

21 世纪大学数学创新教材

基础教育 选修课程选讲

徐学文 郭思培 编著

 科学出版社

21 世纪大学数学创新教材

基础教育选修课程选讲

徐学文 郭思培 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

课程标准下的高中数学选修课程是高中数学教材新增加的内容. 本书介绍高中数学选修课程中球面上的几何、矩阵与变换、对称与群、风险与决策、优选法与试验设计 5 个专题的理论基础和思想方法, 并做适当的延伸, 旨在使高中数学教师和师范院校本科生对高中数学选修课程的知识体系有更加全面、深刻的了解, 从而更好地开展这些专题的教学.

本书的读者对象为师范院校有关专业本科生、高中数学教师, 以及广大数学爱好者.

图书在版编目(CIP)数据

基础教育选修课程选讲/徐学文, 郭思培编著. —北京: 科学出版社, 2011. 2

21 世纪大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-030084-3

I. ①基… II. ①徐…②郭… III. ①数学课—教学法—高中—高等学校—教材 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 012551 号

责任编辑: 张颖兵 / 责任校对: 梅 莹

责任印制: 彭 超 / 封面设计: 苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 1 月第 一 版 开本: 15(720×1000)

2011 年 1 月第一次印刷 印张: 13 1/4

印数: 1—3 000 字数: 257 000

定价: 24.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

高中数学选修课程来自于高等数学的多个学科,球面上的几何、矩阵与变换、对称与群、风险与决策、优选法与试验设计等专题在我国师范院校数学专业课程体系中难见踪迹,这不利于高中数学选修课程的贯彻落实.本书将上述各专题的内容集成一册,旨在为我国师范院校数学专业开设与这些专题相关的选修课程提供教材,同时为中学数学教师提供一本实用的教学参考书.

编写中,我们充分考虑了普通高中课程标准对相关专题的要求与高中选修教材的编写实际,在讲清课程标准规定内容的基础上,对中学教材中遗留的问题作了补充说明,对部分专题的内容作了适当的扩充,力求揭示各专题的基本原理和基本方法,全面反映各专题的数学本质.

本书共分4篇,分别是球面上的几何、变换与群、风险与决策、优选法与试验设计,覆盖了高中数学选修序列3或序列4中的5个专题,可作为师范院校数学专业学生的教材,也是高中数学教师必备的一本参考书.

本书的编写与出版得到了华中师范大学数学与统计学学院领导的大力支持,特别是何穗教授为本书的编写出版作了大量的组织协调工作,在此致以诚挚的谢意!本书的第一篇与第二篇由徐学文执笔,第三篇与第四篇由郭思培执笔.

由于编者水平有限,加之缺乏足够的参考资料,书中难免有缺点,敬请专家和读者批评指正.

编 者

2010年10月

目 录

前言

第一篇 球面上的几何

第 1 章 球面几何的基本概念	3
1.1 多面角	3
1.2 球面上的点、线、角	5
1.3 球面上的对称	9
第 2 章 球面多边形及其性质	11
2.1 球面二角形与球面三角形的面积	11
2.2 球心三面角与极三角形	14
2.3 球面三角形的边角关系	16
2.4 球面三角形的全等	20
2.5 球面多边形与欧拉公式	25
第 3 章 球面上的正弦定理与余弦定理	31
3.1 球面上的余弦定理	31
3.2 球面上的正弦定理	36
3.3 球面上正、余弦定理的应用	38
第 4 章 欧氏几何与非欧几何	44
4.1 欧氏几何的公理体系	44
4.2 非欧几何简介	49

第二篇 变换与群

第 5 章 平面上的变换与对称图形	55
5.1 平面上的变换	55
5.1.1 反射变换	55
5.1.2 旋转变换	56
5.1.3 位似变换	56
5.1.4 伸压变换	57
5.1.5 投影变换	57
5.1.6 切变变换	57
5.1.7 平移变换	58

