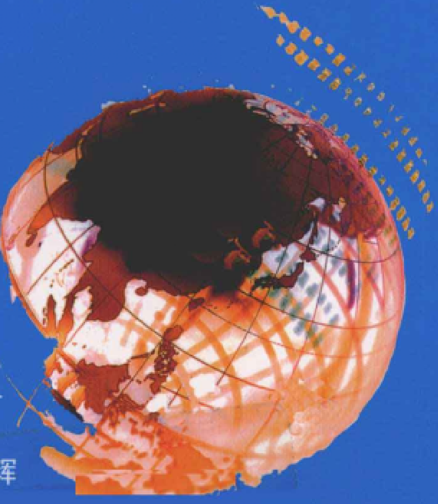
总主编 单墫 熊斌

奥数教程

·第五版·

八年级



本册主编 赵雄辉

奥数图书出版大事记

2000年　《奥数教程》（10种）第一版问世

2001年　《奥数教程》获优秀畅销书奖

2002年　《奥数教程》在香港出版繁体字版和网络版

2002年　《奥数测试》（第一版）出版

2003年　《奥数教程》（第二版）出版，并开展"有奖订正"、"巧解共享"活动

2003年　《奥数教程》（3～6年级）VCD出版

2003年～　陆续出版由IMO中国国家集训队教练组编写的《走向IMO：数学奥林匹克试题集锦》

2005年　"奥数"图书累计销量近1000万册

2005年　出版《数学奥林匹克小丛书》（30种）

2006年　《奥数教程》（第三版）、《奥数测试》（第二版）出版

2006年　《数学奥林匹克小丛书》（12种）繁体字版在台湾出版

2007年　《奥数教程》（第四版）、《奥数教程学习手册》（4～9年级）出版

2007～2008年　《多功能题典》丛书中的小学、初中和高中数学竞赛相继出版

2008年　《日本小学数学奥林匹克（六年级）》出版

2009年～《高中数学联赛备考手册（预赛试题集锦）》陆续出版

2009年　《数学思维训练导引》（3～6年级）出版

2009年　《Mathematical Olympiad in China》、《Problems of Number Theory in Mathematical Competitions》和《Graph Theory》相继与新加坡世界科技出版公司联合出版

2010年　《全俄中学生数学奥林匹克（1993～2006）》出版

ISBN 978-7-5617-2378-4
03>
9 787561 723784
定价：17.00元
www.ecnupress.com.cn

总主编　单墫 熊斌

奥数教程

·第五版·

华东师范大学出版社

八年级

本册主编　赵雄辉
参 编 者　赵雄辉　申建春
谢立红

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程. 八年级/赵雄辉主编. —上海:华东师范大学出版社,2000. 11
ISBN 978 - 7 - 5617 - 2378 - 4

Ⅰ. 奥...　Ⅱ. 赵...　Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 48987 号

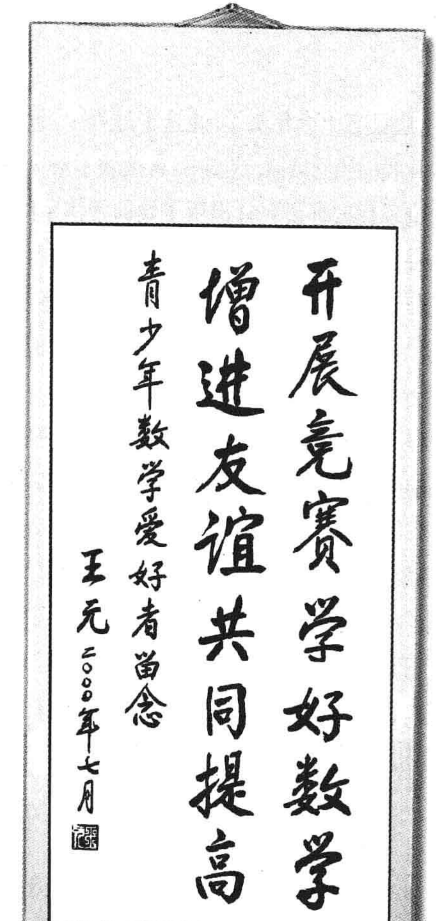
奥数教程 · 八年级 ·
(第五版)

