特色专业

普通高等教育电子通信类特色专业系列规划教材

电磁场与电磁兼容

闻映红　周克生
崔　勇　陈　嵩　编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育电子通信类特色专业系列规划教材

电磁场与电磁兼容

闻映红　周克生
崔　勇　陈　嵩　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书比较全面地介绍了电磁场与电磁兼容的基础理论。主要内容包括矢量分析、时变电磁场、电磁波、天线基础、传输线、电磁兼容概述、电磁骚扰的传输途径、电磁兼容测试、接地和搭接、屏蔽、滤波等。

本书注重将电磁场理论与电磁兼容实际应用相结合。对于静电场和恒定磁场以及场的计算方法，本书不作为重要内容介绍。在介绍电磁场理论时，不以全面、系统作为目标。本书旨在深入分析理论概念，简化推导，以介绍解决实际的电磁兼容问题所需的基础理论作为重点。本书配套有电子课件，可供任课教师使用。

本书的主要读者对象是自动控制和电子类本科生，也可供其他专业本科生和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁兼容/闻映红等编著. —北京：科学出版社，2010
(普通高等教育电子通信类特色专业系列规划教材)

ISBN 978-7-03-029197-4

Ⅰ.①电… Ⅱ.①闻… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教材②电磁兼容性-高等学校-教材 Ⅳ.①O441.4②TN03

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 198676 号

责任编辑：匡 敏 潘斯斯 卜 新 / 责任校对：郑金红
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码 100717
http //www.sciencep.com
骏走印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 11 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2010 年 11 月第一次印刷 印张：18 1/4
印数：1—3 000 字数：430 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

学习本书的前提条件是已经修完了以下几门本科电类专业的基本课程:高等数学、电路分析、信号与系统、场论、电子测量。本书的理论基础是这几门课程所涵盖的基本概念和基本原理。

电磁兼容是保证自动控制设备和系统在电磁环境中正常工作的关键性技术之一,也是电子电路设计需要达到的目标之一。通过学习"电磁场与电磁兼容"课程,学生能够掌握麦克斯韦方程组、电磁波传播、天线和传输线理论以及有关电磁兼容的基本知识,学会分析和解决电磁干扰问题的方法,解决在自动化系统设计和应用以及电子电路设计中遇到的电磁干扰问题,实现系统间电磁兼容。

本书的编写目标是要适应知识更新和课程体系改革的需要,为本科通信工程专业、自动化专业、电子科学与技术专业学生提供专业技术基础课程教材。本书将电磁场理论、电磁波理论和电磁兼容合二为一,既包含了极其经典的理论基础知识,又包含了许多工程应用方面的知识。

为了能使学生从枯燥的数学计算和复杂的物理现象中解脱出来,更多地了解理论知识的实际应用,本书根据本科学生的特点以及工程技术人员参考的需求,合理编排教材体系和教材内容,做到两者兼顾。在电磁场经典理论部分,本书改变了以往此类教材的统一编排体系(即从静电场到恒定磁场再到时变电磁场,最后引出麦克斯韦方程组)。本书将根据专业特点,在介绍矢量分析之后,从电场和磁场两个矢量的角度出发,直接给出麦克斯韦方程组,继而介绍各电磁场定律和定理。静电场作为特例给出。另外,本书在经典理论之外,还引入了大量的最新科研成果与研究技术,尽力让读者理解如何应用所学的理论知识去分析、解决实际问题,让本科学生和初学者接触到一个全新的领域。

本书的编写得益于许多老师和同学的共同努力。首先,感谢北京交通大学电子信息工程学院对本课程的建设以及本书出版的大力支持;其次,感谢北京交通大学 2008 级自动化专业和电子科学与技术专业全体同学对本书的试用、建议和意见;最后,感谢北京交通大学电磁兼容实验室的张晓燕、单秦、卢怡、霍红艳和冯玉明等同学为本书的图文录入所付出的辛勤劳动。

