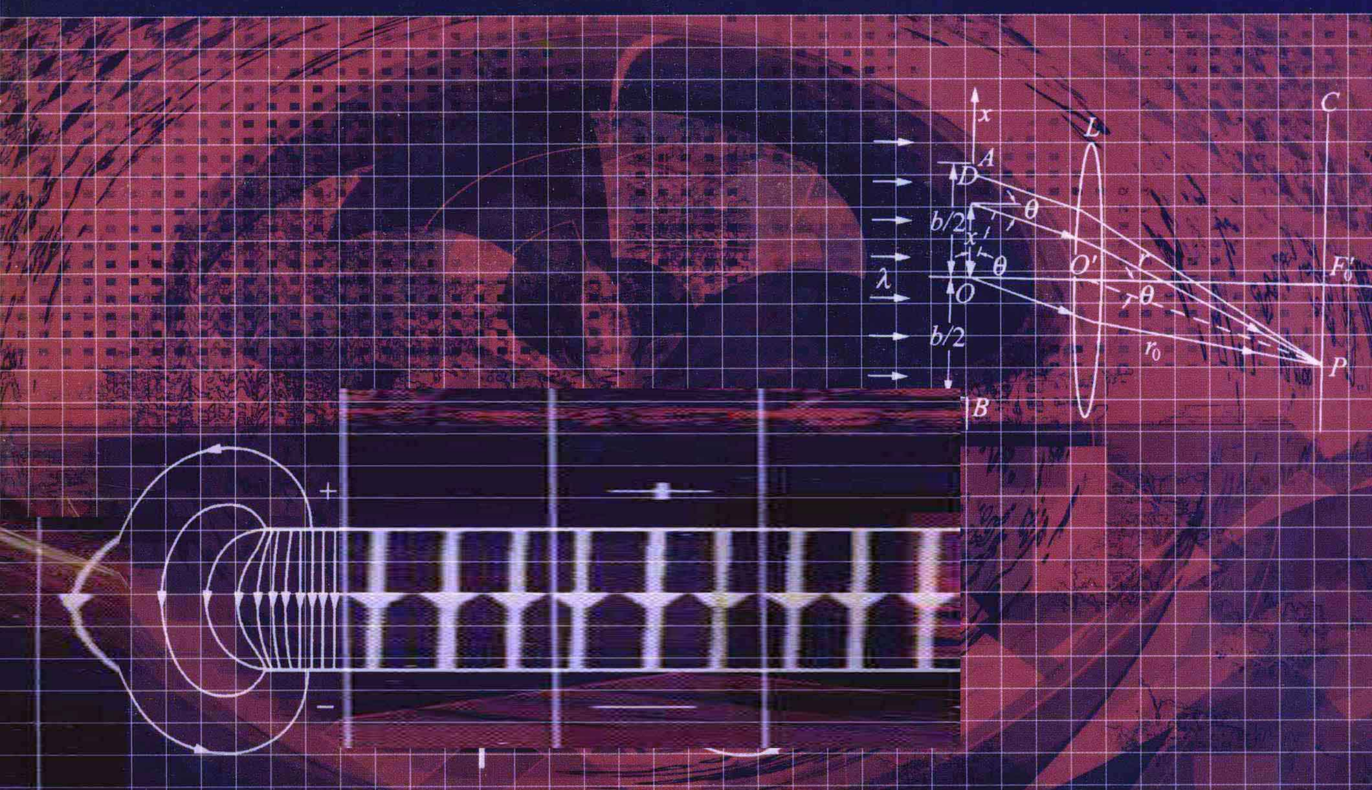
DAXUEWULIJIANMINGJIAOCHENG

大学物理简明教程

XITIXIANGJIE

习题详解

梁励芬　蒋　平　编著



復旦大學出版社

大学物理简明教程
习题详解

梁励芬　蒋　平　编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理简明教程习题详解/梁励芬,蒋平编著. —上海:复旦大学出版社,2011.4
ISBN 978-7-309-07879-4