5.2 平面变换的矩阵表示	59
5.2.1 反射变换的矩阵表示	60
5.2.2 旋转变换的矩阵表示	60
5.2.3 位似变换的矩阵表示	61
5.2.4 伸压变换的矩阵表示与伸缩变换	62
5.2.5 投影变换的矩阵表示	63
5.2.6 切变变换的矩阵表示	64
5.3 平面上的保距变换及性质	65
5.4 平面上的对称图形与对称变换	70
第6章 空间的变换与对称图形	76
6.1 空间的点对称及变换	76
6.2 空间的保距变换及性质	78
6.3 第一类保距变换与第二类保距变换	81
6.4 保距变换的基本形式	85
6.5 空间对称图形与对称变换	90
第7章 群论及其应用	93
7.1 对称变换群	93
7.2 晶体的分类与代数方程的根式解	99

第三篇 风险与决策

第8章 风险与决策的基本概念	105
8.1 风险的概念	105
8.1.1 风险的由来	105
8.1.2 风险的定义	106
8.1.3 风险的特征	106
8.1.4 风险的分类	107
8.1.5 其他相关概念	109
8.2 决策的概念	110
8.2.1 实例分析	110
8.2.2 决策的定义	111
8.2.3 决策的分类	111
8.2.4 决策模型的要素	112
阅读材料 风险的各种定义	113

第 9 章 常用的决策方法及灵敏度分析	116
9.1 决策的数学模型	116
9.1.1 相关名词与概念	116
9.1.2 决策的数学模型	117
9.2 风险型决策	118
9.2.1 进行风险型决策的基本条件与方法	118
9.2.2 最大可能法	118
9.2.3 期望值法	120
9.3 决策树	121
9.3.1 决策树的定义与相关名词	121
9.3.2 实例分析	122
9.4 不确定型决策	125
9.4.1 不确定型决策的条件	125
9.4.2 乐观法	126
9.4.3 悲观法	127
9.4.4 乐观系数法	127
9.4.5 后悔值法	128
9.4.6 等可能法	128
9.5 灵敏度分析	130
9.5.1 灵敏度分析的意义	130
9.5.2 转折概率	131
9.5.3 灵敏度分析实例	131
第 10 章 风险的评价与决策	134
10.1 风险评价的主要方法概述	134
10.1.1 完全回避风险法	134
10.1.2 权衡风险法	134
10.1.3 减少风险的成本效益分析	135
10.1.4 风险-效益分析	136
10.2 风险影响下的决策分析	137
10.2.1 效用理论在决策中的应用	137
10.2.2 生存风险度	140
10.3 风险评价与多目标决策	141
10.3.1 加权求和的决策方法	141
10.3.2 求非劣解的决策方法	142
阅读材料 马尔可夫决策过程	144

第四篇 优选法与试验设计

第 11 章 优选法与试验设计引论	151
11.1 什么是优选法	151
11.2 什么是试验设计	151
第 12 章 优选法	153
12.1 优选法的基本原理	153
12.1.1 单峰函数及其性质	153
12.1.2 斐波那契数列在优选法中的应用	155
12.1.3 分批试验的原理	158
12.2 多因素法	162
第 13 章 试验设计	169
13.1 试验设计的基本原则	170
13.2 一类正交表的构造	177
附录 1 简易优选法	189
附录 2 常用正交表	199

第一篇 球面上的几何

我们生活的地球虽然表面上山峦起伏、沟壑纵横,但从太空看,它的表面十分接近于一个球面. 因此,球面上的几何知识在实际生活中有着广泛的应用. 人们要进行航空航海,必须应用球面几何知识;人们要进行大地测量,必须应用球面几何知识;人们要进行天文学研究,必须应用球面几何知识. 球面几何是一个与欧氏平面几何不同的几何模型,它是一个重要的非欧几何模型,本篇将介绍这一几何模型的一些基本知识.