作者水平有限,本书内容难免有不当之处,敬请各位同行指正。

编　者

2010 年 8 月

目　　录

第 1 章　矢 量 分 析

矢量分析又称为场论，是研究各种类型运动规律的数学工具，它的数学公式与场的物理概念紧密相关。在电磁场理论中，大量用到了矢量运算。因为电磁场是场的一种，利用矢量可以为复杂现象提供紧凑的数学描述，也便于直观想象和运算变换。一个矢量形式的方程可以代表三个标量方程。虽然本书没有对矢量分析进行完整论述，但是本章介绍的矢量运算公式在电磁场理论的研究中起到了重要作用。

1.1　标量场和矢量场

纯数加上物理单位，称为物理量。物理量有标量和矢量之分。占有一定空间，并且具有一定空间分布特性的物理量称为场。场有静态场和动态场之分，也有标量场和矢量场之分。

如果场不随时间而变化，则称之为静态场，静态场也称为时不变场。由静止电荷产生的场（静电场）和由恒定电流建立的场（恒定磁场）都属于静态场。随时间变化的场称为时变场。

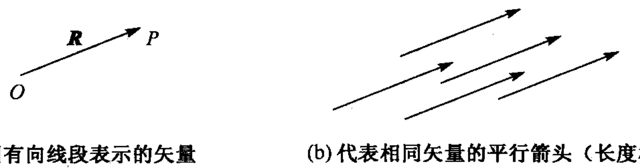
1.1.1　标量场

一个只用大小就能够完整描述的物理量称为标量或标量场。质量、时间、温度、功和电荷都是标量，它们中的每一个，都可以用大小来进行完整描述。一个动态标量场可用一维空间位置和时间的函数来描述，如温度 $T(z,t)$。

1.1.2　矢量场

一个既有大小又有方向的物理量称为矢量或矢量场。如力、速度、力矩、电场强度和磁场强度都是矢量，矢量包含了两种信息：幅度和方向。

矢量可以用有向线段来表示：线段的长度表示矢量的大小，箭头表示矢量的方向，如图 1-1(a) 所示。本书用黑体字母来表示矢量。在图 1-1(a) 中，$\boldsymbol{R}$ 代表一个从 O 点指向 P 点的矢量。图 1-1(b) 为几个有同样长度和方向的平行矢量，它们都代表同一个矢量。两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 如果有同样的大小（长度）和方向，则二者相等，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。如果它们有同样的物理或几何意义，且具有同样的量纲，那么我们可以只比较矢量。



(a) 用有向线段表示的矢量　　(b) 代表相同矢量的平行箭头（长度相等）

图 1-1　矢量表示

一个大小为零的矢量称为零矢量。这是唯一不能用箭头表示的矢量，因为它没有大小（长度）。一个大小（长度）为 1 的矢量称为单位矢量。我们常用单位矢量来表示一个矢量的方向。例如，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以写成

$$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{a}_A \tag{1-1}$$

式中，A 表示 $\boldsymbol{A}$ 的大小，$\boldsymbol{a}_A$是与 $\boldsymbol{A}$ 同方向的单位矢量，可写成

$$\boldsymbol{a}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{A} \tag{1-2}$$

在电磁场中，描述电磁场的场量，电场强度 $\boldsymbol{E}$、电位移矢量 $\boldsymbol{D}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 均为矢量，而描述场源的电荷 q、电荷密度 ρ、电流 I 为标量，电流密度 $\boldsymbol{J}$ 为矢量。

1.2 常用正交坐标系

为了能对矢量进行量化，进而对矢量进行运算，首先必须建立空间坐标系，将矢量在一定的坐标系中表达出来。常用的三种正交坐标系有直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

1.2.1 直角坐标系

直角坐标系由三条相互正交的直线构成。这三条直线分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴，三条轴线的交点为原点。x、y 和 z 轴的方向用单位矢量 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 来表征。空间某一点 $P(X,Y,Z)$ 能唯一地被它在三条轴线上的投影所确定，(X,Y,Z) 为 P 点的坐标，如图 1-2 所示。