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①梁…②蒋… Ⅲ. 物理学-高等学校-解题 Ⅳ. 04-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 012191 号

大学物理简明教程习题详解
梁励芬 蒋 平 编著
责任编辑/梁 玲

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
同济大学印刷厂

开本 787×1092 1/16 印张 23.25 字数 565 千
2011 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-07879-4/O·464
定价: 42.00 元

内 容 简 介

本书是在综合各种大学物理教程的基础上，根据电子工程、生物医药、化学化工及工科院校各专业学生学习大学物理的需要编写而成的. 全书分 17 章，围绕力学、热学、电磁学、光学，近代物理学的核心概念，配备大量例题和习题解答. 题例的选取力求凸现物理概念和典型方法，以使读者能够举一反三，触类旁通.

本书可供非物理类各专业的大学生及中学教师作为学习参考书，也可用作硕士研究生入学考试用书.

第二版前言

本书原名《大学物理核心概念和题例详解》，是与编者所编写的《大学物理简明教程》（复旦大学出版社出版）配套发行的教学参考书，自 2003 年初版面市以来，受到广大读者的欢迎. 同时，使用本书的师生也提出了不少宝贵的意见和建议. 据此，在本书再版之际，编者对初版内容作了修订，并增加了一些例题，以使本书更加适合读者的需要，并与《大学物理简明教程》（第三版）同步发行.

借此机会，编者对关心、支持本书的读者致以衷心的谢意.

编　者

2010 年 10 月

前　言

本书以例题和习题解答为主，这是在《大学物理简明教程》（复旦大学出版社 2002 年 9 月版）的基础上，根据广大读者学习、复习考试的需要，综合各种大学物理教材和考试要求之后编写而成的.

本书各章的章名与顺序都与《大学物理简明教程》（以下称《简明教程》）一致. 每章首先扼要总结《简明教程》中的主要内容及学习要点以便读者把握学习重点，然后列举一些《简明教程》中未予列入的例题作为示范，以利读者应用相关的物理概念、原理和规律求解实际问题. 众所周知，物理学解题的一个关键性的基础是透彻理解物理学的基本概念和基本原理. 解答相关的非计算性思考题有助于奠定并巩固这一基础，这便是几乎所有的大学物理基础教材每章都附有思考题的原因. 然而，目前已经面市的与教材配套的习题集都鲜有包括思考题的解答在内者. 为了适应这一方面的需要，我们在本书中对《简明教程》各章所列的思考题也一一列出参考性答案，希望给读者以更多的方便和帮助.

大学物理是一门涉及专业、系科相当广泛的基础课，而使用相应教材的读者数量也相当巨大. 即使是已经毕业的学生，在择业、报考研究生以及日后的工作中不少人也希望有一本合适的大学物理学习指导书. 为了适应过去不使用《简明教程》或相近教材读者的需要，我们在例题与习题中均增加了部分深度与广度比《简明教程》的要求更进一步的内容，并在相应的习题上标以星号 *.

编　者

2003 年 1 月

目　　录

第一章　运　动　学

一、内容提要

(一) 质点运动学

1. 位矢　$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$；

位移　$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$；

位移的大小　$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

2. 速度　$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，沿质点运动轨道的切向，

速率　$v = |\boldsymbol{v}| = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$；

直角坐标系中，$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$.

3. 加速度　$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$；

直角坐标系中　$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$；

对曲线运动还可表示为　$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$，

$\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 分别为沿轨道切线与法线(指向凹边)的单位矢量.

4. 已知加速度，则　$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}\mathrm{d}t$，$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t$.

5. 特例：匀加速运动　$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t$，$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$，

$\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{r}_0$ 分别为 $t=0$ 时刻的速度与位矢.