第 1 章 球面几何的基本概念

几何学研究的是几何图形的性质与测量. 在平面几何中, 我们研究了点、线、角、三角形、多边形等几何图形. 与此相类似, 在球面几何中, 我们将要研究球面上的几何图形的性质. 本章将给出球面几何的一些基本概念, 为了后面解决问题的需要, 还将介绍立体几何中的多面角.

1.1 多 面 角

在空间任取一点 S , 以 S 为端点依次引出 n 条射线 $SP_1, SP_2, \dots, SP_n$, 我们把这些射线及相邻两条射线间的平面部分所组成的图形叫做多面角, 记为多面角 $S-P_1P_2\cdots P_n$. 在不引起混淆的情况下, 简记为多面角 S . 如图 1.1 和 1.2 所示均为多面角. 对于多面角 $S-P_1P_2\cdots P_n$, 我们将点 S 叫做这个多面角的顶点, 相邻两条射线间的平面部分叫做多面角的面, 相邻两条射线所组成的角叫做多面角的面角, 相邻两个面组成的二面角叫做多面角的二面角.

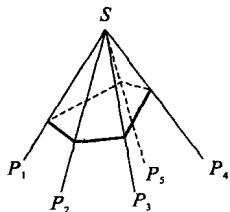


图 1.1

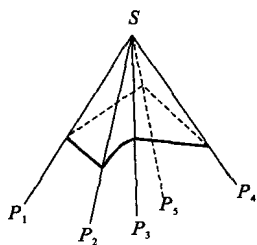


图 1.2

显然, 多面角的面数、棱数、面角数、二面角数均相等. 多面角至少有三个面, 多面角依照它的面数分别叫做三面角、四面角、五面角等.

下面我们介绍多面角的两个重要结论.

定理 1.1 三面角的任意两个面角的和大于第三个面角.

证 如图 1.3 所示, 在三面角 $S-ABC$ 中, 当 $\angle ASC \leq \angle ASB$ 时, 显然有

$$\angle ASB + \angle BSC > \angle ASC.$$

当 $\angle ASC > \angle ASB$ 时, 在面 ASC 上作线段 SD' , 使得 $\angle ASD' = \angle ASB$. 过点 D' 作与各棱均相交的平面 $A'B'C'$, 与

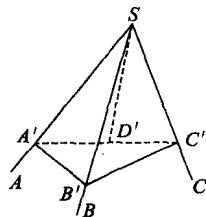


图 1.3

SA, SB, SC 分别交于点 A', B', C' , 使得 $SB' = SD'$. 在 $\triangle A'SB'$ 和 $\triangle A'SD'$ 中, 因为
 $SA' = SA', SB' = SD', \angle A'SB' = \angle A'SD'$,
 所以

$$\triangle A'SB' \cong \triangle A'SD',$$

故

$$A'B' = A'D'.$$

在 $\triangle A'B'C'$ 中, 因为

$$A'B' + B'C' > A'C' = A'D' + D'C',$$

又 $A'B' = A'D'$, 故 $B'C' > D'C'$.

在 $\triangle B'SC'$ 和 $\triangle D'SC'$ 中, 因为

$$SB' = SD', SC' = SC', B'C' > C'D',$$

由余弦定理得

$$\cos \angle B'SC' < \cos \angle D'SC',$$

所以 $\angle B'SC' > \angle D'SC'$, 即 $\angle BSC > \angle D'SC$, 故

$$\angle ASB + \angle BSC > \angle ASD' + \angle D'SC,$$

即

$$\angle ASB + \angle BSC > \angle ASC.$$

同理可证

$$\angle BSC + \angle CSA > \angle BSA,$$

$$\angle CSA + \angle ASB > \angle CSB.$$

推论 在 n 面角 $S-P_1P_2\cdots P_n$ 中, 任意 $n-1$ 个面角的和大于余下的一个面角.

