应的左边一列中的三个数$2,\frac{1}{4},\frac{1}{8}$相加,即为所求①.

n	$33n$
1	33
2	66
4	132
8	264
16	528

表1-1-1

α	8α
1	8
2	16
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	1

表1-1-2

古埃及纸草书中出现的"计算若干"的问题,实际上相当于方程问题,他们解决这类问题的方法是试位法.例如,

对于方程$x+\frac{x}{7}=24$,先给x选定一个数值,譬如说7,于是$7+\frac{7}{7}=8$,而不是24.因为8必须乘以3才是24,故x的正确的值一定是7乘以3,即21.

古埃及人还用它来解二次甚至更高次的方程.例如在卡洪(Kahun)发现的一份大约是公元前1950年的纸草书中记载了下列问题:

① 其实这种造表的方法正反映了古埃及人的聪明之处.从这些表的选项可以看出,他们是利用加法运算,通过递推的方法来处理较为复杂的乘除运算问题.

将给定的100单位的面积分为两个正方形，使二者的边长之比为4∶3.

若设这两个正方形的边长分别为x，y，且$4y=3x$，由题设$x^2+y^2=100$，首先取$x=4$，则$y=3$，此时$x^2+y^2=25$，而不是100，因此x，y的取值需修正. 事实上，只需将原数值加倍，即可得方程的解$x=8$，$y=6$. 必须指出的是，“试位法”对于解决属于一元一次方程的问题，可能得到精确的解，而对于二次以上的方程，这种方法一般情况下只能给出近似解. 一般认为，古埃及人的方程解法要比古巴比伦人的方法落后. 事实上，他们的这种方法可以看作是后来的数学中对那些无法用一般解法处理的高次方程的数值解法的先驱.

在古埃及纸草书中还有有关数列问题的记载. 如兰德纸草书中有这样一个问题：

今将10斗麦子分给10个人，每人依次递降$\frac{1}{8}$斗，那么各得多少？

这是已知一个等差数列的前若干项和、项数以及公差，求其各项的问题. 纸草书给出了其首项，相当于$a_1=1\frac{9}{16}$，再根据题意就不难求出这个数列的各项，也就是各人所得了. 在同样的纸草书中还出现了等比数列的前n项求和问题.

古埃及人在建筑规模宏大的教堂、金字塔和修建复杂的灌溉系统时，都需要测量；尼罗河水泛滥后冲刷了许多边界标记，洪水退后也需要重新勘测土地的界线……所有这些需要，为他们认识基本几何形状和形成几何概念提供了实际背景. 因此，古埃及人的几何学知识较为丰富. 在上述两种纸草书的110个问题中，有26个是几何问题，其中大部分是计算土地的面积与谷物的体积，还有许多与金字塔有关. 例如，古埃及人知道，任何三角形的面积均为底与高的乘积的一半；圆的面积等于直径的$\frac{8}{9}$的平方，由此可知，他们的圆周率近似值约为3.16；直圆柱的体积为底面积与高的乘积. 在兰德纸草书中有这样一个问题：

已知金字塔的陡度为每肘五手又一指(一肘为七手，一手为五指)，底面边长为140肘，求其高.

在莫斯科纸草书中也有这样一个问题，用现代语言表达就是：

如果告诉你一个截顶金字塔的垂直高度为6，底边为4，顶边为2，求

其体积.

他们对这一问题的算法是:

4的平方为16,4的二倍为8,2的平方是4,把16,8和4相加得28,取6的$\frac{1}{3}$为2,取28的二倍为56,则它的体积就是这个数.

由此我们可以看出,古埃及人是通过具体问题说明了高为h,上、下底面边长分别为a和b的正四棱台的体积公式是

$$V=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h.$$

著名数学史家贝尔(E. T. Bell,1883—1960)曾形象地将这一古埃及数学杰作称为“最伟大的埃及金字塔”①.

1.1.2 泥版书中记录的数学

古巴比伦,又称美索不达米亚,位于亚洲西部的幼发拉底与底格里斯两河流域,大体上属于今天的伊拉克(如图1-1-5).大约是在公元前2000年左右,古巴比伦人②在这里建立起了自己的奴隶制王国.