总 主 编　单 墫　熊 斌
本册主编　赵雄辉
策划组稿　倪 明　孔令志
审读编辑　徐慧平
封面设计　高 山
版式设计　蒋 克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021 - 62450163 转各部门　行政传真 021 - 62572105
客服电话　021 - 62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021 - 62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www. ecnupress. com. cn.

印 刷 者　江阴天海印务有限公司
开　　本　890 × 1240　32 开
印　　张　9
字　　数　218 千字
版　　次　2010 年 6 月第五版
印　　次　2010 年 6 月第 35 次
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5617 - 2378 - 4/ G · 1115
定　　价　17. 00 元

出 版 人　朱杰人



著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

致读者

《奥数教程》的出版已有十个年头了. 在这个过程中,包含了作者和编辑的辛勤劳作,更多的是让我们感到欣慰. 这套书,曾荣获了第十届全国教育图书展的优秀畅销书奖;香港现代教育研究社出版了她的繁体字版和网络版,成为香港的畅销图书之一,并因此获得了版权输出奖;据北京开卷图书市场研究所的监控销售数据,近几年《奥数教程》的销量名列同类书前茅,尤其是初一和高一分册分别获得数学竞赛图书初中段和高中段的第一. 这些成绩的取得与作者们精到的创作,广大读者的支持、呵护是分不开的.

为了使《奥数教程》更健康、更成熟地发展,为了使学生的学习生活更主动、更有效,不断提高图书的质量,我们差不多每两年修订一次,现在已经是第五版了. 应广大读者的要求,方便读者自学,我们为本书配了"学习手册"和"能力测试". 把本书习题的详细解答放入"学习手册",并加入竞赛热点精讲. 全新的"能力测试"针对本书每讲,精选了一小时的习题量,帮助读者轻松巩固所学知识.

七八年前,我们开展了"有奖订正"和"巧解共享"两项活动,得到了读者的支持与配合,不少读者纷纷来信、来电提出订正意见和更好的解法. 这是对我们的鼓励,更是对我们的鞭策. 我们计划继续开展下列活动,希望有更多的读者朋友乐于参与.

一、有奖订正

2010 年 8 月到 2011 年 8 月期间,欢迎读者朋友对《奥数教程》(第五版,共 12 册),提出改正意见,我们将对"纠错能手"给予奖励.

二、巧解共享

欢迎读者朋友对《奥数教程》中例题与习题,提供更巧妙的解法. 我们将选择有新意的、合适的解法在网上公布,以与其他读者朋友共享. 凡在修订时被采用者,我们将署上提供者的姓名,并支付相应的稿酬.

我们衷心祝愿《奥数教程》永远成为您的好朋友.

华东师范大学出版社

前　言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”. 但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好. 的确，数学是中国人擅长的学科，如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属.

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势.

中国人能用一只手表示 1～10，而很多国家非用两只手不可.

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有 12 进制，60 进制的残余).

中国文字都是单音节，易于背诵，例如乘法表，学生很快就能掌握，再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”. 但外国人，一学乘法，头就大了. 不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵.

圆周率 $\pi=3.141\,59\cdots$. 背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了. 可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个……要背 π 先背诗，这在我们看来简直是自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法.

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色. 从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生的学习兴趣，启迪学生智慧. 例如：

“一百个和尚一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚?”

外国人多半只会列方程解. 中国却有多种算术解法，如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚，100 个馒头表明小和尚是 300 个，多出 200 个和尚，是由于每个大和尚变小和尚，多变出 8 个，从而 $200\div8=25$ 即是大和尚人数. 小和尚自然是 75 人，或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组，平均每人吃一个馒头. 恰好与总体的平均数相等. 所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少，即大和尚是 $100\div(3+1)=25$ 人.

