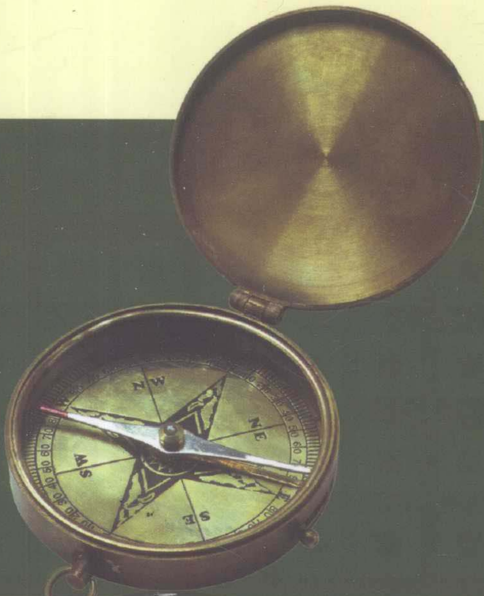
◎经济管理研究丛书◎

RESEARCH ON STOCHASTIC ENDOGENOUS ECONOMIC GROWTH AND FISCAL POLICY

不确定内生经济增长与财政政策研究



王海军 著
梁治安 审

上海财经大学出版社

经济管理研究丛书
上海财经大学“211工程”三期重点学科建设项目资助

不确定内生经济增长与财政政策研究

Research on Stochastic Endogenous
Economic Growth and Fiscal Policy

王海军　著
梁治安　审

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

不确定内生经济增长与财政政策研究/王海军著,梁治安审.一上海:上海财经大学出版社,2010.10
(经济管理研究丛书)
ISBN 978-7-5642-0840-0/F·0840

Ⅰ.①不… Ⅱ.①王…②梁… Ⅲ.①经济增长-关系-财政政策-研究 Ⅳ.①F061.2 ②F810

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 147988 号

□ 责任编辑 张 健
□ 封面设计 游 麒

BUQUEDING NEISHENG JINGJI ZENGZHANG YU CAIZHENG ZHENGCE YANJIU
不确定内生经济增长与财政政策研究

王海军 著
梁治安 审

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路321号乙 邮编 200434)
网 址:http://www.sutep.com
电子邮箱:webmaster @ sutep.com
全国新华书店经销
同济大学印刷厂印刷
宝山葑村书刊装订厂装订
2010年10月第1版 2010年10月第1次印刷

710mm×960mm 1/16 7印张(插页:1) 145千字
定价:20.00元

前　言

由美国次贷危机引发的国际金融危机导致了全球经济的大衰退，我国实体经济受到影响，也出现了下滑迹象。面对国内外诸多冲击，通过什么途径、什么方式保持经济的持续增长，是我国政府需要解决的头等大事。Romer、Barro 等人发展的内生增长理论为政府干预经济增长提供了理论依据，财政政策显示了其在经济增长中的作用。用什么样的财政政策工具干预经济，如何优化财政支出结构、深化财政体制改革以及推进税制改革，是当前我国经济中的重大问题。因此，不确定条件下经济增长与财政政策的研究是当前重要的理论课题，而目前我国政府采取积极的财政政策防止经济增长减速这一事实，也证明了这一课题的重要性。

在经济现象的建模、分析和预测中，研究人员越来越重视随机方法。计量经济学方法、随机差分方程方法和离散时间随机控制方法等在经济文献中已大量应用，而连续时间随机分析方法在经济学中的应用却十分稀少，虽然它的使用受到很大的限制，但其结果却更具透彻性和典型性。本书在基准连续时间随机最优化方法的基础上提出了伪双状态变量法、附加效用值函数法和随机 Hamilton 函数法，以此建立具有外部性的随机增长模型并求解，分析财政政策的增长效应与福利效应，探讨最优的财政政策结构。

