锦囊妙解

创新导学专题

高中数学

复数、算[redacted]平面向量

丛书主编　司马文　曹瑞彬
丛书副主编　冯小秋　钟志健
本册主编　金尤国

品牌连续热销8年

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解

创新导学专题

高中数学

复数、算法初步与平面向量

丛书主编 司马文 曹瑞彬

丛书副主编 冯小秋

执行主编 江 海

本册主编 金尤国

编 者 万强华 孙志明 许学龙 曹建峰 毛金才 李庆春 周志祥 朱燕卫 金尤国 胡志彬 丁锁勤 钱 勇 吴志山 何福林 沈桂彬 李小慧 朱时来 王春和 周拥军 王新祝 李家亮 丁 勇 肖亚东 吴淑群 张季锋 李金光

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

图书在版编目（CIP）数据

锦囊妙解创新导学专题. 高中数学. 复数、算法初步与平面向量/司马文，曹瑞彬丛书主编；金尤国本册主编. —北京：机械工业出版社，2010.10（2011.1重印）
ISBN 978—7—111—32109—5

Ⅰ.①锦… Ⅱ.①司… ②曹… ③金… Ⅲ.①数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 193336 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：石晓芬　　　　责任编辑：贾　雪
责任印制：李　妍
北京诚信伟业印刷有限公司印刷

2011 年 1 月第 1 版第 2 次印刷
169mm×228mm · 10 印张 · 250 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-32109-5
定价：14.00 元

电话服务
社服务中心：(010) 88361066
销 售 一 部：(010) 68326294
销 售 二 部：(010) 88379649
读者服务部：(010) 68993821

网络服务
门户网：http：//www.cmpbook.com
教材网：http：//www.cmpedu.com

前言

锦囊妙解丛书面世多年，备受广大读者厚爱，在此深表感谢。为了对得起广大读者的信任，对得起自己的职业良心，我们密切关注课程改革的新动向，在原有基础上，精益求精，反复修订，使得锦囊妙解丛书与时俱进、永葆青春。目前奉献给读者的《锦囊妙解创新导学专题》丛书，力求凸显创新素质的培养，力求知识讲解创新、选择试题创新、剖析思路创新，从而力求让学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，全面提升学生的创新素质，在学习、应试中得心应手、应付裕如。

本丛书以每个知识点为讲解元素，结合"课标解读"、"知识清单"、"易错清单"、"点击高考"、"模拟演练"等栏目设计，突出教材中的重点和难点，并将高考例题的常考点、易错点进行横竖梳理，多侧面、多层次、全方位加以涵盖，使分散的知识点凝聚成团，形成纵横知识网络，有利于学生的记忆、理解、掌握、类比、拓展和迁移，并转化为实际解题能力。

本丛书取材广泛，视野开阔。吸取了众多参考书的长处及全国各地教学科研的新思路、新经验和新成果。选例新颖典型，难度贴近高考实际。讲解完备，就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然而细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解，从而达到举一反三、触类旁通的功效。

本丛书以"新课程标准"为纲，以"考试说明"与近年考卷中体现的高考命题思路为导向，起点低、落点准，重点难点诠释明了，高考关键热点突出，专题集中，能很好地培养学生思维的严谨性、解题的灵活性、表达的规范性。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。让学生掌握"捕鱼之术"，其实就是创新教育的主要目标。本丛书策划者、编写者以此为共识，精诚合作，千锤百炼，希望本丛书不但能帮助你学到知识，掌握知识，而且能掌握其学习方法，养成创新意识，增强创新能力，那将能让你终身受益。