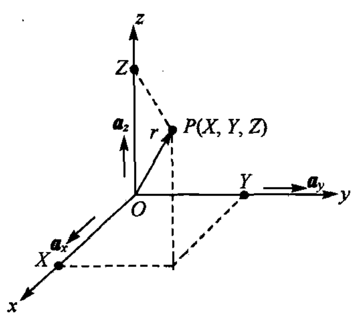


图 1-2 直角坐标系中一点的投影

位置矢量(position vector，简称位矢)$\boldsymbol{r}$，是指从原点指向 P 点的矢量，可表示为

$$\boldsymbol{r} = X\boldsymbol{a}_x + Y\boldsymbol{a}_y + Z\boldsymbol{a}_z \tag{1-3}$$

式中，X、Y 和 Z 是 $\boldsymbol{r}$ 在 x、y 和 z 轴上的投影；$\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 是沿 x、y 和 z 轴方向的单位矢量。例如，设 A_x、A_y 和 A_z 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系三个坐标轴上的投影，那么，$\boldsymbol{A}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_x + A_y\boldsymbol{a}_y + A_z\boldsymbol{a}_z \tag{1-4}$$

1. 直角坐标系单位矢量之间的关系

直角坐标系中单位矢量之间的关系如下：

$$\boldsymbol{a}_x \cdot \boldsymbol{a}_x = 1 \qquad \boldsymbol{a}_y \cdot \boldsymbol{a}_y = 1 \qquad \boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_z = 1 \tag{1-5a}$$

$$\boldsymbol{a}_x \cdot \boldsymbol{a}_y = 0 \qquad \boldsymbol{a}_y \cdot \boldsymbol{a}_z = 0 \qquad \boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_x = 0 \tag{1-5b}$$

$$\boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_z \qquad \boldsymbol{a}_y \times \boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_x \qquad \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_x = \boldsymbol{a}_y \tag{1-5c}$$

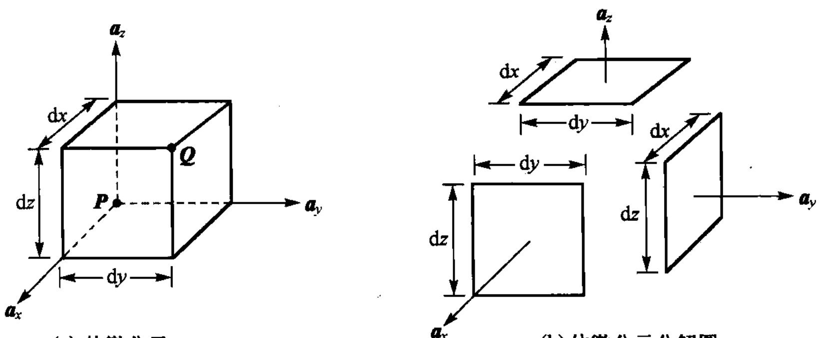
2. 直角坐标系中的线、面、体微分元

在直角坐标系中，体微分元 $\mathrm{d}v$ 分别由沿单位矢量 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$、$\boldsymbol{a}_z$ 的线微分元 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z$ 相乘得到，如图 1-3(a)所示，即

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1-6}$$

体微分元由六个微分面构成，每个面元的方向由表示其外法线方向的单位矢量来确定(图 1-3(b))，即

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{s}_x &= \mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\boldsymbol{a}_x \\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}_y &= \mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\boldsymbol{a}_y \\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}_z &= \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\boldsymbol{a}_z \end{aligned} \tag{1-7}$$



(a) 体微分元　　(b) 体微分元分解图

图 1-3 直角坐标系中的体微分元

在直角坐标系中的线微分元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{a}_x + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{a}_y + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{a}_z \tag{1-8}$$