中国人善于计算，尤其善于心算. 古代还有人会用手指计算(所谓“掐指一算”). 同时，中国很早就有计算的器械，如算筹、算盘. 后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中，我国的优势显然，所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理，在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算，我国有不少论著)，比希腊人稍逊一筹. 但是，中国人善于向别人学习. 目前我国中学生的几何水平，在世界上遥遥领先. 曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班，他们认为所教的几何内容太深，学生不可能接受，但听课之后，不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解，而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著. 在国际数学竞赛中，我国选手获得众多奖牌，就是最有力的证明. 从 1986 年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来，中国队已经获得了 14 次团体冠军，可谓是成绩骄人. 当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏. 他说：“今年一件值得庆祝的事，是中国在国际数学竞赛中获得第一……去年也是第一名.”(陈省身 1990 年 10 月在台湾成功大学的讲演“怎样把中国建为数学大国”)

陈省身先生还预言：“中国将在 21 世纪成为数学大国.”

成为数学大国，当然不是一件容易的事，不可能一蹴而就，它需要坚持不懈的努力. 我们编写这套丛书，目的就是：(1)进一步普及数学知识，使数学为更多的青少年喜爱，帮助他们取得好的成绩；(2)使喜爱数学的同学得到更好的发展，通过这套丛书，学到更多的知识和方法.

“天下大事，必作于细.”我们希望，而且相信，这套丛书的出版，在使我国成为数学大国的努力中，能起到一点作用. 本丛书初版于 2000 年，现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订.

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问，并为青少年数学爱好者题词，我们表示衷心的感谢. 还要感谢华东师大出版社及倪明、孔令志先生，没有他们，这套丛书不会是现在这个样子.

单 墫 熊 斌

2010 年 5 月

目　录

第 1 讲

因式分解(一)

把一个合数表示成它的质因数之积的形式,叫做分解质因数.

例如,把 2010 分解质因数的结果是

$$2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67,$$

这里 2、3、5、67 都是质数.

类似地,把一个多项式化为几个整式的乘积形式,叫做因式分解,也叫分解因式.通常要求分解后的各个因式都是不可约多项式,也就是质因式.

例如,把 $x^3 - 2x^2y + xy^2 - x$ 分解因式,得

$$\begin{aligned} & x^3 - 2x^2y + xy^2 - x \\ = & x(x^2 - 2xy + y^2 - 1) \\ = & x[(x-y)^2 - 1] \\ = & x(x-y+1)(x-y-1), \end{aligned}$$

这里 x、$x-y+1$、$x-y-1$ 都不能继续分解,是质因式.

因式分解的基本方法有:

(1) 提公因式法.利用 $ma + mb + mc = m(a+b+c)$,把多项式中每一项的公因式提出来.

(2) 运用公式法.如运用公式 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$, $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$.

(3) 分组分解法.先对多项式适当分组,再分别变形,然后利用提公因式法或运用公式法分解因式.

(4) 十字相乘法. 对二次三项式的系数进行分解,借助十字交叉图分解,即:

$$ax^2+bx+c=(mx+r)(nx+s),$$

$$\begin{array}{ccc} m & & r \\ & \times & \\ n & & s \\ \hline & ms+nr & \end{array}$$

其中 $mn=a$, $rs=c$, $ms+nr=b$. 交叉图如右图.

把一个多项式因式分解,如果多项式的各项有公因式,就先提取公因式,公因式可以是数、单项式,也可以是多项式;如果各项没有公因式,再看能否直接运用公式法或十字相乘法分解,如果还不能分解,就试用分组分解法或其他方法. 分解因式时,必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止,结果一定是乘积的形式,每个因式都是整式,相同因式的积要写成幂的形式.

例1 分解因式:

$$(x-y)^{2n+1}+2(y-x)^{2n}(y-z)-(x-z)(x-y)^{2n},$$

其中 n 是正整数.