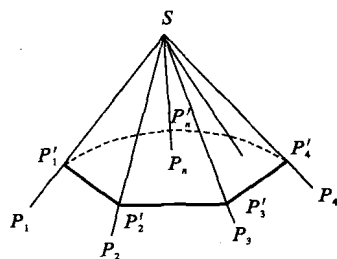


图 1.4

对于一个多面角, 若将多面角的任何一个面伸展成为平面, 其他各面都在这个平面的同侧, 则将这样的多面角称为凸多面角. 图 1.1 所示的多面角为凸多面角, 而图 1.2 所示的多面角不是凸多面角. 用一个平面截凸多面角的所有面和棱, 一定得到一个凸多边形. 下面介绍凸多面角的一个性质.

定理 1.2 凸多面角所有面角的和小于 2π (弧度).

证 如图 1.4 所示, 用平面截凸多面角 $S-P_1P_2\cdots P_n$ 的所有面和棱, 得凸多边形 $P'_1P'_2\cdots P'_n$. 在以 $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ 为顶点的 n 个三面角中, 由定理 1.1, 有

$$\angle SP'_1P'_n + \angle SP'_1P'_2 > \angle P'_nP'_1P'_2,$$

$$\angle SP'_2P'_1 + \angle SP'_2P'_3 > \angle P'_1P'_2P'_3,$$

.....

$$\angle SP'_nP'_{n-1} + \angle SP'_nP'_1 > \angle P'_{n-1}P'_nP'_1,$$

将上述 n 个不等式相加, 左边的和是 n 个三角形的内角和减去凸 n 面角的所有面角和, 右边是凸 n 边形 $P'_1P'_2\cdots P'_n$ 的内角和, 从而有

$$n\pi - (\angle P_1SP_2 + \angle P_2SP_3 + \cdots + \angle P_nSP_1) > (n-2)\pi,$$

所以

$$\angle P_1SP_2 + \angle P_2SP_3 + \cdots + \angle P_nSP_1 < 2\pi.$$

定理 1.2 告诉我们,如果将凸 n 面角的一个棱剪开,把它展在平面上,那么它不能铺满一个周角,而是缺少一部分.

习 题 1.1

1. 二面角是不是多面角?多面角是不是棱锥?
2. 下面各组面角能否构成三面角?为什么?
(1) $75^\circ, 45^\circ, 90^\circ$; (2) $130^\circ, 85^\circ, 36^\circ$.
3. 试证明三面角的任何一个面角大于其余两个面角的差.
4. 试证明定理 1.1 的推论.

1.2 球面上的点、线、角

球面可看成由点组成. 对于球面上的两点 A, B , 若直线 AB 过球的球心, 则称 A, B 为对径点. 显然, 当 A, B 为对径点时, 线段 AB 为球的直径.

用一个平面去截球面, 其截面是一个圆. 我们把不过球心的平面截得的圆称为球面上的小圆, 把过球心的平面截得的圆称为球面上的大圆. 例如, 地球的赤道是大圆, 地球的两条东西经线合成的圆也是大圆, 而纬线是小圆.

球面上的大圆也称为球面直线, 简称直线. 与平面几何不同的是, 球面上任两条直线均有两个交点, 并且这两个交点是对径点. 事实上, 设 C_1, C_2 是球面上的两条直线, Π_1, Π_2 是过这两条球面直线的平面, 因为 Π_1 与 Π_2 均过球心, 所以 Π_1 与 Π_2 相交, 其交线 l 过球心. 空间直线 l 与球面的两个交点就是球面直线 C_1 与 C_2 的交点, 它们是对径点.

例 1.1 在平面几何中, 过平面上两点可作唯一一条直线, 试问过球面上两点 A, B 可作多少条球面直线?

解 当 A, B 不是对径点时, A, B 与球心 O 不共线, 从而过 A, B, O 可作唯一一条直线, 这个平面与球面的交线就是过点 A, B 的球面直线. 即过点 A, B 可作唯一一条球面直线.