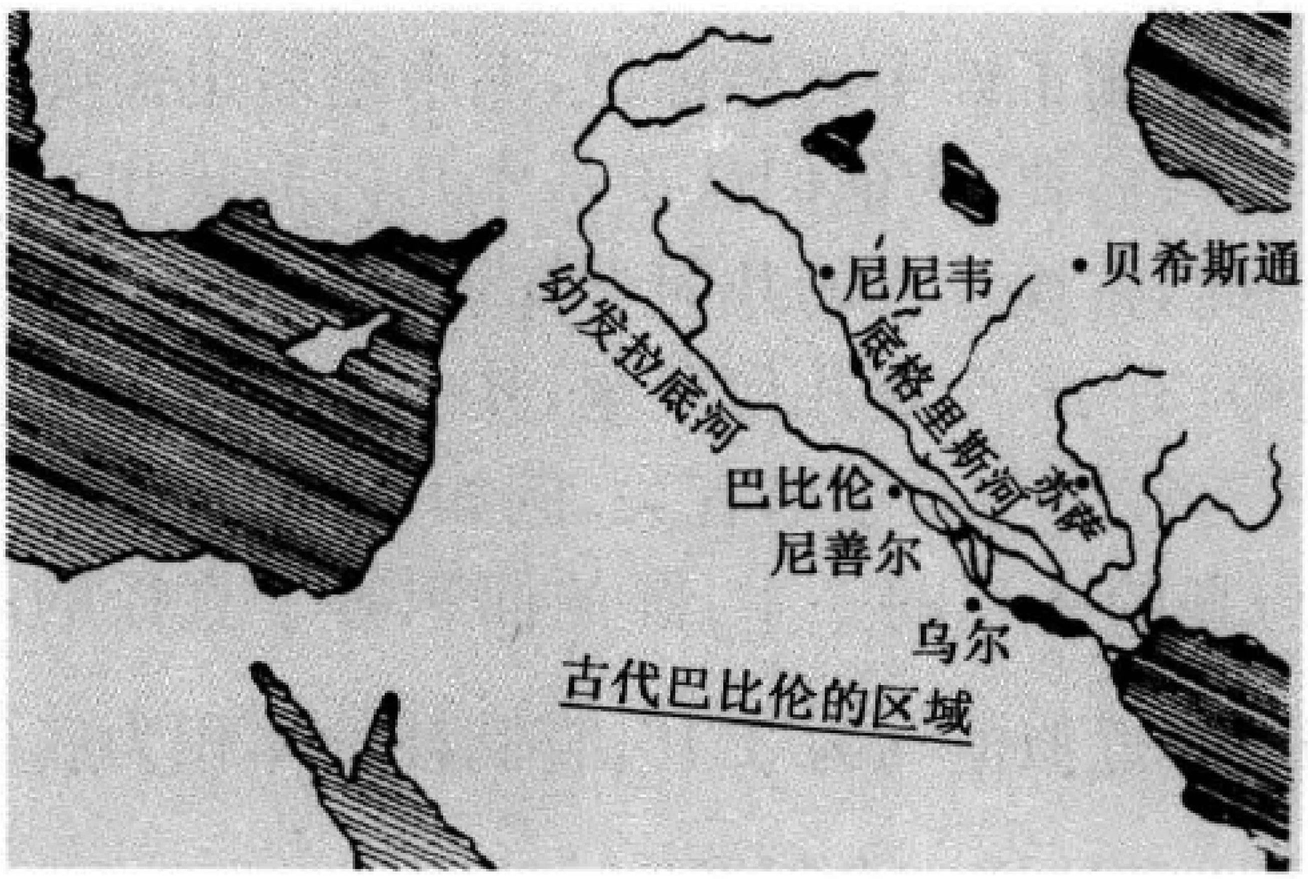


图1-1-5 古巴比伦所处的地理位置

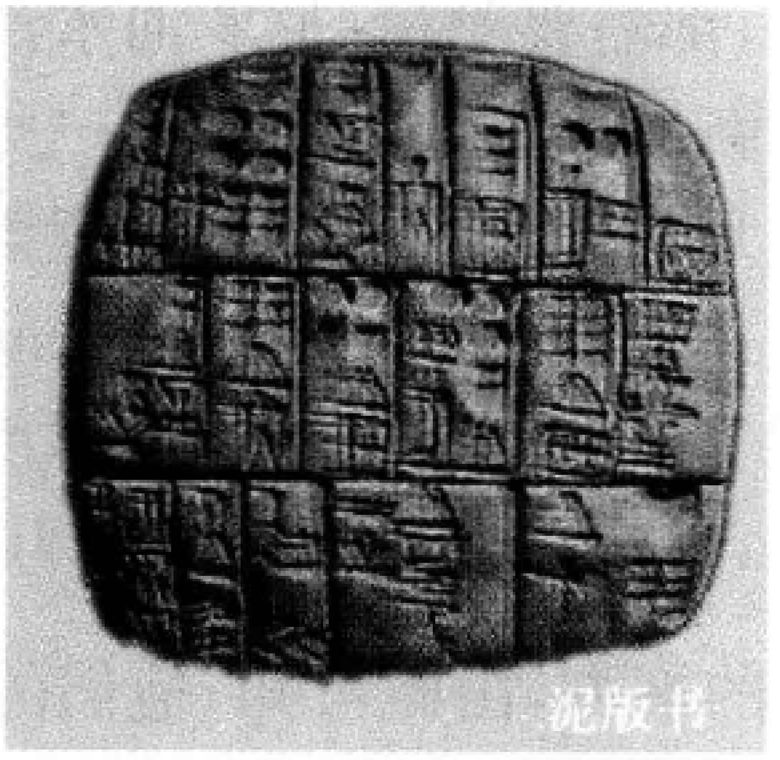
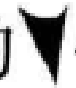
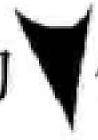
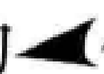
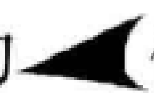


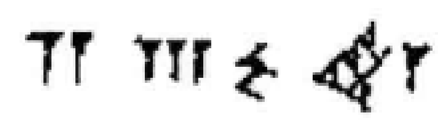
图1-1-6 古巴比伦的泥版书

① 因为棱锥与金字塔在英语中的单词都是pyramid.

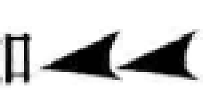
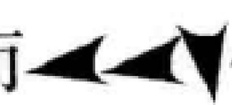
② 事实上,居住在这里的除了巴比伦人外,还有苏美尔人、阿卡德人、卡尔迪安人、亚述人等,为了方便起见,人们通常把他们都归入巴比伦人.

人们对于古巴比伦数学的认识是通过古巴比伦人遗留下来的泥版书获得的.这些泥版书用胶泥制成,一块完整的泥版与手掌的大小差不多,上面写有符号(如图 1-1-6).这种符号是用断面呈三角形的尖棍刻的,呈楔形,故人们称之为楔形文字.