司马文
曹瑞彬

目 录

第一章 复数

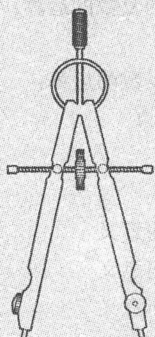
知识网络

实数 $\xrightarrow[\text{位 i}]{\text{虚数单}}$ 复数 $\xrightarrow{\text{描述}}$

- 数 $\xrightarrow{\text{复数集}}$
  - 分类
    - 实数
    - 虚数 $\longrightarrow$ 纯虚数
  - 表示法
    - 代数形式
    - 三角形式
  - 复数性质
    - 复数的相等
    - 复数的辐角
    - 共轭复数
    - 复数的模
  - 复数的运算
    - 代数形式表示的复数的运算：加、减、乘、除
    - 三角形表示的复数的运算：乘、除、乘方、开方
- 形 $\xrightarrow{\text{复平面}}$
  - 表示法
    - 点
    - 向量
  - 复数的运算
    - 加法运算的几何意义
    - 减法运算的几何意义
    - 乘法运算的几何意义
    - 除法运算的几何意义
    - n 次方根的几何意义
- 应用 $\longrightarrow$ 复数集中的方程

第一节 数系的扩充

课标解读



一、教学目标

1. 知识与技能：让学生了解复数并且能解决在实数范围内没办法解决的问题，从而把数系扩充.

2. 过程与方法：培养学生利用复数概念进行判断新鲜事物和辩证思维的能力.

3. 情感、态度与价值观：通过本节的学习，体会知识之间的联系，培养学生的理性思维和接受新事物的能力.

二、重点与难点

教学重点：理解复数的基本概念；理解复数相等的充要条件；了解复数的代数表示法及其几何意义.

教学难点：利用复数的概念和复数的相等解题.

知识清单

知识点 1

虚数单位 i

解方程的时候，如果遇到 $x^2+1=0$，在实数范围内没办法解决，因此必须把数系扩充. 引入 i 这个虚数单位，使得 $i^2=-1$，i 叫虚数单位，规定：

(1)$i^2=-1$；

(2)实数可以和它进行四则运算，原来的加乘运算律仍然成立.

例 1 判断题：-1 的平方根只有一个，即 $-i$.

【解析】考查虚数单位的概念.

【答案】错误，应该为 $\pm i$

点评 对新知识的概念掌握和理解，因为 $(\pm i)^2=-1$.

变题1 判断题：i 是方程 $x^4-1=0$ 的一个根.

【解析】根据虚数单位的定义 $i^2=-1$.

【答案】正确

变题2 判断题：虚数的平方不小于 0.

【解析】根据虚数单位的定义 $i^2=-1$ 解题，举反例.

【答案】错误

变题3 判断题：$\sqrt{2}i$ 是一个无理数.

【解析】$\sqrt{2}i$ 是虚数，不是实数，无理数属于实数范畴.

【答案】错误

知识点 2

复数的相关概念和分类

(1)形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的数叫复数，a 叫复数的实部，b 叫复数的虚部. 全体复数所成的集合叫做复数集，用字母 **C** 表示. 注意虚部是一个实数，即 i 的系数，而不是虚数部分.

【详释】虚数单位 i 的理解：

① i 的平方等于 -1，即 $\boxed{i^2=-1}$；

② 实数可以与 i 进行四则运算，进行四则运算时，原有加、乘运算律仍然成立；

③ i 与 -1 的关系：i 是 -1 的一个平方根，即 i 是方程 $x^2=-1$ 的一个根，方程 $x^2=-1$ 的另一个根是 $-i$；

④ i^n 的周期性：$\boxed{i^{4n}=1,i^{4n+1}=i,i^{4n+2}=-1,i^{4n+3}=-i,i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0,n\in\mathbf{N}^*}$.

(2)复数的分类：

对于复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，当且仅当 $b=0$ 时，复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 是实数 a；当 $b\neq0$ 时，复数 $z=a+bi$ 叫做虚数；当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时，$z=bi$ 叫做纯虚数；当且仅当 $a=b=0$ 时，z 是实数 0.