6. 抛体运动的求解常用两种运动叠加的方法：

设抛射初速为$\boldsymbol{v}_0$，与水平方向夹角为 θ.

(1) 将抛体运动看成是速度为$\boldsymbol{v}_0$的匀速直线运动和沿竖直方向的自由下落运动的叠加：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2.$$

(2) 将抛体运动看成是沿 x 方向的速度为 $v_0\cos\theta$ 的匀速直线运动和沿 y 方向的初速为 $v_0\sin\theta$、加速度为 $-g$ 的匀变速直线运动的叠加：

$$\boldsymbol{r} = (v_0\cos\theta\cdot t)\boldsymbol{i} + \left(v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j}.$$

7. 质点系的质心位矢　$\boldsymbol{r}_c = \dfrac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}$，$\boldsymbol{r}_i$ 为质量为 m_i 的质点的位矢. 质心速度　$\boldsymbol{v}_c =$

$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t}$，质心加速度 $\boldsymbol{a}_c = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t^2}$.

对质量连续分布的物体，质心坐标可表示为

$$x_c = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m},\ y_c = \frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m},\ z_c = \frac{\int z\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}.$$

（二）质点的圆周运动和刚体绕固定轴的转动

(1) 角速度 $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}$，角加速度 $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$.

(2) 角量和线量的关系

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{a}_\tau = \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{a}_n = \omega^2 R\boldsymbol{n}.$$

（三）相对运动

动参照系 S' 相对于静参照系 S 作平动时，有下列关系

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0.$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 为 S' 的坐标原点相对于 S 的位矢，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{a}_0$ 分别为 S' 相对于 S 的速度和加速度.

二、自学指导和例题解析

本章的要点是掌握描述运动的方法.

描写运动的物理量如位移、速度、加速度和角位移、角速度、角加速度等都具有矢量性、瞬时性和相对性. 在学习中要特别注意以下几点：

(1) 矢量式中的所有加减号都应理解为几何相加减，即满足平行四边形法则；一般而言，这和代数的相加减是两码事. 在讨论具体问题时，常用矢量的分量式进行运算，即在参照系中选择一个合适的坐标系，把矢量投影到各坐标轴上，再进行相应的代数运算.

(2) 在一段时间 Δt 内质点的平均速度的方向和这段时间内质点位移的方向相同；而瞬时速度的方向总是沿着轨道的切向. 一般而言，平均速度的大小不等于平均速率，而瞬时速度的大小等于瞬时速率. 因为平均速率 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$，而平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$，而一般 $|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta s$，所以 $|\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$，但当 $\Delta t \to 0$ 时，$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，所以 $v = |\boldsymbol{v}|$.

(3) 质点速度的大小和方向的变化都导致加速度. 利用切向加速度和法向加速度可以更清楚地说明这一点. 因为速度沿轨道切向，$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\tau}$ 为切向的单位矢量，则

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}.$$

等式右边第一项表示速度大小发生变化而方向不变所引起的加速度，为切向加速度；第二项是速度大小不变而方向随时间变化所引起的加速度，可证明该项即是法向加速度.

本章的难点是如何运用微积分解决物理问题，以及如何选择正确的参照系描写运动.

例题

例 1-1 一质点在 xOy 平面内运动. 已知其位置和时间的关系为: $x=5t+2$, $y=t^2+4t-3$(式中 x、y 单位为 m, t 的单位为 s). 求:

(1) 质点位置的矢量表达式;

(2) $t=1$ s 和 $t=2$ s 时的位置矢量, 并计算这一秒内质点的位移;

(3) $t=1$ s 到 $t=2$ s 内的平均速度和 $t=2$ s 时的瞬时速度;

(4) 质点运动的加速度.