1.2.2 圆柱坐标系

圆柱坐标系由两两相互垂直的两个平面和一个圆柱面构成，坐标面 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} =$ 常数。它是一个以 z 轴为轴线，半径为 ρ 的圆柱，$0 \leqslant \rho \leqslant \infty$。坐标面 $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) =$ 常数，它是一个绕着 z 轴旋转的半无限大平面，以 x 轴为起点，逆时针方向旋转，$0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ 。坐标面 $z=$ 常数，它是一个平行于 xOy 平面的平面，$-\infty \leqslant z \leqslant \infty$。两个坐标面的交线构成了圆柱坐标系的坐标轴，分别为 ρ 、ϕ 和 z 轴，相应的单位矢量为 $\boldsymbol{a}_\rho$ 、$\boldsymbol{a}_\phi$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ ，如图 1-4 所示。

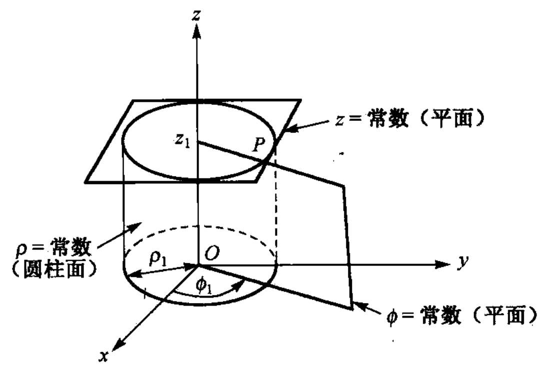


图 1-4 圆柱坐标系三个互相垂直的坐标面

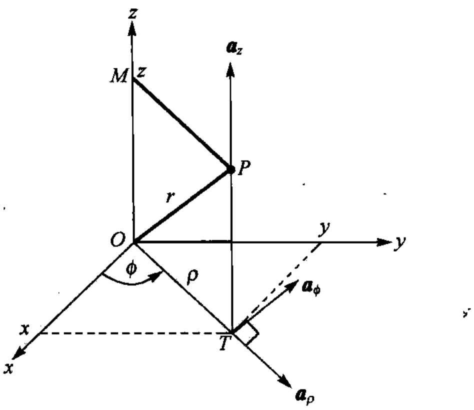


图 1-5 圆柱坐标系中一点的投影

空间一点 P 也能够用坐标 ρ、ϕ 和 z 完整描述，如图 1-5 所示。我们说 ρ 、ϕ 和 z 是点 $P(\rho, \phi, z)$ 的圆柱坐标。将直角坐标系和圆柱坐标系画在一起，就可以看到两者之间的关系。以空间同样一点 P 为例，可见，ρ 是位矢 OP 在 xOy 平面上的投影，ϕ 是从正 x 轴到平面 $OTPM$ 的夹角，z 是 OP 在 z 轴上的投影。从图 1-5，可知

$$x = \rho\cos\phi \tag{1-9}$$

$$y = \rho\sin\phi \tag{1-10}$$

注意，单位矢量 $\boldsymbol{a}_\rho$ 和 $\boldsymbol{a}_\phi$ 的方向不是固定的，会随着 ϕ 的改变而改变。

1. 圆柱坐标系单位矢量之间的关系

圆柱坐标系中单位矢量之间的关系如下：

$$\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 1,\quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 1,\quad \boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_z = 1 \tag{1-11a}$$

$$\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0,\quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_z = 0,\quad \boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0 \tag{1-11b}$$

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\rho = 0,\quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_\phi = 0,\quad \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_z = 0 \tag{1-11c}$$

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_z,\quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_\rho,\quad \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi \tag{1-11d}$$