解 注意到 $(y-x)^{2n}=(x-y)^{2n}$,

$$\begin{aligned}&(x-y)^{2n+1}+2(y-x)^{2n}(y-z)-(x-z)(x-y)^{2n}\\ =&(x-y)^{2n}[(x-y)+2(y-z)-(x-z)]\\ =&(x-y)^{2n}(y-z).\end{aligned}$$

说明 提取公因式时,必须注意各项的符号.

例2 已知 $1+x+x^2+x^3+x^4=0$, 求 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1999}$ 的值.

解

$$\begin{aligned}&1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1999}\\ =&(1+x+x^2+x^3+x^4)+(x^5+x^6+x^7+x^8+x^9)+\cdots+\\ &(x^{1995}+x^{1996}+x^{1997}+x^{1998}+x^{1999})\\ =&(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{1995})\\ =&0.\end{aligned}$$

说明　要求值的多项式有2000项，中间带有省略号，分组时要弄清省略号中共有多少项，如何分组，这样最后一组才不会出错.

例3　计算：$\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}+1\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}$.

解　设 $\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}=a$，则 $1\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}=1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个}0}+a=10^n+a$，$a+1=10^n$.

$$\begin{aligned}&\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}+1\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}\\=&a\times a+10^n+a\\=&a(a+1)+10^n\\=&a\times10^n+10^n\\=&10^n(a+1)\\=&10^{2n}.\end{aligned}$$

说明　本题中设 $\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}=a$，能使运算过程书写简便. 如果注意到 $1\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}=2\times\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}+1$，那么原式 $=a^2+2a+1$，就能运用完全平方公式求出结果.

例4　分解因式：

(1) $x^3(x-2y)+y^3(2x-y)$；

(2) $(a^2+9b^2-1)^2-36a^2b^2$；

(3) $(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$.

解　(1)
$$\begin{aligned}&x^3(x-2y)+y^3(2x-y)\\=&(x^4-y^4)-2xy(x^2-y^2)\\=&(x^2-y^2)(x^2+y^2-2xy)\\=&(x+y)(x-y)^3.\end{aligned}$$

(2)　$(a^2+9b^2-1)^2-36a^2b^2$

$=(a^2+9b^2-1+6ab)(a^2+9b^2-1-6ab)$

$=[(a+3b)^2-1][(a-3b)^2-1]$

$=(a+3b+1)(a+3b-1)(a-3b+1)(a-3b-1)$.

(3) $(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$

$=(x+y)^2-2xy(x+y)-2(x+y)+4xy+1-2xy+x^2y^2$

$=[(x+y)^2-2(x+y)+1]-2xy(x+y-1)+x^2y^2$

$=(x+y-1)^2-2(x+y-1)xy+(xy)^2$

$=(x+y-1-xy)^2$

$=(xy-x-y+1)^2$

$=(x-1)^2(y-1)^2$.

例5 已知 $2^{48}-1$ 可以被 60 与 70 之间的两个整数整除，求这两个整数.

解 $2^{48}-1$

$=(2^{24})^2-1$

$=(2^{24}+1)(2^{24}-1)$

$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1)$

$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1)$.

易求得 $2^6+1=65$, $2^6-1=63$, 而 $2^{12}+1>70$, $2^{24}+1>70$, 所以要求的两个整数为 63 和 65.

