

“十一五”国家重点图书出版规划项目

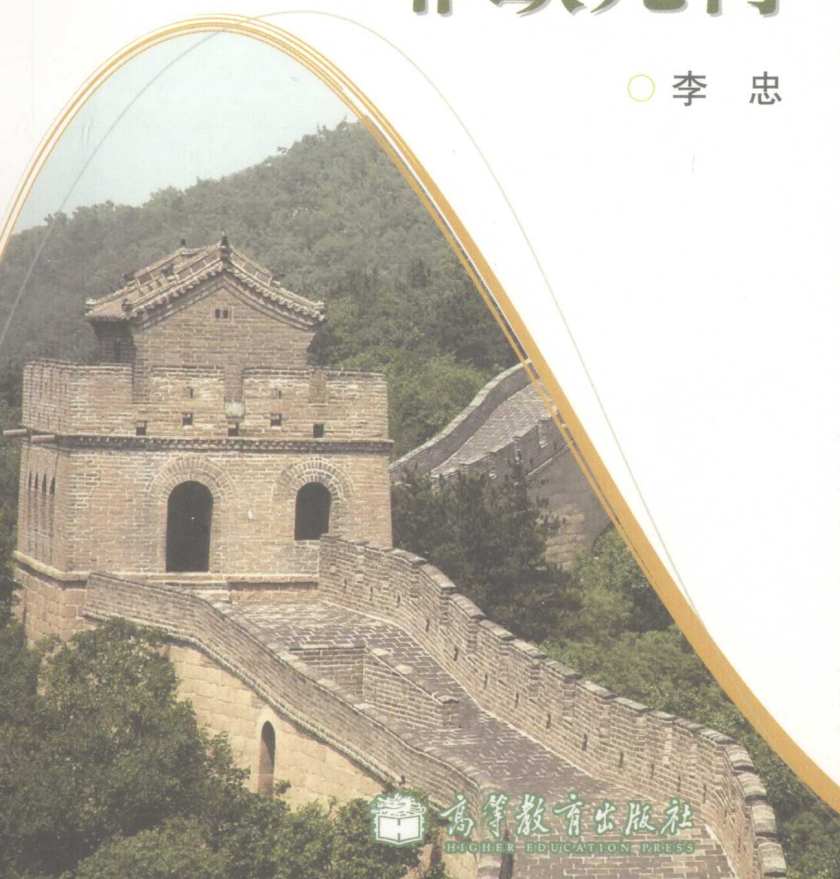
15

□ 数学文化小丛书

李大潜 主编

并不神秘的 非欧几何

○ 李 忠



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十一五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

并不神秘的非欧几何

Bingbushenmi de Fei'oujihe

李 忠



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目 (CIP) 数据

并不神秘的非欧几何/李忠编. —北京: 高等教育出版社, 2010.6

(数学文化小丛书/李大潜主编)

ISBN 978-7-04-028885-8

I. ①并… II. ①李… III. ①非欧几何—普及读物 IV. ①O184-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 082114 号

策划编辑	李蕊	责任编辑	张耀明
封面设计	张楠	责任绘图	宗小梅
版式设计	王艳红	责任校对	殷然
责任印制	韩刚		

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京鑫丰华彩印有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/32	版 次	2010年6月第1版
印 张	2.75	印 次	2010年6月第1次印刷
字 数	49 000	定 价	8.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 28885-00

数学文化小丛书编委会

- 顾 问：谷超豪（复旦大学）
项武义（美国加州大学伯克利分校）
姜伯驹（北京大学）
齐民友（武汉大学）
王梓坤（北京师范大学）
- 主 编：李大潜（复旦大学）
- 副主编：王培甫（河北师范大学）
周明儒（徐州师范大学）
李文林（中国科学院数学与系统科学研究院）
- 编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）
王彦英（河北师范大学）
张惠英（石家庄市教育科学研究所）
杨桂华（河北经贸大学）
周春莲（复旦大学）