解: (1) 由题设可写出质点位置矢量表达式为

$$\boldsymbol{r}=(5t+2)\boldsymbol{i}+(t^2+4t-3)\boldsymbol{j}.$$

(2) 当 $t=1$ s 时 $\quad \boldsymbol{r}_1=7\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$;

$t=2$ s 时 $\quad \boldsymbol{r}_2=12\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}$;

这一秒内的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\Delta x\,\boldsymbol{i}+\Delta y\,\boldsymbol{j}=5\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}.$$

位移的大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{5^2+7^2}=8.6(\mathrm{m}).$$

位移的方向与 x 轴夹角为

$$\theta_1=\arctan\frac{\Delta y}{\Delta x}=\arctan\frac{7}{5}=54.5°.$$

(3) $t=1$ s 到 2 s 内的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}=\frac{5\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}}{2-1}=5\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j};$$

平均速度的大小为

$$|\bar{\boldsymbol{v}}|=\sqrt{5^2+7^2}=8.6(\mathrm{m\cdot s^{-1}});$$

瞬时速度表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(5t+2)\boldsymbol{i}+(t^2+4t-3)\boldsymbol{j}]\\&=5\boldsymbol{i}+(2t+4)\boldsymbol{j};\end{aligned}$$

$t=2$ s 时

$$\boldsymbol{v}_2=5\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j};$$

瞬时速度的大小为

$$|\boldsymbol{v}_2|=\sqrt{5^2+8^2}=9.4(\mathrm{m\cdot s^{-1}});$$

速度的方向与 x 轴的夹角为

$$\theta_2 = \arctan\frac{8}{5} = 58°.$$

(4) 质点运动的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 2\,\boldsymbol{j}.$$

加速度大小为 $2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,沿 y 轴正方向.

例 1-2 质点沿 x 轴运动,其加速度和位置的关系为 $a = 3 + 7x$, a 的单位是 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$,x 的单位是 m. 已知质点在 $x = 0$ 处的速度为 $8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,求质点的速度和位置的关系.

解: 加速度和速度的关系式中包含时间变量 t,而已知条件中只知加速度和位移的关系,所以应把所有表达式中的对时间的关系式变换成对坐标的关系:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

注意到上式中 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$, 所以可化成不显含时间的变量. 把 $a = 3 + 7x$ 代入上式,并作变量分离,使等式两边只与单一的变量相关,得

$$v\mathrm{d}v = (3 + 7x)\mathrm{d}x.$$

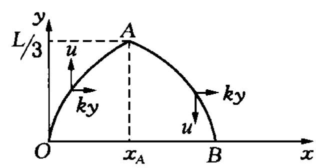
上式两边积分,由已知初始条件定出上、下限,得

$$\int_8^v v\mathrm{d}v = \int_0^x (3 + 7x)\mathrm{d}x.$$

解得

$$v = \sqrt{7x^2 + 6x + 64}.$$

例 1-3 一条河宽度为 L,水的流速与离岸的距离成正比,河中心流速最大为 v_0,两岸处流速为零. 一船以恒定的相对于水的速率 u 垂直于水流从一岸驶向另一岸,当船驶至河宽的$\frac{1}{3}$处时有事又返回本岸,求船驶向对岸的轨迹和返回本岸的地点.



例 1-3 图

解: 设 x 轴沿河水流动方向,y 轴指向对岸,出发点 O 为坐标原点,如图所示. 船向对岸行驶过程中,船对岸的速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{船对水} + \boldsymbol{v}_{水对岸} = u\boldsymbol{j} + ky\boldsymbol{i}.\ (k\ 为常数)$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ky; \tag{①}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u. \tag{②}$$

由题意, $y = \frac{L}{2}$ 时, $v_x = v_0$ 为最大流速,代入①式,得

$$v_0 = k\cdot\frac{L}{2},\ k = \frac{2v_0}{L}. \tag{③}$$

既然知道了小船在各个瞬时的速度,运用积分法就可知道小船在各瞬时的位置,但方程①中包含着未知的 $y(t)$,不能直接积分,因此可以先对②式积分,并从出发时开始计时,求得 $y=ut$,代入①式,并计及③式,得

$$v_x=\frac{2v_0}{L}\cdot ut,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2v_0u}{L}t,\ \int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{2v_0u}{L}t\,\mathrm{d}t.$$