本书旨在建立经济理论研究的坐标，为现实经济的研究提供一个理论框架，进一步的实证研究可在本书模型的基础上拓展而得。

目　录

第一章 引 论

1. 现代经济增长理论简介

半个多世纪以来，现代经济增长理论经历了由外生增长到内生增长的巨大转变。20 世纪 40 年代末，Harrod 和 Domar 将凯恩斯的国民收入决定理论动态化和长期化，提出以资本积累为增长源泉的内生增长理论的雏形——“Harrod-Domar 增长模型”，由此奠定了现代经济增长理论的基本框架，带来了动态经济理论的复兴。虽然 Harrod-Domar 模型重新唤起了人们对长期增长的兴趣，但其“刀锋式平衡增长”的致命缺陷限制了其进一步的发展。20 世纪 50 年代，Solow(1956)和 Swan(1956)为了克服 Harrod-Domar 模型的“刀锋式平衡增长”缺陷，提出了 Solow-Swan 模型，他们认为:通过市场来调整生产中的资本需求和劳动需求，可以实现充分就业的平衡增长。20 世纪 60 年代，Cass(1965)和 Koopmans(1965)把 Ramsey(1928)的消费者最优分析引入 Solow-Swan 模型，建立了最优增长模型，称为 Ramsey-Cass-Koopmans 模型，也称最优增长理论。整个 20 世纪五六十年代，以 Solow-Swan 模型和 Ramsey-Cass-Koopmans 模型为代表的、以外生技术进步为增长源泉的新古典增长理论占据了经济增长理论的前沿。新古典增长理论认为经济增长只能由人口增长率和技术进步率外生决定，因而无法解释经济长期的持续增长，与现实经济不符。此后，经济学家虽然对经济增长理论不满意，但也没有更好的分析工具作进一步的探讨，经济增长理论陷入了沉寂。

20 世纪 80 年代中期以后，以 Romer(1986)和 Lucas(1988)为代表的经济学家用外部性、收益递增等概念和相应新方法探讨了内生技术进步与经济增长的关系，认为内生的技术进步是经济增长的源泉，由此开辟了内生增长理论研究的先河，经济增长理论再度引起人们的关注。内生增长理论又称新增长理论，它强调经济增长是经济体系内部力量作用的结果，经济增长的根本原因是内生的技术进步，知识外溢、边干边学、人力资本投资和研究与开发等模型内部行为是克服物质资本收益递减规律和

影响长期经济增长的重要因素，这在当代知识经济背景下具有很强的现实意义。

内生增长理论认为各国政府实施的财政政策、产业政策和贸易政策对一国的长期增长具有重要影响，经济政策的不同会导致各国经济增长率之间存在广泛的差异，这就为政府干预经济提供了理论依据，它对世界经济，尤其是发展中国家经济产生了重要影响。

2. 财政政策简介

在现代国家中，政府干预宏观经济运行起着特殊而重要的作用。在市场经济条件下，政府一般不直接参与商业经营，而是通过产业政策、财政政策和货币政策等来实现对经济的宏观调控。其中，财政政策是政府干预经济、实现经济政策目标最常用的政策手段。政府通过调整其购买支出、转移支付、税收和公债等财政政策工具来影响总需求、经济运行和经济增长，从而影响资源配置的效率和经济福利，实现经济的宏观调控目标。政府常用的财政政策工具主要有：

(1)政府购买支出。政府购买支出是决定国民收入大小的主要因素之一，可划分为生产性支出和消费性支出。生产性支出是政府用于公共投资的支出，直接影响到社会总供给和经济持续增长。在私人资本投入不足时，政府可提高生产性支出水平拉动经济增长；在经济过热时，政府可降低生产性支出水平抑制过度投资。消费性支出是政府用于进行日常行政事务活动所需商品和劳务的支出，直接关系到社会总需求水平。在经济衰退时政府可提高消费性支出水平，增加社会总需求水平，以同衰退作斗争；在经济过热时又可减少消费性支出水平，降低社会总需求，以此来抑制通货膨胀。因此，调整政府购买支出是强有力的财政政策工具。

(2)政府转移支付。政府转移支付是政府调整收入分配的重要手段，政府单方面把部分收入的所有权无偿转移给部分消费者，其主要形式是社会保障和财政补贴。转移支付作为一种再分配手段，对社会总供求、社会总储蓄，以及经济增长具有间接的影响。