本书责任编辑：周春莲

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由

浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长,并相对独立,以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则,有的专题单独成册,有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书,走近数学、品味数学和理解数学,充分感受数学文化的魅力和作用,进一步打开视野,启迪心智,在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

目 录

一、引言	1
二、非欧几何是怎样诞生的	3
欧几里得及其《几何原本》	3
欧几里得的公理系统	7
第 5 公设引起的争议与研究	11
谁创立了非欧几何?	19
非欧几何的影响	23
三、并不神秘的非欧几何	24
平行公设与平行角	24
非欧几何中的三角形	27
非欧几何中的正弦定律与余弦定律	32
黎曼的非欧几何	34
兰伯特的猜想	42
关于非欧几何的名称	43
四、罗巴切夫斯基几何的模型	45
关于罗巴切夫斯基几何的困惑	45

历史上的三个模型	46
交比与分式线性变换	52
庞加莱模型中的非欧距离	55
罗巴切夫斯基几何的实现	59
从非欧几何到黎曼几何	68
 五、结束语	 75
 参考文献	 78

一、引 言

大多数人只知道一种几何，那就是人们在中学里学的欧几里得几何，简称欧氏几何。人们会认为这种几何是最自然的几何，是天经地义的永恒真理。

在 19 世纪中叶，数学上破天荒地出现了一种新几何，打破了欧氏几何的一统天下。人们把这种新几何称为非欧几何，或罗巴切夫斯基几何。非欧几何的出现，无论在数学史上，还是在科学史上，都是一件大事。它突破了两千年来的传统几何观念，在空间观念上是一场重大革命。

在非欧几何中，某些命题与欧几里得几何一致，比如描述三角形全等的“边边边”、“边角边”与“角边角”的定理。但是，有相当多的重要命题与欧几里得几何大相径庭。比如，在这种新几何中，

“过给定直线外一点可以作无穷多条直线与给定直线平行”；

“三角形的内角之和小于 180° ”；

“没有矩形存在”；

“两个三角形的三个角对应相等，则它们全等”；

“毕达哥拉斯定理不再成立”，需要换成更复杂的公式；

“三角形的面积不能任意大”，

初次听到这些命题，人们可能会大为惊奇，并对非

欧几何充满着神秘感。人们不禁要问，这种几何是怎样产生的？难道我们熟悉的欧几里得几何错了吗？这种非欧几何符合人们的生活经验吗？到底哪种几何是真实的呢？这种新几何有什么用吗？

本书试图用通俗易懂的语言和浅显的方式来回答这些问题。我们将详细解释非欧几何是怎样产生的，介绍非欧几何的基本内容，剖析非欧几何与欧氏几何的关系，并介绍非欧几何的庞加莱模型。这种模型可以帮助读者从直观上接受非欧几何，并最终摆脱对它的神秘感。

非欧几何的进一步发展导致了黎曼几何的产生，而后者后来成为爱因斯坦广义相对论的数学基础。爱因斯坦的相对论从根本上改变了人类的时空观，并有重大的应用。

从讨论欧几里得的平行公设开始，到非欧几何的出现与黎曼几何的建立，再到广义相对论，在这个漫长而曲折的历史链条中，人们看到了人类追求理性完美的努力是何等顽强！而这种努力所带来的成就又是何等辉煌！作者花了足够的笔墨，来描述这一历史链条上种种事件，以展示这一过程中数学思想的发展变化。

本书是一本通俗读物，而不是一本教科书，我们的叙述将尽量避免公式的推导，而把重点放在数学思想的阐述上。一般说来，具有高中数学知识的读者能够读懂本书的一大半，而具有微积分知识的人则可以读懂其全部内容。