古巴比伦人很早就有了数的写法,他们用楔形文字中较小的代表1,较大的代表 60.由此可知,古巴比伦人的记数系统是 60 进制[①].他们还用较小的代表 10,较大的代表 100.例如,他们用



表示 $2\times 60^3+3\times 60^2+41=442\,841.$

古巴比伦人也使用分数,但他们总是用 60 作为分母,例如作为分数来记时,可以表示 20/60;而作为分数来记时,可以表示

$$\frac{21}{60}=\frac{20}{60}+\frac{1}{60}.$$

一般认为,古巴比伦人的分数系统是不成熟的.

与古埃及人相仿,古巴比伦人的算术运算也是借助于各种各样的表来进行的.在已发现的泥版书中,大约有 200 块是乘法表、倒数表、平方表、立方表,甚至还有指数表.倒数表用于把除法转化为乘法进行,指数表和插值法是一起用来解决复利问题的.例如,设本金为 1,利率为 20%,问需要多久即可使利息与本金相等.这需要求解指数方程

$$(1+20\%)^x=2.$$

由指数表,古巴比伦人首先确定出 x 的取值范围是 $3<x<4$,然后使用一次插入法求出 4 与 x 的差,相当于现在这样的算法:

$$4-x=\frac{(1.2)^4-2}{(1.2)^4-(1.2)^3}\approx 0.21.$$

故得 $x\approx 4-0.21=3.79$(年).