得
$$x=\frac{v_0u}{L}t^2;$$

以 $t=\dfrac{y}{u}$ 代入上式,得轨迹方程为

$$x=\frac{v_0}{Lu}y^2. \qquad ④$$

此为一抛物线方程. 当船到达$\dfrac{L}{3}$处时,坐标为(该处设为 A 点)

$$y_A=\frac{L}{3};$$

$$x_A=\frac{v_0}{Lu}\left(\frac{L}{3}\right)^2=\frac{v_0L}{9u}. \qquad ⑤$$

船在返回本岸过程中,改以船位于 A 点时为计时起点,船对岸的速度分量为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ky=\frac{2v_0}{L}\left(\frac{L}{3}-ut\right)=\frac{2v_0}{3}-\frac{2v_0u}{L}t, \qquad ⑥$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-u; \qquad ⑦$$

两式分别积分,由⑥式得

$$\int_{x_A}^x\mathrm{d}x=\int_0^t\left(\frac{2}{3}v_0-\frac{2v_0u}{L}t\right)\mathrm{d}t.$$

解得

$$x=x_A+\frac{2}{3}v_0t-\frac{v_0u}{L}t^2. \qquad ⑧$$

由⑦式得

$$\int_{y_A}^y\mathrm{d}y=\int_0^t-u\mathrm{d}t;$$

得

$$y=y_A-ut. \qquad ⑨$$

船返回本岸到达 B 点, $y_B=0$, 代入⑨式,得

$$t=\frac{y_A}{u}.$$

代入⑧式得

$$x_B=\frac{v_0L}{9u}+\frac{2}{3}v_0\frac{y_A}{u}-\frac{v_0u}{L}\left(\frac{y_A}{u}\right)^2=\frac{v_0L}{9u}+\frac{2v_0}{3u}\left(\frac{L}{3}\right)-\frac{v_0}{Lu}\left(\frac{L}{3}\right)^2=\frac{2v_0L}{9u}.$$

实际上,小船返回的轨迹根据对称性也可以得出,因此,可很容易得到

$$x_B=2x_A=\frac{2v_0L}{9u}.$$

例 1-4 已知质点在竖直平面内运动,位矢为 $\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}+(4t-3t^2)\boldsymbol{j}$,求 $t=1\ \text{s}$ 时的法向加速度、切向加速度和轨迹的曲率半径.

解: 由位矢可求得速度和速率

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=3\boldsymbol{i}+(4-6t)\boldsymbol{j},$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{3^2+(4-6t)^2};$$

加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-6\boldsymbol{j}.$$

切向加速度为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{24(3t-2)}{2\sqrt{3^2+(4-6t)^2}}=\frac{12(3t-2)}{\sqrt{3^2+(4-6t)^2}};$$

$t=1\ \text{s}$ 时,得

$$a_\tau=\frac{12}{\sqrt{13}}=3.3(\text{m}\cdot\text{s}^{-2}).$$

法向加速度为

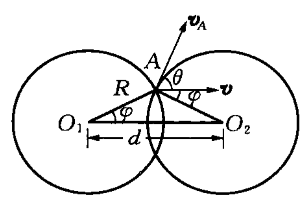
$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{6^2-\left(\frac{12}{\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{18}{\sqrt{13}}=5.0(\text{m}\cdot\text{s}^{-2}).$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{3^2+(4-6)^2}{5.0}=2.6(\text{m}).$$

从上面计算过程可见,速度$\boldsymbol{v}$对时间的导数和速率 v 对时间的导数是完全不同的.