二、非欧几何是怎样诞生的

非欧几何的诞生，源自对欧几里得的第五公设的讨论与研究。因此，我们先从欧几里得的巨著《几何原本》说起。

欧几里得及其《几何原本》

欧几里得是古希腊的一位伟大的学者。现在，人们只知道他的大概生活年限（约公元前 325—前 270），而具体的出生年月以及逝世日期均无从考证。早年他就读于雅典，后来在亚历山大城度过了他的大半生，并成为亚历山大学派的奠基人。他的一生写了许多有关数学、天文、光学和音乐的书，但影响最大的莫过于《几何原本》。

《几何原本》原文的英文译名为《Elements》。最早的中文译本是明代科学家徐光启（1562—1633）和一位外国传教士联合翻译的。

《几何原本》共分 13 卷，其中 1—6 卷是关于平面几何的，7—10 卷是关于数论的，11—13 卷是关于空间几何的。除去一系列的定义、5 个公设与 5 个公理之外，全书共有 467 个命题（也可称定理）。

欧几里得的《几何原本》是古希腊理性文明的杰出代表。早在欧几里得之前的数百年，古希腊人对哲理的研究就发展到相当高的程度。他们热衷于哲学、

数学、天文的研究，努力追求理性的完美，先后出现了许多著名的学派，如毕达哥拉斯 (Pythagoras, 约公元前 580—前 500) 学派和柏拉图 (Plato, 公元前 427—前 347) 学派。他们对数学的最大贡献就是对于每一个数学命题，都要根据明白无误的假定和事先给定的公理与公设，由形式逻辑推演出来。古希腊人的这种精神后来被确定为数学的基本精神，并沿用至今。当时的这些学派已经掌握了一大批定理及其证明。欧几里得正是在这种背景下编写了他的巨著——《几何原本》。



图 1 欧几里得画像

在《几何原本》中的四百多个命题中，绝大部分是前人已经知道的事实，并非欧几里得所原创。欧几里得的最大贡献在于他巧妙地把这数百个定理排成一个有序的链，使得其中的每个定理都可以由给

定的公理与公设，以及前面证明过的定理，用形式逻辑推演出来。这样，欧几里得在《几何原本》中构建了人类有史以来第一座演绎推理的宏伟大厦。它是如此的精巧、严密、完美，令人赞叹不已。

在《几何原本》中属于欧几里得个人的成果，主要是两件事：一个是求两个整数的最大公约数的算法，通常称之为欧几里得算法；在我国有时称之为辗转相除法；另一件是证明素数的个数是无穷的。这个优美简单的证明至今还在被广泛采用。

与其他四百多个定理相比，专属欧几里得的定理在其中只占有很小的一部分。但是，欧几里得的重大贡献，在于他在前人的基础上，首次规范了公理与公设，并把当时所有已知的定理用它们逐一推演出来。欧几里得的《几何原本》是数学史上第一个公理系统，它为数学的发展提供了一个典范。他的这项功绩要远远大于他发现的几个定理。

著名物理学家爱因斯坦曾高度评价欧几里得的贡献。他说：

“在逻辑推理上的这种令人惊叹的胜利，使人们为人类未来的成就获得了必要的信心。”

欧几里得的《几何原本》不仅为数学科学，而且为其他科学树立了一个光辉的榜样。它启示人们，在众多的事物中，要努力找出那些最为基本的东西，把它们作为讨论的出发点，以演绎出各种各样的结论。正是受了欧几里得几何的影响，牛顿才把他的三条力学定律，作为其一切讨论的基本出发点与基

本依据。

欧几里得的《几何原本》在教育史上也是最具影响的教科书。在欧洲，人们把它或其改写本作为中学教材有一千年以上的历史，人们曾把是否通晓几何作为衡量人的教育程度的一项标志。《几何原本》被翻译成世界各种文字，其版本之多，发行量之大，持续时间之久，仅次于《圣经》。许多大科学家都谈起过他们在中学时代深受欧几里得的影响。爱因斯坦曾经说过如下的话：

“如果欧几里得未能激发起你少年时代的科学激情，那你肯定不会是一个天才的科学家。”

把爱因斯坦的这句话当作一个命题，那么它的逆否命题便是“任何一个天才的科学家在少年时代都曾经被欧几里得激起科学的激情。”