(3)税收。税收作为政府收入手段，既是国家财政收入的主要来源，也是国家实施财政政策的重要手段。根据税收对经济增长的影响，可将其划分为扭曲性税收和非扭曲性税收。扭曲性税收一般包括资本税和投资补贴，而非扭曲性税收一般包括劳动税、消费税和一次性总量税等。扭曲性税收直接影响投资进而影响经济增长，非扭曲性税收影响社会总需求，对经济增长有间接影响。

(4)公债。公债是政府财政收入的又一组成部分，也是一种有效的财政政策工具。公债的发行，既可以弥补财政赤字，又可以影响货币的供求，从而调节社会总需求水平，进而对经济产生扩张或抑制效应。

3. 不确定内生经济增长与财政政策研究现状

长期以来，大部分公共经济学家一直将注意力集中在税收理论和实践的研究上，

忽视了对政府支出的研究,直到 Samulson(1954)对公共产品的分析才使得政府支出的研究进入财政学的正室。20 世纪 80 年代,内生增长理论对内生技术的重新解释使政府获得了与厂商、个人同等的分析地位,充分肯定了政府在促进经济长期增长中的积极作用,财政政策再度引起了经济学者的重视。

在传统的确定性经济环境下,Barro(1990)首先在内生增长模型中引入政府支出,证明财政政策工具可为经济的长期稳定增长提供保障机制。Barro 和 Sala-i-Martin(1992)、Glomm 和 Ravikumar(1994,1997)等进一步研究了政府支出与经济增长的关系。

由于现实经济的复杂性、不确定性及测量误差的存在,人们对确定性经济系统越来越不满意,随机模型已成为当今经济学发展的潮流,不确定条件下财政政策的研究也随之兴盛。不确定内生增长模型中税收政策的首次分析是由 Eaton(1981)完成的,进一步的探讨由 Crosetti(1991)完成,更加深入的财政政策研究包括 Zhu(1992)、Grinols 和 Turnovsky(1993)、Turnovsky(1993b,1995,1996c,1996d)、Smith(1996a)等。推广到开放经济,不确定内生增长模型中的财政政策研究包括 Turnovsky(1996b)、Asea 和 Turnovsky(1998)等。

以上财政政策的研究都是在完全竞争市场的假设下进行的。如果市场失灵,特别是存在外部性,分权经济与社会计划经济将不再具有李嘉图等价性。由于个体没有意识到外部性的存在,个体决策的分权经济存在效率损失,因而不是 Pereto 最优的,由此产生的市场扭曲需要政府采取相应的财政政策来矫正。存在外部性条件下,不确定经济环境中财政政策的研究包括 Crosetti(1997)、Clemens 和 Soretz(1997,2003,2004)、Ott(2001,2002)、Kenc(2004)、Turnovsky(1997a,1999a,1999b,2000a,2003,2006)等。

就分析工具而言,包含外部性的确定性经济模型通常可用最优控制理论求解,但包含外部性的随机经济模型却没有相应的最优控制方法。一般情况下,随机经济模型是由随机动态规划方法处理的,但如果模型中含有外部性,常用的随机动态规划方法存在很大的不足,通常表现为间接效用函数没有显现外部性的作用,如 Clemens 和 Soretz(2004)等,这就需要对传统的随机动态规划方法加以改进。

在传统连续时间随机分析方法的基础上,Turnovsky(1999a,1999b,2000a)提出了伪双状态变量法(方法名称由本书作者命名),分析了不确定条件下的财政政策。伪双状态变量法的特点是:初始决策时随机最优化问题是双状态变量的,达到稳态均衡时两状态变量重合,外生变量内生化,等同于单状态变量的随机最优化问题。这种方法是目前应用最多的。此外,Turnovsky(2003)还提出了附加效用值函数法(方法名称由本书作者命名),其特点是将效用函数分离:一部分为个体意识到的效用,另一部分为个体没有意识到、由外部性产生的附加效用,均衡时外部效用内生化。Wang、Hu 和 Zhang(2005)利用这种方法研究了非期望效用下由生产性政府支出产生外部