例 1-5 如图所示,有两个半径都是 $R=0.5\ \text{m}$ 的圆环,右边圆环 O_2 静止,左边圆环 O_1 沿两环的连心线 O_1O_2 平动. 已知两圆环从相切到圆心重合这段时间内上部交点 A 的速率随时间 t 按 $v_A=0.4t\ \text{m/s}$ 关系变化. 试求该段时间内左边圆环中心 O_1 的速度和加速度与 t 的函数关系.



例 1-5 图

解: 左边圆环沿连心线 O_1O_2 作一维运动,由对称性关系,两圆交点 A 的速度$\boldsymbol{v}_A$的水平分量应等于 O_1 平动速率 v 的一半,即

$$v_A\sin\varphi=\frac{v}{2};\qquad ①$$

式中 φ 为 O_1O_2 与 O_2A 之间的夹角. 设 A 点沿圆环 O_2 转动的角速度为 ω,则 $v_A=\omega R$, $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$ 化为积分式

$$\int_0^{\varphi} d\varphi=\int_0^t \omega\, dt=\int_0^t \frac{v_A}{R} dt=\int_0^t \frac{0.4t}{0.5} dt,$$

得
$$\varphi=0.4t^2. \qquad ②$$

由①式可得 O_1 的速度

$$v=2v_A\sin\varphi=0.8t\sin(0.4t^2). \qquad ③$$

由于 O_1 作一维运动,其加速度为

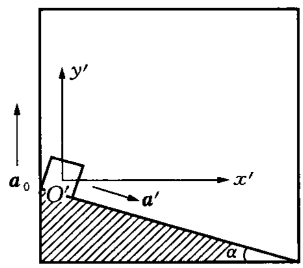
$$a=\frac{dv}{dt}=0.8\sin(0.4t^2)+0.64t^2\cos(0.4t^2).$$

例 1-6　如图(a)所示,有一斜面固定在升降机内的底板上,其倾角为 $\alpha=30°$. 当升降机以加速度 $a_0=2t^2$ m/s² 上升时,物体相对斜面以加速度 $a'=2$ m/s² 沿斜面向下运动. 设 $t=0$ 时,地面参照系 xOy 和升降机参照系 $x'O'y'$ 重合,物体在坐标原点由静止开始运动. 试求:

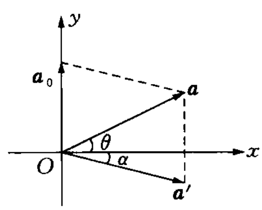
(1) 物体相对于地面的加速度;

(2) 物体在升降机参照系中的轨迹方程;

(3) 物体在地面参照系中的轨迹方程.



例 1-6 图(a)



例 1-6 图(b)

解: (1) 图(b)所示为某时刻物体加速度的矢量图. 设物体相对地面的加速度为 $\boldsymbol{a}$,由相对运动关系:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}'.$$

加速度沿 x, y 方向的分量分别为

$$a_x=a'\cos\alpha=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},$$

$$a_y=a_0-a'\sin\alpha=2t^2-2\times\frac{1}{2}$$
$$=2t^2-1,$$
$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{3+(2t^2-1)^2}=2\sqrt{t^4-t^2+1}.$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向和 x 轴的夹角为

$$\theta=\arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right)=\arctan\left(\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right).$$

(2) 在升降机参照系中,物体运动加速度的两个分量为

$$a_x'=a'\cos\alpha=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},$$

$$a_y'=-a'\sin\alpha=-2\times\frac{1}{2}=-1,$$

$t=0$ 时，$x'=y'=0$，$v'_x=v'_y=0$，x'，y' 方向都是匀加速运动，所以

$$x'=\frac{1}{2}a'_xt^2=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2,$$

$$y'=\frac{1}{2}a'_yt^2=-\frac{1}{2}t^2;$$

由以上两式得到物体运动的轨迹方程为

$$y'=-\frac{\sqrt{3}}{3}x',$$

此为直线运动.