当点 A, B 为对径点时, 点 A, B 与球心 O 三点共线, 此时过 A, B 与 O 可作无数个平面, 每个平面与球面的交线均是过点 A, B 的球面直线. 因此, 当点 A, B 为对径点时, 过点 A, B 可作无数条球面直线.

设 A, B 是半径为 R 的球面上两点, 过点 A, B 作球面直线 C , 则 A, B 将 C 分成两段弧. 当点 A, B 不为对径点时, A, B 分 C 所成的两段弧中必有一段的长小于

πR , 我们将这段弧称为连接 A, B 的球面线段; 当点 A, B 为对径点时, A, B 分 C 所成的两段弧的长相等, 我们把两段弧都叫做连接点 A, B 的球面线段. 半径为 R 的球上的球面线段的长不超过 πR . 显然, 当点 A, B 不为对径点时, 连接点 A, B 的球面线段是唯一的, 当点 A, B 为对径点时, 连接点 A, B 的球面线段有无数条. 我们把连接点 A, B 的球面线段记为 $\overline{AB}$, 并也用 $\overline{AB}$ 表示球面线段 $\overline{AB}$ 的长度.

在平面几何中, 连接平面上两点的曲线以线段最短, 在球面几何中我们也有类似的结论.

定理 1.3 设 A, B 是球面上的两点, 球面上连接这两点的所有曲线中, 球面线段 $\overline{AB}$ 最短.

证 如图 1.5 所示, 设 C 是连接点 A, B 的曲线, 球面曲线 C 的长为 S . 令 $P_0 = A, P_n = B$, 在曲线 C 上插入 $n-1$ 个分点 $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, 将曲线 C 分成几段, 即 $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$, 设曲线段 $P_{i-1}P_i$ 的长为 $\Delta S_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i.$$

对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 连球面线段 $\overline{P_{i-1}P_i}$, 则

$$\Delta S_i \approx \overline{P_{i-1}P_i},$$

从而有 $S \approx \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i}$. 令

$$\lambda = \max\{\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n\},$$

则当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 有

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i}. \quad (1.1)$$

设球的球心为 O , 半径为 R , 连 $OP_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, 如图 1.5 所示, 得以球心为顶点的球心角 $\angle P_0P_1P_2 \dots P_n$.

因为

$$\overline{P_{i-1}P_i} = R \cdot \angle P_{i-1}OP_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n (R \cdot \angle P_{i-1}OP_i) = R \sum_{i=1}^n \angle P_{i-1}OP_i,$$

由定理 1.1 的推论知

$$\sum_{i=1}^n \angle P_{i-1}OP_i > \angle P_0OP_n,$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} > R \cdot \angle P_0OP_n = R \angle AOB,$$

即

$$\sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} > \overline{AB}. \quad (1.2)$$

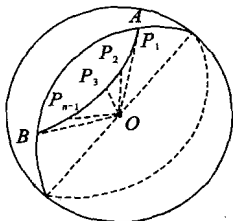


图 1.5

在不等式(1.2)中让 $\lambda \rightarrow 0$, 由极限的保号性知

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} \geq \overline{AB}, \quad (1.3)$$

由式(1.1)和(1.3)得

$$S \geq \overline{AB}.$$

注 定理 1.3 也可用微分几何中的方法证明.

与平面上两点的距离的定义类似, 我们将球面上连接两点 A, B 的球面线段的长称为 A, B 两点的球面距离, 对于球面上两点距离的计算, 有如下结论.

定理 1.4 设 A, B 是半径为 R 的球面上的两点, 若球面线段 $\overline{AB}$ 所对的大圆的圆心角为 α (α 以弧度计), 则

$$\overline{AB} = R\alpha.$$

推论 在单位球面上, A, B 两点间的距离为球面线段 $\overline{AB}$ 所对大圆的圆心角的弧度数.

定理 1.4 及其推论请读者自证. 正是因为有了上述推论, 在单位球面上, 我们可用角度度量球面上的线段, 这一点请读者特别留意.