---

① 由此可见,古埃及和古巴比伦人采用的记数制都不是 10 进位值制.10 进位值制记数法最早是由中国和印度人首先采用的,详细情况可查阅有关文献.

在公元前 2000 年前后，古巴比伦数学已出现了用文字叙述的代数问题. 如英国大不列颠博物馆 13901 号泥版记载了这样一个问题：

我把我的正方形的面积加上正方形边长的$\frac{2}{3}$得$\frac{35}{60}$，求该正方形的边长.

这个问题相当于求解方程

$$x^2+\frac{2}{3}x=\frac{35}{60}.$$

该泥版上给出的解法是：

1 的$\frac{2}{3}$是$\frac{40}{60}$，其一半是$\frac{20}{60}$，将它自乘得 $\frac{6}{60}+\frac{40}{60^2}$，并把它加到$\frac{35}{60}$上，得$\frac{41}{60}+\frac{40}{60^2}$，其平方根是$\frac{50}{60}$，再从中减去$\frac{40}{60}$的一半，得$\frac{30}{60}$，于是$\frac{1}{2}$就是所求正方形的边长.

这一解法相当于将方程 $x^2+px=q$ 的系数代入公式

$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}$$

求解，只不过在计算时用的是 60 进制. 又如：

已知两个正方形的面积之和为 1 000，其中一个正方形的边长为另一个正方形的边长的$\frac{2}{3}$减去 10，求这两个正方形的边长.

设较大的正方形的边长为 x，则另一正方形的边长为 $\frac{2}{3}x-10$，故只需解二次方程

$$x^2+\left(\frac{2}{3}x-10\right)^2=1\,000.$$

古巴比伦人将这一解法所需的步骤简单地叙述为“平方 10，得 100；1 000 减去 100，就得 900，开平方得 30”，求得该正方形的边长为 30，另一个边长为 10. 这就是说，古巴比伦人可能已经知道某些类型的一元二次方程的求根公式. 由于他们没有负数的概念，所以二次方程的负根他们不予考虑. 至于他们是如何得到上述这些解法的，泥版书上没有具体说明，我们也无从知晓了. 另外，他们还讨论了某些三次方程和双二次

方程的解法.

此外,在洛佛尔博物馆的一块泥版上,人们还发现了两个级数问题.用现代形式可表述为

$$1+2+2^2+\cdots+2^9=2^9+2^9-1,$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\left(1\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{3}\right)\times 55=385.$$

古巴比伦人究竟是通过计算得到上述结果的,还是掌握了这些级数求和的技巧甚至公式,对于我们来说也仍然是一个谜.

古巴比伦人还对非完全平方数的平方根给出了一些有趣的近似值,如

$$\sqrt{2}\approx\frac{17}{12},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\approx\frac{17}{24}.$$

在耶鲁第 7289 号泥版上还发现了$\sqrt{2}$的非常值得注意的近似值

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}\approx 1.414\ 215\ 5.$$

在古巴比伦的数学中最令人感兴趣的是美国哥伦比亚大学普林顿收集馆中收藏的第 322 号泥版.该泥版已缺损了一部分,在残留的部分上刻有三列数,专家研究认为:这是一张勾股数(即 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解)表,并且极有可能用到了参数式

$$x=2uv,\ y=u^2-v^2,\ z=u^2+v^2.$$

而这正是在 1 000 多年以后古希腊数学中一个极为重要的成就.由此我们更感到古巴比伦人的伟大了.

在古巴比伦人的心目中,几何是不重要的,因为实际中的几何问题都很容易转化为代数问题.他们的面积和体积计算是按照一些固定的法则和公式进行的.例如,古巴比伦人在公元前 2000 年到公元前 1600 年,就已熟悉了长方形、直角三角形、等腰三角形以及直角梯形面积的计算.他们还掌握了长方体,以及特殊梯形为底的直棱柱体积计算的一般规则,他们知道取直径的三倍为圆周的长,取圆周平方的$\frac{1}{12}$为圆的面积,还用底和高相乘求得直圆柱的体积.在泥版书中有足够的证据表明,古巴