① 复数分类系统表：

$$复数\ z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})\begin{cases}当\_\_\_\_\_\_时,是实数\\ 当\_\_\_\_\_\_时,是虚数,\begin{cases}当\_\_\_\_\_\_时,是纯虚数\\ 当\_\_\_\_\_\_时,是非纯虚数\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}复数\ z=a+bi\\(a,b\in\mathbf{R})\end{array}\begin{cases}\xrightarrow{b=0}z\ 是实数\ a\begin{cases}\xrightarrow{a>0}正实数\\ \xrightarrow{a=0}实数\ 0\\ \xrightarrow{a<0}负实数\end{cases}\\ \xrightarrow{b\neq0}z\ 是虚数\begin{cases}\xrightarrow{a=0}纯虚数\ bi\\ \xrightarrow{a\neq0}非纯虚数的虚数\end{cases}\end{cases}$$

②复数集与其他数集之间的关系：$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

例 2 若复数 $(a^2-3a+2)+(a-1)i$ 是纯虚数，则实数 a 的值为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 1 或 2　　D. -1

【解析】$a^2-3a+2=0$ 得 $a=1$ 或 2，且 $a-1\neq0$，得 $a\neq1$，$\therefore a=2$.

【答案】B

点评 本题主要考查复数的概念，注意纯虚数一定要使$\boxed{\text{实部为 0 且虚部不为 0.}}$

变题1 设 a 是实数，且 $\frac{a}{1+i}+\frac{1+i}{2}$ 是实数，则 $a=$ ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

【解析】$\frac{a}{(1+i)}=\frac{1}{2}a(1-i)$，所以虚部为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a=0$，$a=1$，选 B.

【答案】B

变题2 复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的积是实数的充要条件是 ( )

A. $ad+bc=0$　　B. $ac+bd=0$　　C. $ac=bd$　　D. $ad=bc$

【解析】$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$，$ad+bc=0$.

【答案】A

变题3 如果 $z=a^2+a-2+(a^2-3a+2)i$ 为纯虚数，那么实数 a 的值为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. -2　　D. 1 或 -2

【解析】$a^2+a-2=0$，但 $a^2-3a+2\neq0$，解得 $a=-2$.

【答案】C

知识点 3

复数相等

如果两个复数的实部和虚部分别相等，那么我们就说这两个复数相等．这就是说，如果 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，那么 $a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c,b=d$.

特别地：$a+bi=0\Leftrightarrow a=b=0$.

【警示】 两个复数，如果不全是实数时，不能比较它们的大小．

提醒 两个复数可以比较大小吗？答：两个复数只有都是实数时才可以比较大小．$a+bi>c+di$ 只有 $b=d=0,a>c$ 时才成立．

例 3 已知 $\frac{m}{1+i}=1-ni$，其中 m,n 是实数，i 是虚数单位，则 $m+ni=$ （　　）

A. $1+2i$　　B. $1-2i$　　C. $2+i$　　D. $2-i$

【解析】由已知，得 $m=(1-ni)(1+i)=(1+n)+(1-n)i$，则 $\begin{cases}m=1+n\\0=1-n\end{cases}$，解得 $\begin{cases}n=1\\m=2\end{cases}$

【答案】C

点评 两个复数相等时，注意前提条件是 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$，即当 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$ 时，$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c,b=d$，但忽略条件后，则不能成立．因此解决复数相等问题时，先将复数变为 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的形式，也就是把复数的实部和虚部分离出来，再利用复数相等的充要条件化复数问题为实数问题．

变题1 若 $(a-2i)i=b-i$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，则 $a^2+b^2=$ （　　）

A. 0　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 5

【解析】根据复数相等的概念知，$a=-1,b=2$，$a^2+b^2=5$.

【答案】D

变题2 若复数 z 满足 $z=i(2-z)$，i 是虚数单位，则 $z=$__________.

【解析】可以通过设复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 得 $a=1,b=1$. 用复数的相等来解决问题．

【答案】$1+i$

变题3 已知 $0<a<2$，复数 z 的实部为 a，虚部为 1，则 $|z|$ 的取值范围是 （　　）

A. $(1,5)$　　B. $(1,3)$　　C. $(1,\sqrt{5})$　　D. $(1,\sqrt{3})$

【解析】$|z|=\sqrt{a^2+1}$，而 $0<a<2$，即 $1<a^2+1<5$，$\therefore 1<|z|<\sqrt{5}$.