性的随机内生增长模型，分析了最优的财政政策。与确定性模型适用的最优控制理论相对应，Clemens(2003)应用随机控制理论，提出了随机 Hamilton 函数法，其优点是避开了纷繁复杂的值函数具体形式，使得包含外部性的随机模型可以和确定性模型一样处理。周少波和胡适耕(2004)应用这种方法分析了随机 learning-by-doing 经济增长模型中的财政政策问题。

目前，随机经济系统均衡的存在性和稳定性仍未得到很好的解决，连续时间随机最优增长的研究还处于探索阶段，不确定内生增长理论的财政政策研究也远未完善。本书的目的是进一步完善随机财政政策理论，以期对我国公共产品理论和公共财政政策的研究和实践提供一些有益的帮助。

4. 本书主要内容

本书利用伪双状态变量法、附加效用值函数法和随机 Hamilton 函数法研究具有外部性的连续时间随机内生增长模型，分析财政政策的增长效应与福利效应，寻求最优的财政政策。其内容如下：

第二章介绍基本的随机增长模型。第一节介绍随机 AK 模型，给出常用的随机动态规划方法，提出一般情形下的随机 Hamilton 函数法。第二节研究包含外部性的随机增长模型，给出伪双状态变量法、附加效用值函数法和随机 Hamilton 函数法的基本解法。

第三章将政府支出引入效用函数，研究政府支出的消费外部性。第一节将政府债券包含在模型中，在政府支出为纯公共品情形下研究产出波动和财政政策对消费倾向、经济增长率、个体福利和资产组合选择的影响以及均衡资产定价，证明消费税不但是增长中性的，而且是福利中性的，资本和债券的风险关系取决于政府预算目标。第二节在政府支出具有相对拥挤性的条件下研究最优的政府部门规模以及政府支出的变动对经济增长和福利的影响，讨论最优税收政策，分析各种税收的效应及政府支出的融资政策，证明在政府支出相对拥挤的条件下，长期资本收入税为零的 Chamley-Judd 最优税收规则不再适用。第三节研究小型开放经济中的消费性政府支出模型，探讨经济系统的稳定性问题，寻找最优的财政政策，与封闭经济作比较。

第四章把政府支出引入生产函数，研究政府支出的生产外部性。第一节研究具有相对拥挤性的生产性政府支出模型，分析财政政策的增长效应和福利效应，讨论最优的财政政策，证明增长最大化政府支出政策和福利最大化政府支出政策不一定能同时达到最优，同样 Chamley-Judd 最优税收规则也不适用。第二节将跨时替代和风险厌恶分离的 Epstein-Zin 非期望效用函数引入随机内生增长模型，考虑跨时替代弹性和风险厌恶程度对经济系统的影响，证明增长最大化政府支出政策和福利最大化政府支出政策能否同时达到最优取决于跨时替代弹性，指出资本收入风险和劳动收入风险在个体跨时决策、经济增长和最优税收政策的制定中起主要决定作用。第三

节研究小型开放经济中的生产性政府支出模型，考察财政政策效应，寻求最优税收政策，与封闭经济作比较。

第五章引入政府补贴，研究政府转移支付的增长效应与福利效应。第一节研究收入补贴由消费税和债券融资的情形，分析以收入补贴为主的财政政策的增长效应和福利效应及其对资产组合选择和消费倾向的影响，探讨最优的财政政策。第二节研究财富补贴由资本收入税、劳动收入税和债券融资的情形，分析以财富补贴为主的财政政策的增长效应和福利效应及其对资产组合选择和消费倾向的影响，探讨最优的财政政策。

本书主要符号：

$Y(t)$，$y(t)$：t 时刻的总产出和个体产出；

$K(t)$，$k(t)$：t 时刻的总资本存量和个体资本存量；

$L(t)$，$l(t)$：t 时刻的总劳动力供给和个体劳动力供给；

$C(t)$，$c(t)$：t 时刻的总消费量和个体消费量。

本书模型约定：

(1)经济体由完全相同的个体组成，其人口数为[0,1]上的连续统，因而平均变量与总体变量一致；

(2)家庭与生产部门合并，每个个体既是生产者，又是消费者；

(3)资本无调整成本；

(4)有关变量符号约定大写字母代表总体变量，小写字母代表个体变量。

第二章　基本随机增长模型

本章介绍基本随机增长模型。第一节介绍随机 AK 模型，给出求解基本随机模型的随机动态规划法和随机 Hamilton 函数法；第二节介绍包含消费外部性和生产外部性的随机增长模型，给出求解具有外部性的随机经济模型的伪双状态变量法、附加效用值函数法和随机 Hamilton 函数法。