(3) 在地面参照系中，x 方向为匀加速运动：

$$x=\frac{1}{2}a_xt^2=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2;$$

y 方向为变加速运动，可由积分求得 v_y 和 y.

$$v_y=\int_0^t a_y\mathrm{d}t=\int_0^t(2t^2-1)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3-t;$$

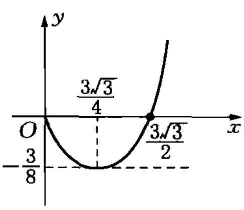
$$y=\int_0^t v_y\mathrm{d}t=\int_0^t\left(\frac{2}{3}t^3-t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{6}t^4-\frac{1}{2}t^2;$$

以 $t^2=\dfrac{2x}{\sqrt{3}}$ 代入 y 表示式中，得物体运动轨迹方程为

$$y=\frac{2}{9}x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x;$$

此为抛物线方程. 由上式可求出抛物线顶点的位置，得 $x=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，代入轨迹方程得

$$y=-\frac{3}{8}.$$

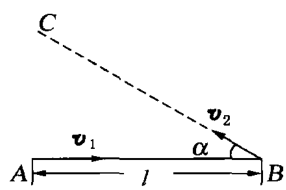


例 1-6 图(c)

该抛物线如图(c)所示.

由以上计算可知，在不同的参照系中观察同一物体的运动，其轨迹是不同的.

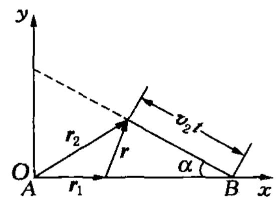
例 1-7 如图(a)所示，质点 A 和 B 同时从 A、B 两点出发，分别以速度$\boldsymbol{v}_1$沿 AB 和以速度$\boldsymbol{v}_2$沿 BC 作匀速直线运动，BC 和 BA 的夹角为α，开始时质点 A 和质点 B 相距为 l，试求两质点之间的最短距离.



例 1-7 图(a)

解法一： 以地面为参照系，以 A 点为坐标原点，取 x 轴沿 AB 连线，在任意时刻 t，两质点的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，两质点之间的距离为 $r=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$，因 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 都随时间变化，所以 r 也是时间的函数. 如图(b)所示，两质点的位矢分别为

$$\boldsymbol{r}_1 = v_1 t\boldsymbol{i},$$
$$\boldsymbol{r}_2 = (l - v_2 t\cos\alpha)\boldsymbol{i} + v_2 t\sin\alpha\boldsymbol{j},$$
$$r = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = |[l - (v_2\cos\alpha + v_1)t]\boldsymbol{i} + v_2 t\sin\alpha\boldsymbol{j}|;$$
$$r = r(t) = \sqrt{[l - (v_2\cos\alpha + v_1)t]^2 + (v_2 t\sin\alpha)^2}.$$



例 1-7 图(b)

求 r 的极小值,只要求根号内函数的极小值即可,令

$$f(t) = [l - (v_2\cos\alpha + v_1)t]^2 + (v_2 t\sin\alpha)^2,$$
$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = 2[l - (v_2\cos\alpha + v_1)t][-(v_2\cos\alpha + v_1)] + 2v_2^2 t\sin^2\alpha.$$

极小值满足 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = 0$, 由此得

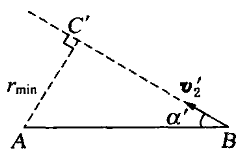
$$t = \frac{(v_2\cos\alpha + v_1)l}{(v_2\cos\alpha + v_1)^2 + (v_2\sin\alpha)^2}.$$

把 t 值代入 $r(t)$ 表示式中得

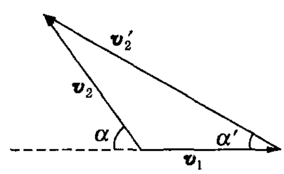
$$r_{\min} = \frac{v_2 l\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2\cos\alpha}}.$$

严格说来,要判断这样求得的极值是极大还是极小,还需要根据 $\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}$ 是大于还是小于零,但从物理上分析,r 不可能有极大值,或者说极大值是无限大,所以所求得的结果只可能是极小值.