【答案】C

例 4 已知复数 $z=(2+i)m^2-\frac{6m}{1-i}-2(1-i)$. 当实数 m 取什么值时，复数 z 是：(1)零；(2)虚数；(3)纯虚数；(4)复平面内第二、四象限角平分线上的点对应的复数．

【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 z 是(1)零 $\Leftrightarrow a=0,b=0$　(2)虚数 $\Leftrightarrow b\neq0$　(3)纯虚数 $\Leftrightarrow a=0$ 且 $b\neq0$　(4)复平面内第二、四象限角平分线上的点对应的复数 $\Leftrightarrow a=-b$.

【答案】(1) $z=(2+i)m^2-3m(1+i)-2(1-i)$

$=(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$.

当$\begin{cases}2m^2-3m-2=0\\m^2-3m+2=0\end{cases}$，即 $m=2$ 时，z 为零.

(2)当 $m^2-3m+2\neq0$，即 $m\neq2$ 且 $m\neq1$ 时，z 为虚数.

(3)当$\begin{cases}2m^2-3m-2=0\\m^2-3m+2\neq0\end{cases}$，即 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，z 为纯虚数.

(4)当 $2m^2-3m-2=-(m^2-3m+2)$，即 $m=0$ 或 $m=2$ 时，z 为复平面内第二、四象限角平分线上的点对应的复数.

点评 本题通过化简得复数的实部和虚部，再解不等式组，需要注意的是：一定要实部和虚部兼顾，不能只顾其一. 例如纯虚数时要实部为 0 且虚部必须不为 0，或者通过检验的方法.

变题1 已知关于 x,y 的方程组$\begin{cases}(2x-1)+\mathrm{i}=y-(3-y)\mathrm{i}\\(2x+ay)-(4x-y+b)\mathrm{i}=9-8\mathrm{i}\end{cases}$有实数解，求 a,b 的值.

【解析】先化简，得到复数的实部和虚部，再通过复数的相等给出方程组，从而求得 a,b 的值. 两个复数相等时，注意前提条件是 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$，即当 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$ 时，$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c,b=d$，但忽略条件后，则不能成立. 因此解决复数相等问题时，应先将复数变为 $a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$的形式.

【答案】$\begin{cases}(2x-1)+\mathrm{i}=y-(3-y)\mathrm{i}\\(2x+ay)-(4x-y+b)\mathrm{i}=9-8\mathrm{i}\end{cases}$，由第一个等式得$\begin{cases}2x-1=y\\1=-(3-y)\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\y=4\end{cases}$.

将上述结果代入第二个等式中得 $5+4a-(10-4+b)\mathrm{i}=9-8\mathrm{i}$，由两复数相等得

$\begin{cases}5+4a=9\\10-4+b=8\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$.

变题2 若复数 $z=1+\mathrm{i}$，求实数 a,b，使 $az+2b\bar{z}=(a+2z)^2$（其中 $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数）.

【解析】$z=a+b\mathrm{i}$ 与 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数. 通过复数的相等给出方程.

【答案】由 $z=1+\mathrm{i}$，可知 $\bar{z}=1-\mathrm{i}$，代入 $az+2b\bar{z}=(a+2z)^2$ 得：

$a(1+\mathrm{i})+2b(1-\mathrm{i})=[a+2(1+\mathrm{i})]^2$，即 $a+2b+(a-2b)\mathrm{i}=(a+2)^2-4+4(a+2)\mathrm{i}$.

则$\begin{cases}a+2b=(a+2)^2-4\\a-2b=4(a+2)\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-4\\b=2\end{cases}$，或$\begin{cases}a=-2.\\b=-1\end{cases}$

变题3 已知关于 x 的方程 $x^2+(1-2\mathrm{i})x+3m-\mathrm{i}=0$ 有实根，则实数 m 满足（　　）

A. $m\leqslant-\dfrac{1}{4}$　　B. $m\geqslant-\dfrac{1}{4}$　　C. $m=-\dfrac{1}{12}$　　D. $m=\dfrac{1}{12}$

【解析】此题不是实系数一元二次方程，所以不能用一元二次方程的求根公式求解，只能用复数的相等的知识解决问题，此题容易混淆和发生错误，请同学们注意.