设 C 为球面上的大圆, 过球心 O 作大圆 C 所在平面的垂线交球面于点 P, P' , 我们将点 P 与 P' 称为大圆 C 的极, 而大圆 C 称为点 P 与 P' 的极圆. 一个大圆有两个极, 球面上的每个点均有唯一的极圆.

例 1.2 在半径为 R 的球面上, 点 P 是大圆 C 的极, A 为大圆 C 上的点, 如图 1.6 所示, 求点 P 到点 A 的距离.

解 在图 1.6 中, 因为 P 是大圆 C 的极, 所以 $PO \perp OA$, $\angle POA = \frac{\pi}{2}$, 故

$$\overline{PA} = \frac{\pi}{2}R,$$

即点 P 到点 A 的距离为 $\frac{\pi}{2}R$.

例 1.2 告诉我们, 大圆的极到大圆上任两点的距离都相等, 其距离为 $\frac{\pi}{2}R$, 人们常把这个距离称为极距离.

球面线段是球面大圆的一部分, 因此也可定义球面线段的极. 对于球面线段 $\overline{AB}$, 我们将 $\overline{AB}$ 所在的大圆的极称为球面线段的极, 关于球面线段的极, 有如下结论.

定理 1.5 设球面 S 的半径为 R , A, B 是 S 上的非对径点, P 是 S 上的点, 则点 P 是球面线段 $\overline{AB}$ 的极的充要条件是

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \frac{\pi}{2}R.$$

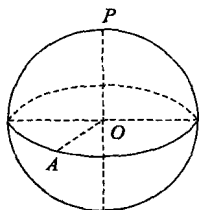


图 1.6

证 必要性:若点 P 是球面线段 $\overline{AB}$ 的极, 则 P 是球面线段 $\overline{AB}$ 所在大圆的极, 则由例 1.2 知

$$\overline{PA} = \frac{\pi}{2}R, \quad \overline{PB} = \frac{\pi}{2}R,$$

所以

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \frac{\pi}{2}R.$$

充分性:若 $\overline{PA} = \overline{PB} = \frac{\pi}{2}R$, 连 OA, OB, OP , 如图 1.7 所示, 则

$$\angle POA = \frac{\pi}{2}, \quad \angle POB = \frac{\pi}{2},$$

即 $PO \perp$ 平面 AOB , 所以 P 是球面线段 $\overline{AB}$ 的极.

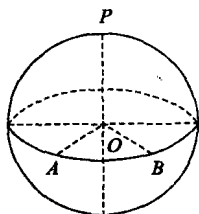


图 1.7

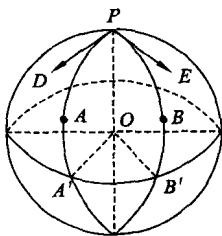


图 1.8

在平面几何中, 我们把从一点引出两条射线所得的图形称为角. 与此相类似, 在球面上, 我们把从球面上一点 P 引出两条球面线段 $\overline{PA}$ 与 $\overline{PB}$ 所组成的图形称为球面角, 记为 $\angle APB$ 或 $\angle BPA$, 简记为 $\angle P$. 我们把点 P 称为角的顶点, 球面线段 $\overline{PA}$ 与 $\overline{PB}$ 称为角的边, 过点 P 分别作球面线段 $\overline{PA}$ 与 $\overline{PB}$ 的切线 PD, PE , 如图 1.8 所示, 则规定球面角 APB 的大小为平面角 DPE 的大小, 我们仍用记号 $\angle APB$ 表示 $\angle APB$ 的大小.

对于球面角 APB , 设点 P 的极圆分别交球面线段 $\overline{PA}$ 与 $\overline{PB}$ 所在的大圆于 A', B' , 如图 1.8 所示, 则

$$\text{球面角 } APB = \text{平面角 } A'OB',$$

这里 O 为球心.