第一节　随机 AK 模型

假设代表性个体产出 $y(t)$ 的随机扰动与其产出的平均水平成比例，$(t,t+\mathrm{d}t)$ 期内的个体产出流量：

$$\mathrm{d}y(t)=\alpha k(t)(\mathrm{d}t+\mathrm{d}\mu) \tag{2.1.1}$$

其中 α 是生产技术常数且 $\alpha>0$；$\mathrm{d}\mu$ 代表生产力冲击，是方差为 $\sigma_\mu^2\mathrm{d}t$ 的布朗运动增量。

个体从私人消费 $c(t)$ 中获得效用，选取常相对风险厌恶（CRRA）效用函数，代表性个体选择自己的消费路径最大化一生的期望效用 U：

$$U\equiv E_0\int_0^\infty \frac{1}{\gamma}c(t)^\gamma e^{-\rho t}\mathrm{d}t,\gamma<1,\rho>0 \tag{2.1.2}$$

约束条件为随机资本积累方程：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}k&=(\alpha k-c)\mathrm{d}t+\alpha k\mathrm{d}\mu\\&=k(\varphi\mathrm{d}t+\mathrm{d}\tilde{\omega})\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

其中均值经济增长率 $\varphi=E[\mathrm{d}k]/k\mathrm{d}t$，经济增长波动率 $\mathrm{d}\tilde{\omega}=\mathrm{d}k/k-E[\mathrm{d}k/k]$，经济增长率的波动方差 $\sigma_{\tilde{\omega}}^2=\mathrm{Var}(\mathrm{d}k/k)/\mathrm{d}t$。

综上，随机 AK 模型可总结如下：

$$\begin{cases}\max\limits_{c>0}E_0\int_0^\infty \frac{1}{\gamma}c^\gamma e^{-\rho t}\mathrm{d}t\\ \text{s. t. } \mathrm{d}k=(\alpha k-c)\mathrm{d}t+\alpha k\mathrm{d}\mu\\ \qquad \text{初始资本存量 } k_0 \text{ 给定}\end{cases} \tag{2.1.4}$$

1. 随机动态规划法

定理 2.1.1　代表性个体随机优化问题的 Bellman 方程为：

$$\rho J=\max_{c>0}\left\{\frac{1}{\gamma}c^{\gamma}+\left(\alpha-\frac{c}{k}\right)kJ_{k}+\frac{1}{2}\alpha^{2}\sigma_{\mu}^{2}k^{2}J_{kk}\right\} \tag{2.1.5}$$

一阶必要条件为：

$$c^{\gamma-1}=J_{k} \tag{2.1.6}$$

$$\rho J_{k}=\alpha J_{k}+\left[\left(\alpha-\frac{c}{k}\right)+\alpha^{2}\sigma_{\mu}^{2}\right]kJ_{kk}+\frac{1}{2}\alpha^{2}\sigma_{\mu}^{2}k^{2}J_{kkk} \tag{2.1.7}$$

其中间接效用函数：

$$J[k(t)]=\max_{c>0}E_{t}\int_{t}^{\infty}\frac{1}{\gamma}c(s)^{\gamma}e^{-\rho(s-t)}\mathrm{d}s \tag{2.1.8}$$

J_{k}，J_{kk}和 J_{kkk}是 J 关于 k 的导数。横截性条件为：

$$\lim_{t\to\infty}E\{J[k(t)]e^{-\rho t}\}=0 \tag{2.1.9}$$

证明　(1)定义 t 时刻的值函数

$$I[k(t),t]=\max_{c>0}E_{t}\int_{t}^{\infty}\frac{1}{\gamma}c(t)^{\gamma}e^{-\rho s}\mathrm{d}s$$