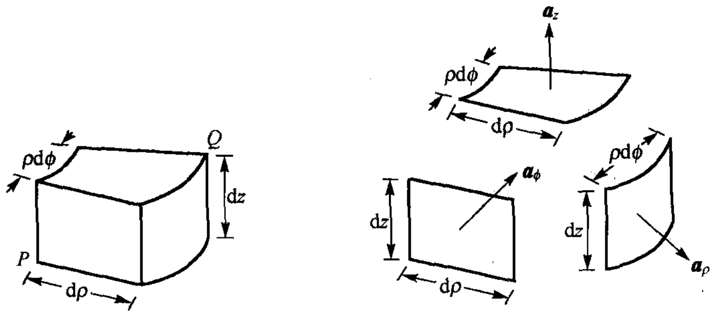
2. 圆柱坐标系的线、面、体微分元

图 1-6(a)表示以 ρ、$\rho+\mathrm{d}\rho$、ϕ、$\phi+\mathrm{d}\phi$、z、$z+\mathrm{d}z$ 的面为界面的体微分元 $\mathrm{d}v$，即

$$\mathrm{d}v = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z \tag{1-12}$$

面微分元(图 1-6(b))为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_\rho &= \rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z\, \boldsymbol{a}_\rho \\ \mathrm{d}s_\phi &= \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z\, \boldsymbol{a}_\phi \\ \mathrm{d}s_z &= \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi\, \boldsymbol{a}_z \end{aligned} \tag{1-13}$$



(a) 体微分元　　(b) 体微分元分解图

图 1-6　圆柱坐标系中的微分元

从 P 到 Q 的线微分元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}\rho\, \boldsymbol{a}_\rho + \rho \mathrm{d}\phi\, \boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\, \boldsymbol{a}_z \tag{1-14}$$

3. 圆柱坐标与直角坐标的转换关系

设单位矢量 $\boldsymbol{a}_\rho$ 和 $\boldsymbol{a}_\phi$ 在单位矢量 $\boldsymbol{a}_x$ 和 $\boldsymbol{a}_y$ 上的投影如图 1-7 所示。可见：

$$\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi\, \boldsymbol{a}_x + \sin\phi\, \boldsymbol{a}_y \tag{1-15a}$$

$$\boldsymbol{a}_\phi = -\sin\phi\, \boldsymbol{a}_x + \cos\phi\, \boldsymbol{a}_y \tag{1-15b}$$

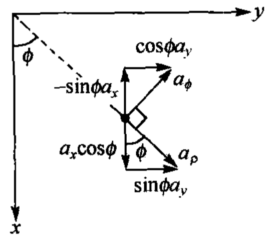


图 1-7　$\boldsymbol{a}_\rho$、$\boldsymbol{a}_\phi$ 沿 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 方向的分量

这里，因为 $\boldsymbol{a}_x \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi$，$\boldsymbol{a}_y \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \sin\phi$，$\boldsymbol{a}_x \cdot \boldsymbol{a}_\phi = -\sin\phi$，$\boldsymbol{a}_y \cdot \boldsymbol{a}_\phi = \cos\phi$，所以，从直角坐标系到圆柱坐标系的单位矢量变换，可写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_\rho \\ \boldsymbol{a}_\phi \\ \boldsymbol{a}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{pmatrix} \tag{1-16}$$

同样,如果矢量 **A** 在圆柱坐标系中给出,则把它投影到直角坐标系的 x、y 和 z 轴上,便能得到矢量 **A** 在直角坐标系中的表达式。**A** 在 x 轴上的投影为

$$A_x = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{a}_x = A_\rho\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_x + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_x + A_z\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{a}_x = A_\rho\cos\phi - A_\phi\sin\phi \tag{1-17a}$$

A 在 y 轴及 z 轴上的投影为

$$A_y = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{a}_y = A_\rho\sin\phi + A_\phi\cos\phi \tag{1-17b}$$

$$A_z = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{a}_z = A_z \tag{1-17c}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1-18}$$

反过来,一个在直角坐标系中给出的矢量 **A**,用下列变换可以得到在圆柱坐标系中的表达式:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1-19}$$