方程左边的复数的实部是 x^2+x+3m，虚部是 $-1-2x$，$\therefore\begin{cases}x^2+x+3m=0\\-1-2x=0\end{cases}$. 解得 $m=\dfrac{1}{12}$.

【答案】D

知识点 4

(1)共轭复数：当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，叫做这两个复数互为共轭复数. 虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫做共轭虚数，即 $z=a+b\mathrm{i}$ 与 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数.

(2)复数的模：复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

例 5 设复数 z 满足 $|z|=2$，且 $(z-a)^2=a$，求实数 a 的值.

【解析】此题应考虑 a 的正负，若实数 $a\geqslant 0$，则 z 必为实数，若实数 $a<0$，则 z 必为虚数，所以需要讨论 a，当实数 $a<0$ 时，可以设复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，但会涉及 3 个未知数，难于解决，直接通过开方的方法借助于 $|z|=2$ 求解会比较方便.

【答案】(1)若实数 $a\geqslant 0$，则 z 必为实数，此时 $z=2$ 或 $z=-2$，

当 $z=2$ 时，$a^2-5a+4=0$，解得 $a_1=1$，$a_2=4$.

当 $z=-2$ 时，$a^2+3a+4=0$，此方程无实数解.

(2)若实数 $a<0$，则 z 必为虚数，且 $z=a\pm\sqrt{-a}\mathrm{i}$，

$\because |z|=2$，$\therefore a^2-a-4=0$，解得 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. 注意到 $a<0$，故有 $a_3=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$，

$\therefore$ 所求实数 a 的值为 1，4，$\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$.

点评 本题是复数的综合运用，呆板的设复数的方法会使得解题比较困难，3 个未知数两个方程难于解决，同学们要灵活运用本题中的方法.

变题1 设复数 z 满足 $|z|=1$，且 $(3+4\mathrm{i})\cdot z$ 是纯虚数，求 $\bar{z}$.

【解析】此题借助于复数的模考查复数是纯虚数这个概念，通过设复数用待定系数法解决复数的相等这个知识点. 也可以设 $(3+4\mathrm{i})\cdot z=b\mathrm{i}$，求出 z，然后再利用 $|z|=1$ 求出 b 的值，进而解得本题.

【答案】解法一：设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，由 $|z|=1$ 得 $\sqrt{a^2+b^2}=1$；

$(3+4\mathrm{i})\cdot z=(3+4\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})=3a-4b+(4a+3b)\mathrm{i}$ 是纯虚数，则 $3a-4b=0$.

$$\therefore \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=1\\ 3a-4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{4}{5}\\ b=\dfrac{3}{5}\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-\dfrac{4}{5}\\ b=-\dfrac{3}{5}\end{cases}，\therefore \bar{z}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}\text{ 或 }-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}.$$

解法二：设 $(3+4\mathrm{i})\cdot z=b\mathrm{i}$，$z=\dfrac{b\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\dfrac{b\mathrm{i}(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}=\dfrac{4b+3b\mathrm{i}}{25}$，$\left(\dfrac{4b}{25}\right)^2+\left(\dfrac{3b}{25}\right)^2=1$，

$b=\pm 5$，可得 $\bar{z}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ 或 $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$.

变题2 已知复数 z_1、z_2 满足 $10z_1^2+5z_2^2=2z_1z_2$，且 z_1+2z_2 为纯虚数，求证：$3z_1-z_2$ 为实数.

【解析】根据 $10z_1^2+5z_2^2=2z_1z_2$ 的形式通过因式分解凑出 z_1+2z_2 的形式来解题，如果设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，将出现 a,b,c,d 四个未知数，此题将变得难以解决，所以要根据题目灵活解题.