则分开上式的积分有：

$$\begin{aligned}I[k(t),t]&=\max_{c>0}E_{t}\int_{t}^{t+\mathrm{d}t}\frac{1}{\gamma}c(t)^{\gamma}e^{-\rho s}\mathrm{d}s+E_{t}\{I[k(t+\mathrm{d}t),t+\mathrm{d}t]\}\\&=\max_{c>0}E_{t}\left[\frac{1}{\gamma}c(\bar{t})^{\gamma}e^{-\rho\bar{t}}\right]\mathrm{d}t+E_{t}\{I[k(t+\mathrm{d}t),t+\mathrm{d}t]\}\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

其中 $\bar{t}\in(t,t+\mathrm{d}t)$。因 $\mathrm{d}t\to0$ 时 $\bar{t}\to t$ 且

$$E_{t}\left[\frac{1}{\gamma}c(\bar{t})^{\gamma}e^{-\rho\bar{t}}\right]\mathrm{d}t=E_{t}\left[\frac{1}{\gamma}c(t)^{\gamma}e^{-\rho t}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{\gamma}c(t)^{\gamma}e^{-\rho t}\mathrm{d}t$$

$$E_{t}\{I[k(t+\mathrm{d}t),t+\mathrm{d}t]\}=E_{t}\{I[k(t),t]\}+E_{t}\mathrm{d}I=I[k(t),t]+E_{t}\mathrm{d}I$$

故由方程(2.1.10)得：

$$0=\max_{c>0}\left\{\frac{1}{\gamma}c^{\gamma}e^{-\rho t}\mathrm{d}t+E_{t}\mathrm{d}I\right\}$$

两边同时除以 $\mathrm{d}t$ 得：

$$0=\max_{c>0}\left\{\frac{1}{\gamma}c^{\gamma}e^{-\rho t}+\frac{E_{t}\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right\} \tag{2.1.11}$$

由 Itô 引理

$$E\mathrm{d}I=I_{t}\mathrm{d}t+I_{k}E[\mathrm{d}k]+\frac{1}{2}I_{kk}E[\mathrm{d}k]^{2} \tag{2.1.12}$$

代入(2.1.11)式得：

$$0=\max_{c>0}\left\{\frac{1}{\gamma}c^{\gamma}e^{-\rho t}+I_{t}+I_{k}\frac{E[\mathrm{d}k]}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}I_{kk}\frac{E[\mathrm{d}k]^{2}}{\mathrm{d}t}\right\} \tag{2.1.13}$$

定义 $J[k(t),t]=e^{\rho t}I[k(t),t]$，则有：

$$J[k(t),t]=\max_{c>0}E_t\int_t^{\infty}\frac{1}{\gamma}c^{\gamma}e^{-\rho(s-t)}\mathrm{d}s=\max_{c>0}E_0\int_0^{\infty}\frac{1}{\gamma}c^{\gamma}e^{-\rho v}\mathrm{d}v$$

显然，$J[k(t),t]$不显含时间 t，可记 $J[k(t),t]=J[k(t)]$。将 $I[k(t),t]=e^{-\rho t}J[k(t)]$代入(2.1.13)式并消去 $e^{-\rho t}$ 可得 Bellman 方程：

$$\rho J=\max_{c>0}\left\{\frac{1}{\gamma}c^{\gamma}+J_k\frac{E[\mathrm{d}k]}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}J_{kk}\frac{E[\mathrm{d}k]^2}{\mathrm{d}t}\right\} \tag{2.1.14}$$

再将(2.1.3)式代入即可得定理所示的 Bellman 方程(2.1.5)。

(2)代表性个体最优化问题是选择 c 最大化如下 Lagrangean 表达式：

$$L=\frac{1}{\gamma}c^{\gamma}-\rho J+\left(\alpha-\frac{c}{k}\right)kJ_k+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_{\mu}^2k^2J_{kk} \tag{2.1.15}$$

对此表达式关于 c 求导得一阶条件(2.1.6)。Bellman 方程(2.1.5)关于 k 取导数得：

$$\rho J_k=c^{\gamma-1}c'_k+(\alpha-c_k)J_k+\left[\left(\alpha-\frac{c}{k}\right)+\alpha^2\sigma_{\mu}^2\right]kJ_{kk}+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_{\mu}^2k^2J_{kkk}$$