我国明代科学家徐光启在翻译欧几里得《几何原本》时曾高度评价了此书。他说：

“能精此书者，无一事不可精；好此书者，无一事不可学。”

他们说得上是何等好啊！

一千多年来，世界各国均以欧几里得几何为基本内容编写了初等几何，作为中学的一门重要课程。在中等教育中几何课一直占有极为特殊的地位：它有效地培育了学生的推理能力、严密思考的习惯和努力探索的精神。这一点可能是其他课所不可替代的。这在过去是如此，今天，在现在高科技时代依旧如此。那些试图贬低欧氏几何在基础教育中地位的

种种说法，如果不是偏见，便是无知。那些试图在中学教育中取消欧氏几何、取消“证明”的种种做法，不是在进行教学改革，而是对两千年来科学与文明的否定。



图 2 《几何原本》的拉丁文译本

欧几里得的公理系统

现在让我们来具体地分析一下欧几里得的公理系统。

在古希腊时代，人们把对各个学科都适用的基本假定称作公理，把只适用于某一个学科的基本假定称为公设。

在欧几里得的《几何原本》中，他列出 5 条公理和 5 条公设。

欧几里得的 5 条公理是：

1. 等于同一个量的两个量相等；

2. 等量相加，其和相等；
3. 等量相减，其差相等；
4. 可以重合的图形，对应的量相等；
5. 全体大于部分。

欧几里得在《几何原本》中的 5 条公设如下：

1. 两点之间可以作一条直线段；
2. 直线段可以无限延长；
3. 以任意一点为中心、以任意给定的线段为半径可以作一个圆；
4. 所有直角都相等；
5. 若一条直线段与另外两条直线段相交，且使一侧的内角之和小于两个直角，则该两条直线段无限延长后必相交（见图 3）。

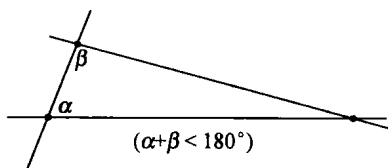


图 3 欧几里得第 5 公设

乍一看，这些公理与公设，特别是这里的公理与前 4 条公设，全部都是极为自然的事，有些话甚至近似于“不必说的废话”。其实不然，严谨的古希腊人认为，数学命题的证明，每一步都应该有确切的依据，这里所谓“依据”就是公设与公理、命题本身的假设，以及此前已经证明了命题。除此之外，不允许有任何其他东西作为依据。因此，欧几里得必

须列出一切要用到的基本事实，尽管它们是那样显然。列出这些极为明显的事实作为公理与公设，这足以表明欧几里得在《几何原本》中推理的严谨性。

应该说，这里列出的公理与公设都是欧几里得经过深思熟虑的结果。这里我们不打算讨论每一条的意义，只想指出如下几点：

首先，第 1、3 公设中说可以作一条直线段或圆，而不说“存在”。这是因为在《几何原本》中有许多几何作图的命题。这两条公理是为几何作图进行铺垫。在古希腊早就有圆规直尺作图之说，这两条公设为圆规直尺作图提供了依据。与此同时，也限定了人们只能做这两件事：使用没有刻度的直尺连接直线段和用圆规依据给定的中心与半径作一个圆。大家知道，所谓“三等分角问题”也正是在这样的意义下，才成为一个历史难题。

其次，欧几里得没有使用“无穷直线”的概念。

通常，“直线”一词有两个含义：一是介于某两点之间的有穷直线段，一是无限直线，后者是前者无限延长的结果。欧几里得对待无穷采取了极其慎重的态度：他不使用“无穷直线”的概念，而只承认两点之间可以作一条直线段和直线段可以任意延长。如果使用“无穷直线”，那么第 1、2 条公设，可以换作一条：过任意两点可以作一条（无穷）直线。

这种（无穷）直线与直线段的差异最明显地表现在第 5 公设上。大家知道，欧几里得的第 5 公设的现代说法是：