【答案】由 $10z_1^2+5z_2^2=2z_1z_2$，得 $10z_1^2+5z_2^2-2z_1z_2=0$. $\therefore (3z_1-z_2)^2+(z_1+2z_2)^2=0$.

又 $\because z_1+2z_2$ 为纯虚数，$\therefore$ 假设 $z_1+2z_2=b\mathrm{i}(b\in\mathbf{R},b\neq 0)$，

则 $(3z_1-z_2)^2=-(b\mathrm{i})^2=b^2$. $\therefore 3z_1-z_2=\pm|b|\in\mathbf{R}$. 故 $3z_1-z_2$ 为实数.

变题3 满足 $z+\dfrac{5}{z}$ 是实数，且 $z+3$ 的实部与虚部互为相反数的虚数 z 是否存在？若存在，求出虚数 z；若不存在，请说明理由.

【解析】设复数，运用题目的条件写出方程求出实部和虚部.

【答案】假设存在虚数 z，$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$，且 $b\neq0)$，则

$$\begin{cases}a+bi+\dfrac{5}{a+bi}\in\mathbf{R}\\a+3+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b-\dfrac{5b}{a^2+b^2}=0\\a+b=-3\end{cases}.$$

$\because b\neq0$，$\therefore\begin{cases}a^2+b^2=5\\a+b=-3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$.

$\therefore$ 存在虚数 $z_1=-1-2i$ 或 $z_2=-2-i$ 满足上述条件.

易错清单

易错点 1：

复数设为 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的形式，其中 $a,b\in\mathbf{R}$ 易被忽视.

例 1 已知 x 是实数，y 是纯虚数，满足 $(2x-1)+i=y-(3-y)i$，求 x 和 y 的值.

【解析】根据复数的设法，通常设为 $x+yi(x,y\in\mathbf{R})$ 的形式，而题目中 x 是实数，y 是纯虚数，所以容易错解为根据复数相等的充要条件得 $\begin{cases}2x-1=y\\y-3=1\end{cases}$，得到错误结论 $\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\y=4\end{cases}$.

【答案】设 $y=bi(b\in\mathbf{R})$，则由题意，有 $(2x-1)+i=bi-(3-bi)i$，

即 $(2x-1)+i=-b+(b-3)i$.

所以有 $\begin{cases}2x-1=-b\\1=b-3\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}\\b=4\end{cases}$，所以 $x=-\dfrac{3}{2}$，$y=4i$.

提醒 本题容易错误地理解两个复数的实部和虚部，没看到条件 y 是纯虚数，我们在设复数时要注意 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$.

易错点 2

解含虚数单位 i 的非实系数方程时，方程不能用求根公式解题，而是用复数的相等解题.

例 2 设关于 x 的方程 $x^2-(\tan\theta+i)x-(2+i)=0$ 有实根，求锐角 θ 及这个实根.

【解析】认为是关于 x 的一元二次方程用 Δ 求解，无法解决此题，因为它不是实系数一元二次方程.

【答案】利用复数的相等写出实部和虚部.

设实数根为 a，则 $a^2-(\tan\theta+i)a-(2+i)=0$，即 $a^2-a\tan\theta-2-(a+1)i=0$

$\because a,a\tan\theta\in\mathbf{R}$，$\therefore\begin{cases}a^2-a\tan\theta-2=0\\a+1=0\end{cases}$，$\therefore a=-1$ 且 $\tan\theta=1$，又 $\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

提醒 这种解法是解这类方程的基本方法，利用复数相等实现复数问题向实数问题的转化，体现了转化思想.

点击高考

1.(2008·湖北)设 z_1 是复数，$z_2=z_1-i\overline{z_1}$（其中$\overline{z_1}$ 表示 z_1 的共轭复数），已知 z_2 的实部是 -1，则 z_2 的虚部为________.

【点拨】利用设复数的方法和复数相等的知识解题，很简单.