将一阶条件(2.1.6)代入得与 Bellman 方程等价的包络条件(2.1.7)。

(3)Lagrangian 表达式(2.1.15)关于 c 的二阶导数$(\gamma-1)c^{\gamma-2}<0$，最优化问题的解存在且唯一。为了保证个体终生期望效用有界，要求横截性条件：

$$\lim_{t\to\infty}E\{I[k(t),t]\}=\lim_{t\to\infty}E\{J[k(t)]e^{-\rho t}\}=0$$

成立。

定理 2.1.2 分权经济的宏观经济均衡为如下随机增长路径：

$$\frac{\mathrm{d}k}{k}=\varphi\mathrm{d}t+\mathrm{d}\tilde{\omega} \tag{2.1.16}$$

其中经济增长率的均值部分 φ 和随机部分 $\mathrm{d}\tilde{\omega}$ 分别为：

$$\varphi=\frac{\alpha-\rho}{1-\gamma}-\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\sigma_{\mu}^2,\mathrm{d}\tilde{\omega}=\alpha\mathrm{d}\mu \tag{2.1.17}$$

消费—财富比和值函数分别为：

$$\frac{c}{k}=\frac{\rho-\gamma\alpha}{1-\gamma}+\frac{1}{2}\gamma\sigma^2\sigma_{\mu}^2,J(k)=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{c}{k}\right)^{\gamma-1}k^{\gamma} \tag{2.1.18}$$

横截性条件成立等价于$\frac{c}{k}>0$。

证明 (1)为解随机 Bellman 方程(2.1.5)，我们提出如下形式的值函数：

$$J(k)=ak^{\gamma}$$

其中，a 是待定常数。由一阶条件(2.1.6)得：

$$a=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{c}{k}\right)^{\gamma-1}$$

由 Bellman 方程(2.1.5)可得均衡时的消费—财富比

$$\frac{c}{k}=\frac{\rho-\gamma\alpha}{1-\gamma}+\frac{1}{2}\gamma\sigma_{\tilde{\omega}}^2,\sigma_{\tilde{\omega}}^2=\alpha^2\sigma_{\mu}^2$$

由一阶最优性条件(2.1.7)所得 c/k 的表达式和上式相同,这就证明了值函数的正确性。均值经济增长率

$$\varphi=\alpha-\frac{c}{k}=\frac{\alpha-\rho}{1-\gamma}-\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\sigma_\mu^2$$

值函数

$$J(k)=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{c}{k}\right)^{\gamma-1}k^\gamma$$

(2)下面考虑横截性条件。在均衡增长路径上,资本的积累路径为:

$$k(t)=k_0\exp\left[\left(\varphi-\frac{1}{2}\sigma_{\tilde{\omega}}^2\right)t+\tilde{\omega}(t)-\tilde{\omega}(0)\right]$$

因此

$$E\{J[k(t)]e^{-\rho t}\}=k_0^\gamma\exp\left\{\gamma\left[\varphi-\frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_{\tilde{\omega}}^2\right]-\rho\right\}t$$

横截性条件(2.1.9)成立,当且仅当

$$\gamma\left[\varphi-\frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_{\tilde{\omega}}^2\right]-\rho<0$$

等价于 $c/k>0$,这正是 Merton(1969)所揭示的。

2. 随机 Hamilton 函数法

定理2.1.3　定义流动值随机 Hamilton 函数

$$H(c,\lambda,\lambda_k)=\frac{1}{\gamma}c^\gamma+\lambda(\alpha k-c)+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_\mu^2k^2\lambda_k \tag{2.1.19}$$

其中 λ,λ_k 为随机 Hamilton 乘子,λ 和 λ_k 具有关系:$\lambda_k=\frac{\partial\lambda}{\partial k}$。一阶最优性条件为

$$\frac{\partial H}{\partial c}=c^{\gamma-1}-\lambda=0 \tag{2.1.20}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k}=\lambda\alpha+\alpha^2\sigma_\mu^2k\lambda_k=\rho\lambda-\frac{E\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \tag{2.1.21}$$