例 1-1 写出空间任一点在直角坐标系中的位置矢量表达式。然后将此矢量变换成在圆柱坐标系中的一个矢量。

解 在空间任一点 $P(x,y,z)$ 的位置矢量是

$$\mathbf{A} = x\boldsymbol{a}_x + y\boldsymbol{a}_y + z\boldsymbol{a}_z$$

用式(1-19)中的变换矩阵,得

$$A_\rho = x\cos\phi + y\sin\phi$$

$$A_\phi = -x\sin\phi + y\cos\phi$$

$$A_z = z$$

代入 $x = \rho\cos\phi$ 和 $y = \rho\sin\phi$,得

$$A_\rho = \rho, A_\phi = 0,\ A_z = z$$

于是,矢量 **A** 在圆柱坐标系中为

$$\mathbf{A} = \rho\boldsymbol{a}_\rho + z\boldsymbol{a}_z$$

例 1-2 在直角坐标系中表示矢量 $\mathbf{A} = \frac{k}{\rho^2}\boldsymbol{a}_\rho + 5\sin 2\phi\boldsymbol{a}_z$ 。

解 应用式(1-18)中的变换矩阵,由于

$$A_\rho = \frac{k}{\rho^2}, A_\phi = 0, A_z = 5\sin 2\phi$$

所以,经变换后得

$$A_x = \frac{k\cos\phi}{\rho^2}, A_y = \frac{k\sin\phi}{\rho^2}, A_z = 10\cos\phi\sin\phi$$

代入 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \cos\phi = \frac{x}{\rho}, \sin\phi = \frac{y}{\rho}$

最后得到

$$\mathbf{A} = \frac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{a}_x + \frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{a}_y + \frac{10xy}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_z$$

1.2.3　球坐标系

球坐标系由两两相互垂直的一个平面、一个球面和一个圆锥面构成，如图 1-8 所示。$r=$ 常数，表示通过点 $P(r,\theta,\phi)$、以 r 为半径的球面；$\theta=$ 常数，表示顶点在原点的圆锥面；$\phi=$ 常数，表示以 z 轴为旋转中心、与 xOy 平面成 ϕ 角的平面。空间一点 P 在球坐标系中，可用 (r,θ,ϕ) 唯一表示，如图 1-9 所示。r 表示位置矢量（或矢径 radius vector）OP 的大小，$0\leqslant r\leqslant\infty$；$\theta$ 表示位置矢量 OP 与正 z 轴的夹角，方向从正 z 轴转向负 z 轴，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$；$\phi$ 表示正 x 轴与图中所示平面 $OMPN$ 的夹角，其中，$OM=r\sin\theta$ 为 r 在 xoy 平面上的投影，ϕ 以 x 轴为起点，逆时针方向旋转，$0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$。

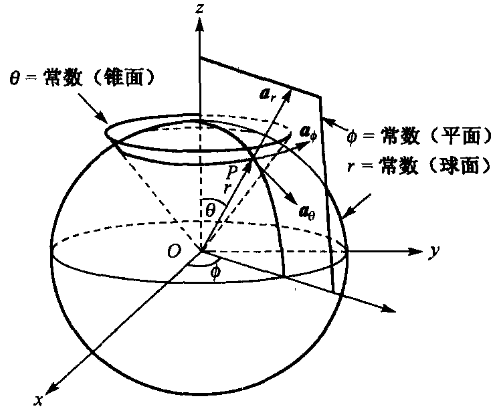


图 1-8　球坐标系

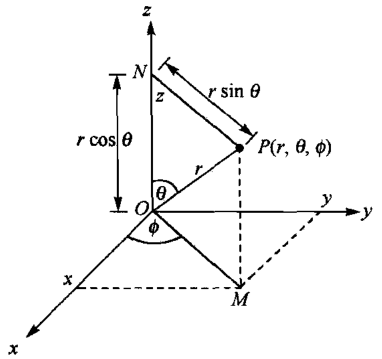


图 1-9　球坐标系中一点的投影

从图 1-9 很明显有

$$x=r\sin\theta\cos\phi \tag{1-20a}$$

$$y=r\sin\theta\cos\phi \tag{1-20b}$$

$$z=r\cos\phi \tag{1-20c}$$

从式(1-20)可以导出

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1-21a}$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{z}{r}\right) \tag{1-21b}$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1-21c}$$