【解析】设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则$\overline{z_1}=a-bi$，那么 $z_2=z_1-i\overline{z_1}=(a-b)+(b-a)i$，依题可得 $a-b=-1$，所以 z_2 的虚部为 1.

【答案】1

2.(2006·全国)如果复数$(m^2+i)(1+mi)$是实数，则实数 $m=$ （　　）

A. 1　　B. -1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $-\sqrt{2}$

【点拨】利用复数的基本概念解题.

【解析】$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，z 为实数，则 $b=0,a\neq0$. $(m^2+i)(1+mi)=m^2-m+(1+m^3)i$，得 $\begin{cases}m^2-m\neq0\\1+m^3=0\end{cases}$，得 $m=-1$.

【答案】B

3.(2006·四川)复数$(1-i)^3$ 的虚部为 （　　）

A. 3　　B. -3　　C. 2　　D. -2

【点拨】相当于实数中的$(x+y)^3$ 展开式.

【解析】$(1-i)^3=(1-i)^2(1-i)=-2i(1-i)=-2-2i$.

【答案】D

4.(2007·全国)设复数 z 满足$\dfrac{1+2i}{z}=i$，则 $z=$ （　　）

A. $-2+i$　　B. $-2-i$　　C. $2-i$　　D. $2+i$

【点拨】视 z 为未知数，解关于 z 的方程——是好招.

【解析】$z=\dfrac{1+2i}{i}=-i(1+2i)=2-i$.

【答案】C

5.(2008·山东)设 z 的共轭复数是$\overline{z}$，若 $z+\overline{z}=4$，$z\cdot\overline{z}=8$，则$\dfrac{\overline{z}}{z}$等于 （　　）

A. i　　B. $-i$　　C. ±1　　D. $\pm i$

【点拨】不可以通过直接计算求出复数 z，因此采用待定系数法.

【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，$\overline{z}=a-bi$，$\because z+\overline{z}=4$，$\therefore a=2$，$z\cdot\overline{z}=8$，$a^2+b^2=8$，$\therefore b=\pm2$；$\dfrac{\overline{z}}{z}=\dfrac{a^2-b^2-2abi}{a^2+b^2}=\dfrac{0-2abi}{8}$，所以$\dfrac{\overline{z}}{z}=\pm i$.

【答案】D

6.(2007·宁夏)设复数 z 满足关系：$z+|\overline{z}|=2+i$，那么 z 等于 （　　）

A. $-\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{3}{4}+i$　　C. $-\dfrac{3}{4}-i$　　D. $\dfrac{3}{4}-i$

【点拨】通过设复数的方法.

【解析】设 $z=a+bi$，由已知得 $a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+i$，$\begin{cases}a+\sqrt{a^2+b^2}=2\\b=1\end{cases}$，$\therefore a=\dfrac{3}{4}$，$b=1$，

第一章　复数

$\therefore z=\dfrac{3}{4}+i$.

【答案】 B

模拟演练

1. 方程 $x^2+4=0$ 的解是______________.

2. 若 $x,y\in\mathbf{R}$,则“$x=0$”是“$x+yi$ 为纯虚数”的____________条件.

3. i 是虚数单位,$\dfrac{2i^3}{1-i}=$ ( )

A. $1+i$　　B. $-1+i$　　C. $1-i$　　D. $-1-i$

4. 若 z 是实系数方程 $x^2+2x+p=0$ 的一个虚根,且 $|z|=2$,则 $p=$__________.

5. 化简 $\dfrac{2+4i}{(1+i)^2}$ 的结果是 ( )

A. $2+i$　　B. $-2+i$　　C. $2-i$　　D. $-2-i$

6. $7+24i$ 的平方根是______.

7. 复数 $z=a+bi$,$a,b\in\mathbf{R}$,且 $b\neq0$,若 z^2-4bz 是实数,则有序实数对 (a,b) 可以是____________________.(写出一个有序实数对即可)

8. 已知关于 t 的方程 $t^2-2t+a=1(a\in\mathbf{R})$ 的一个根为 $1+\sqrt{3}i$.