解法二:利用相对运动关系求解:如图(c)所示,因 A、B 两质点均作匀速直线运动,故一质点相对另一质点的运动必定也是匀速直线运动. 以质点 A 为参照系,在此参照系中 A 是静止的,质点 B 则以相对速度 $\boldsymbol{v}_2'$ 沿直线 BC' 作匀速直线运动,BC' 与 AB 的夹角为 α',$\boldsymbol{v}_2'$ 和 α' 均可用简单的几何方法求得,于是在 A 静止的参照系中,从 A 到直线 BC' 的垂直距离即为所求的最短距离,图(d)表示 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_2'$ 三者的矢量关系.



例 1-7 图(c)



例 1-7 图(d)

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1.$$

由余弦定理得

$$v_2'^2 = v_2^2 + v_1^2 + 2v_1 v_2\cos\alpha.$$

由正弦定理得

$$\frac{v_2}{\sin\alpha'} = \frac{v_2'}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{v_2'}{\sin\alpha};$$

由上式得

$$\sin \alpha' = \frac{v_2}{v_2'} \sin \alpha.$$

因而两质点间最短距离为

$$r_{\min} = l \sin \alpha' = l \frac{v_2}{v_2'} \sin \alpha = \frac{v_2 l \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha}}.$$

由上述两种解法可以看出，若选 A 在其中为静止的动参照系，解题很方便，避免了烦琐的运算，解得极值也不必判断到底是极大还是极小.

三、习题解答

1-1. 一质点沿 x 轴运动，其坐标随时间的变化关系为 $x = 10t^2$，式中 x 和 t 的单位分别是 m 和 s，试计算该质点在 3 s 到 4 s 内的平均速度以及 $t = 3$ s 时的速度和加速度.

解： 由平均速度的定义，质点在 3～4 s 内的平均速度为

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} = 10(t_2 + t_1) = 10(4 + 3) = 70(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}).$$

速度为 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 20t$，$t = 3$ s 时，$v = 20 \times 3 = 60(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1})$.

加速度为 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 20(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2})$，与时间无关，说明质点作匀加速运动.

1-2. 一质点沿 x 轴运动，其速度随时间的变化关系为 $v = 4t - 8$，式中 v 和 t 的单位分别是 $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ 和 s，当 $t = 1$ s 时，质点在原点左边 2 m 处，试求：

(1) 质点的位置及加速度随时间变化的表示式；

(2) 质点的初速度；

(3) 质点到达坐标原点左边的最远位置；

(4) 质点何时经过坐标原点？此时速度多大？

解： 已知 $v = 4t - 8$，$t = 1$ s 时，$x = -2$ m，

由 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$ 两边积分 $\int_{-2}^{x} \mathrm{d}x = \int_{1}^{t} v \mathrm{d}t$；$x + 2 = \int_{1}^{t} (4t - 8) \mathrm{d}t$.

得 (1) $x = (2t^2 - 8t + 4)(\mathrm{m})$，$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4t - 8) = 4(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2})$.

(2) $t = 0$ 时，$v_0 = -8(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1})$.

(3) $t = 0$ 时，$x = 4$，$v_0 = -8$，$a = 4$，质点开始时向 x 负方向作减速运动，到 $v = 0$ 时到达原点左边的最远位置，由此可得到达此位置的时间：

$$0 = 4t - 8; \; t = 2(\mathrm{s}).$$

代入 x 的表示式，得到质点离原点左边的最远位置 x_1：

$$x_1 = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 4 = -4(\mathrm{m}).$$

(4) 由 $x = 0$ 得 $0 = 2t^2 - 8t + 4$，$t = (2 \pm \sqrt{2})(\mathrm{s})$.