1. 球坐标系单位矢量之间的关系

球坐标系中单位矢量之间的关系如下：

$$\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{a}_r=1,\quad \boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\theta=1,\quad \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\phi=1 \tag{1-22a}$$

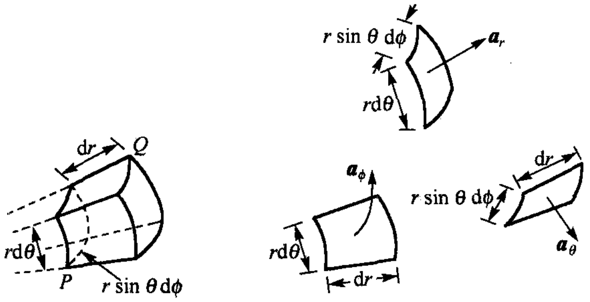
$$\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{a}_\theta=0,\quad \boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\phi=0,\quad \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_r=0 \tag{1-22b}$$

$$\boldsymbol{a}_r\times\boldsymbol{a}_\theta=\boldsymbol{a}_\phi,\quad \boldsymbol{a}_\theta\times\boldsymbol{a}_\phi=\boldsymbol{a}_r,\quad \boldsymbol{a}_\phi\times\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{a}_\theta \tag{1-22c}$$

2. 球坐标系的线、面、体微分元

球坐标系的体微分元由 r、θ 和 ϕ 分别增加 $\mathrm{d}r$、$\mathrm{d}\theta$ 和 $\mathrm{d}\phi$ 而得到（图 1-10(a)）

$$\mathrm{d}v=r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{1-23}$$



(a)体微分元　　(b)体微分元分解图

图 1-10　球坐标系中的体微分元

有向面微分，如图 1-10(b)所示，为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s_r &= r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_r \\
\mathrm{d}s_\theta &= r\mathrm{d}r \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\theta \\
\mathrm{d}s_\phi &= r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned} \tag{1-24}
$$

从 P 到 Q 的线微分元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_r + r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{1-25}$$

为了便于参考，在三种坐标系中长度、面积和体积微分元汇总于表 1-1。

表 1-1　直角、圆柱和球坐标系中的线、面和体微分元

微分元	坐标系		
	直角	圆柱	球
长度 $\mathrm{d}l$	$\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z$	$\mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho + \rho\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z$	$\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_r + r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi$
面积 ds	$\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_x + \mathrm{d}x\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_y + \mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_z$	$\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\rho + \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\phi + \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_z$	$r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_r + r\mathrm{d}r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\theta + r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\phi$
体积 dv	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$	$r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$

3. 球坐标与直角坐标的转换关系

从图 1-11 所示的投影关系，不难得到球坐标系中的三个单位矢量 $\boldsymbol{a}_r$、$\boldsymbol{a}_\theta$、$\boldsymbol{a}_\phi$ 与直角坐标系中的三个单位矢量之间的关系：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{a}_x = \sin\theta\cos\phi, \quad \boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{a}_y = \sin\theta\sin\phi, \quad \boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{a}_z = \cos\theta \\
&\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_x = \cos\theta\cos\phi, \quad \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_y = \cos\theta\sin\phi, \quad \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_z = -\sin\theta \\
&\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_x = -\sin\phi, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_y = \cos\phi, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_z = 0
\end{aligned} \tag{1-26a}
$$

这些方程可以写成矩阵形式：

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{a}_\theta \\ \boldsymbol{a}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{pmatrix} \tag{1-26b}
$$

假设矢量 $\boldsymbol{A}$ 在球坐标系中给出：$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{a}_r + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$，按式(1-26a)，把它投影到 x 轴上便得到它的 x 分量，即