横截性条件为

$$\lim_{t\to\infty}E[H(t)e^{-\rho t}]=0 \tag{2.1.22}$$

证明　由定理 2.1.1,定义值函数

$$J[k(t)]=\max_{c>0}E_t\int_t^\infty\frac{1}{\gamma}c(s)^\gamma e^{-\rho(s-t)}\mathrm{d}s$$

代表性个体决策问题的 Bellman 方程为

$$\rho J=\max_{c>0}\left\{\frac{1}{\gamma}c(t)^\gamma+(\alpha k-c)J_k+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_\mu^2k^2J_{kk}\right\}$$

代表性个体的决策问题是选择消费 c 最大化以下 Lagrangian 表达式:

$$L=\frac{1}{\gamma}c(t)^{\gamma}-\rho J+(\alpha k-c)J_k+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_\mu^2k^2J_{kk} \tag{2.1.23}$$

则一阶最优性条件为

$$\frac{\partial L}{\partial c}=c^{\gamma-1}-J_k=0 \tag{2.1.24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial k}=-\rho J_k+\alpha J_k+[(\alpha k-c)+\alpha^2\sigma_\mu^2k]J_{kk}+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_\mu^2k^2J_{kkk}=0 \tag{2.1.25}$$

为了保证个体一生期望效用的有界性，以下横截性条件应该得到满足

$$\lim_{t\to\infty}E\{J[k(t)]e^{-\rho t}\}=0 \tag{2.1.26}$$

定义函数 H 为

$$H=\frac{1}{\gamma}c(t)^{\gamma}+(\alpha k-c)J_k+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_\mu^2k^2J_{kk} \tag{2.1.27}$$

则 Lagrangean 表达式(2.1.23)变为 $L=H-\rho J$，横截性条件(2.1.26)变为

$$\lim_{t\to\infty}E[H(t)e^{-\rho t}]=0 \tag{2.1.28}$$

由于 J,J_k,J_{kk} 与控制变量 c 没有关系，我们有$\frac{\partial L}{\partial c}=0\Leftrightarrow\frac{\partial H}{\partial c}=0$。令 $\lambda=J_k$，则 H 的表达式可化为

$$H=\frac{1}{\gamma}c(t)^{\gamma}+\lambda(\alpha k-c)+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_\mu^2k^2\lambda_k \tag{2.1.29}$$

相应的一阶最优性条件(2.1.24)变为定理所示的(2.1.20)。由伊滕引理，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\lambda&=\mathrm{d}J_k=J_{kk}\mathrm{d}k+\frac{1}{2}J_{kkk}(\mathrm{d}k)^2\\&=\left[(\alpha k-c)J_{kk}+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_\mu^2k^2J_{kkk}\right]\mathrm{d}t+\alpha kJ_{kk}\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

利用一阶最优性条件(2.1.25)，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\lambda&=[(\rho-\alpha)J_k-\alpha^2\sigma_\mu^2kJ_{kk}]\mathrm{d}t+\alpha kJ_{kk}\mathrm{d}\mu\\&=[(\rho-\alpha)\lambda-\alpha^2\sigma_\mu^2k\lambda_k]\mathrm{d}t+\alpha kJ_{kk}\mathrm{d}\mu\\&=\left(\rho\lambda-\frac{\partial H}{\partial k}\right)\mathrm{d}t+\alpha kJ_{kk}\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

因而一阶最优性条件(2.1.25)可替换为

$$\frac{\partial H}{\partial k}=\lambda\alpha+\alpha^2\sigma_\mu^2k\lambda_k=\rho\lambda-\frac{E\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \tag{2.1.30}$$

定理 2.1.4 宏观经济均衡为如下随机增长路径：

$$\frac{\mathrm{d}k}{k}=\varphi\mathrm{d}t+\mathrm{d}\tilde{\omega} \tag{2.1.31}$$

其中经济增长率的均值部分 φ 和随机部分 $\mathrm{d}\tilde{\omega}$ 分别为：

$$\varphi=\frac{\alpha-\rho}{1-\gamma}-\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\sigma_\mu^2,\ \mathrm{d}\tilde{\omega}=\alpha\mathrm{d}\mu \tag{2.1.32}$$