与平面直角的规定一样, 我们把球面角的大小为 $\frac{\pi}{2}$ 的角称为球面直角.

习 题 1.2

1. 设 A, B, C 是球面上的三点, 求证:

$$(1) \overline{AB} + \overline{BC} \geq \overline{AC}; \quad (2) \overline{AB} - \overline{BC} \leq \overline{AC}.$$

2. 设 A, B, C 是球面上的三点, 且 $\overline{AB} = \overline{AC}$, 试问点 A 是否一定为球面线段 $\overline{BC}$ 的极? 若是请说明理由, 若不是请举出反例.

3. 已知北京位于北纬 $39^\circ 56'$, 东经 $116^\circ 20'$, 武汉位于北纬 $30^\circ 37'$, 东经 $114^\circ 21'$, 用点 N 表示地球的北极, 点 B 表示北京, 点 W 表示武汉, 求球面角 BW 的大小.

1.3 球面上的对称

球面是中心对称图形, 球心 O 为其对称中心, 球面是旋转对称图形, 球面的每一条直径所在的直线都可作为旋转轴. 球面除了这些对称性外, 我们还可以像讨论平面上的对称图形与对称变换一样, 讨论球面上的对称变换与对称图形.

设 S 为球面, O 为 S 的球心, 对于 S 上任一点 A , 将 A 的对径点记为 A' , 则规定 S 到 S 的映射 σ 如下:

$$\sigma: A \rightarrow A',$$

则称 σ 是球面 S 的以球心 O 为中心的倒反变换.

设 Γ 为球面 S 上的一个图形 (Γ 是球面上的点构成的集合), σ 是球面 S 的以球心 O 为中心的倒反变换, $\sigma(\Gamma)$ 是集合 Γ 在 σ 下的象集, 则称图形 Γ 与 $\sigma(\Gamma)$ 关于球心 O 成中心对称, 图形 $\sigma(\Gamma)$ 是图形 Γ 关于球心 O 的中心对称图形. 显然, 若 $\sigma(\Gamma)$ 是 Γ 关于球心 O 的中心对称图形, 则 Γ 是 $\sigma(\Gamma)$ 关于球心 O 的中心对称图形.

设 P 是球面 S 上的一个定点, 对于球面上的点 A , 作过点 A, P 的球面直线 C , 在球面直线 C 上取点 A' , 使得 A' 与 A 位于点 P 的两侧, 且

$$\overline{AP} = \overline{A'P},$$

如图 1.9 所示, 则称 A 与 A' 关于点 P 成中心对称, 点 P 称为点 A 与 A' 的对称中心. 若点 A 与 A' 关于点 P 成中心对称, 我们称点 A' 为点 A 关于点 P 的中心对称点. 特别地, 规定点 P 关于点 P 的中心对称点为 P 自身. 当点 A 与点 P 为对径点时, 点 A 关于点 P 的中心对称点仍为点 A .

设 S 为球面, P 为 S 上一定点, 对于球面上的任一点 A , A 关于点 P 的中心对称点为 A' , 我们规定 S 到 S 的映射 σ 如下:

$$\sigma: A \rightarrow A',$$

则称 σ 是球面 S 的关于点 P 的倒反变换.

设 Γ 为球面 S 上的一个图形, σ 是球面 S 的关于点 P 的倒反变换, $\sigma(\Gamma)$ 是 Γ 在 σ 下的象集, 则称图形 Γ 与图形 $\sigma(\Gamma)$ 关于点 P 成中心对称, 图形 $\sigma(\Gamma)$ 是图形 Γ 关于点 P 的中心对称图形. 显然, 若 $\sigma(\Gamma)$ 是 Γ 关于点 P 的中心对称图形, 则 Γ 是 $\sigma(\Gamma)$

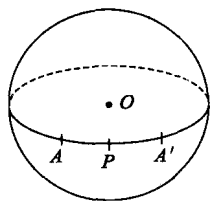


图 1.9