(1)求方程的另一个根及实数 a 的值;

(2)是否存在实数 m,使对 $x\in\mathbf{R}$ 时,不等式 $\log_a(x^2+a)\geqslant m^2-2km+2k$ 对 $k\in[-1,2]$ 恒成立?若存在,试求出实数 m 的取值范围;若不存在,请说明理由.

9. 设复数 $z=(a^2-4\sin^2\theta)+(1+2\cos\theta)i$,其中 i 为虚数单位,$a$ 为实数,$\theta\in(0,\pi)$. 若 z 是方程 $x^2-2x+5=0$ 的一个根,且 z 在复平面内所对应的点在第一象限,求 θ 与 a 的值.

答案

1. $\pm2i$　根据虚数单位 i 的平方为 -1 可知,$x=\pm2i$.

2. 必要不充分

3. C　$\dfrac{2i^3}{1-i}=\dfrac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2-2i}{2}=1-i$,选 C.

4. 4　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则方程的另一个根为 $\bar{z}=a-bi$,且 $|z|=2\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=2$,由韦达定理,得:$z+\bar{z}=2a=-2$,则 $a=-1$,$\therefore b=\pm\sqrt{3}$,所以 $p=z\cdot\bar{z}=(-1+\sqrt{3}i)\cdot(-1-\sqrt{3}i)=4$.

5. C　$\dfrac{2+4i}{(1+i)^2}=\dfrac{2+4i}{2i}=\dfrac{(1+2i)\times i}{i\times i}=2-i$,选 C.

6. $\pm(4+3i)$　设 $(a+bi)^2=7+24i$,其中 $a,b\in\mathbf{R}$,所以 $\begin{cases}a^2-b^2=7\\2ab=24\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-4\\b=-3\end{cases}$,故 $7+24i$ 的平方根是 $\pm(4+3i)$.

7. 答案不唯一. 如 $(2,1)$.

8. (1)另一根为 $1-\sqrt{3}i$,$\therefore a=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=4$.

(2)设存在实数 m 满足条件,不等式为 $m^2-2km+2k\leqslant\log_4(x^2+4)$ 的最小值为 1,

$\therefore$ $m^2-2km+2k\leqslant 1$ 对 $k\in[-1,2]$恒成立，即 $2(1-m)k+m^2-1\leqslant 0$ 对 $k\in[-1,2]$恒成立，

设 $g(k)=2(1-m)k+m^2-1$，

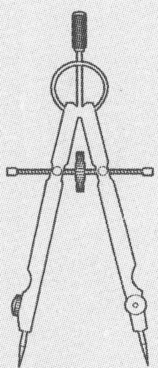
则 $\begin{cases} g(-1)=m^2+2m-3\leqslant 0 \\ g(2)=m^2-4m+3\leqslant 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} -3\leqslant m\leqslant 1 \\ 1\leqslant m\leqslant 3 \end{cases}$，$\therefore$ $m=1$，因此存在 $m=1$ 满足条件.

9. 方程 $x^2-2x+5=0$ 的根为 $x=1\pm 2\mathrm{i}$，因为 z 在复平面内所对应的点在第一象限，所以 $z=1+2\mathrm{i}$，所以 $\begin{cases} a^2-4\sin^2\theta=1 \\ 1+2\cos\theta=2 \end{cases}$，解得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，因为 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $a^2=1+4\sin^2\theta=1+4\times\dfrac{3}{4}=4$，$a=\pm 2$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$a=\pm 2$.

第二节 复数的四则运算

课标解读



一、教学目标

1. 知识与技能：理解并掌握复数的代数形式的加、减、乘法与除法运算法则，深刻理解除法运算是乘法运算的逆运算.

2. 过程与方法：理解并掌握复数的四则运算的规律，并理解除法运算实质是分母实数化类问题.

3. 情感态度与价值观：通过复数的四则运算培养学生的思维能力和运算能力，体现学生的自主学习和信心.

二、重点与难点

教学重点：复数代数形式的除法运算.

教学难点：对复数除法法则的运用.