说明 以下两个等式值得认真体会：

当 n 为正奇数时，

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1});$$

当 n 为正整数时，

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

例 6 分解因式：

(1) $63x^2+22x-8$；

(2) $x^2+x+6y^2+3y+5xy$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&63x^2+22x-8\\=&(7x+4)(9x-2).\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}7 & \times & 4\\ 9 & & -2\\ \hline \multicolumn{3}{c}{7\times(-2)+9\times4=22}\end{array}$$

(2)
$$\begin{aligned}&x^2+x+6y^2+3y+5xy\\=&x^2+(5y+1)x+(6y^2+3y)\\=&x^2+(5y+1)x+3y(2y+1)\\=&(x+3y)(x+2y+1).\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}1 & \times & 3y\\ 1 & & 2y+1\\ \hline \multicolumn{3}{c}{2y+1+3y=5y+1}\end{array}$$

说明 第(2)题是把多项式看成 x 的二次三项式，把 y 看成常数，采用十字相乘法. 在用十字相乘法分解二次三项式时，如果二次项系数是负数，不妨先变形，如 $-6x^2+12-x$ 先变为 $-(6x^2+x-12)$，再对 $6x^2+x-12$ 分解.

例 7 已知二次三项式 x^2-mx-8 (m 是整数)在整数范围内可以分解为两个一次因式的积，求 m 的可能取值.

解 根据条件，如果将 -8 分解为两个整数的积，那么这两个整数的和即为 $-m$.

因为 -8 分解为两个整数积的可能情形有

$$(-1)\times8,\ (-2)\times4,\ (-4)\times2,\ (-8)\times1,$$

所以 $-m$ 的可能值为

$$(-1)+8,\ (-2)+4,\ (-4)+2,\ (-8)+1.$$

故 m 的可能取值有 -7, -2, 2, 7 共四个.

说明 如果题目的条件不是限定在整数范围内可以分解，那么 m 的取值不能用本题的解法. 如果题目改为 x^2-8x-m 在整数范围内可以分解因式，那么只要将 -8 拆成两个整数的和（如 $-50+42$, $-9+1$)，这两个整数的积就等于 $-m$，因此，符合条件

的 m 有无数个.

例 8 如图 1-1,立方体的每一个面上都写有一个自然数,并且相对两个面所写的两数之和都相等. 若 18 的对面写的是质数 a, 14 的对面写的是质数 b, 35 的对面写的是质数 c. 试求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

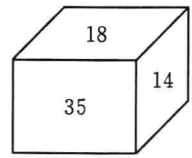


图 1-1

解 由题意可得

$$a+18=b+14=c+35.$$

所以 $a-b=-4,\ b-c=21,\ c-a=-17.$

因为

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\
=&\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)\\
=&\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\\
=&\frac{1}{2}[(-4)^2+21^2+(-17)^2]\\
=&373,
\end{aligned}$$

所以所求式的值为 373.

说明 本题中条件“a、b、c 是质数”,在求解中没有使用. 不过由这一条件及关系式 $18+a=14+b=35+c$, 可以断定 c 的奇偶性一定与 a、b 的奇偶性不同,而 $a\neq b$, 偶质数又只有 2 一个, 故 $c=2$, 从而 $a=19$, $b=23$.

应用本题方法,由 $a=1990x+1989$, $b=1990x+1990$, $c=1990x+1991$,可求出 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

例 9 在黑板上写有一个缺系数和常数项的多项式:

$$x^3+\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}.$$

现有两个人做填数字游戏:第一个人在任何一个空位内填上一个非零整数(可正可负),接着,第二个人在剩下的两个空位置中任选一个填上一个整数,最后,第一个人在余下的空位上填一个整数.

求证:不管第二个人怎样填数,第一个人总能使所得到的多项式可分解为三个一次因式的积,并且每个因式的 x 系数为 1,常数项为整数.

证明 因为第一个人有选择空位的主动权,所以他可以在 x 前的框内填上 -1,这样,原多项式变为

$$x^3+\boxed{}\,x^2-x+\boxed{}.$$

第二个人不管在哪一个框内填数 a,第一个人只需在最后一个空框内填上第二个人所填数的相反数 $-a$. 这样,原多项式就变成了

$$x^3+ax^2-x-a,\ \text{或}\ x^3-ax^2-x+a.$$

而

$$\begin{aligned}&x^3+ax^2-x-a\\=&x(x^2-1)+a(x^2-1)\\=&(x+a)(x+1)(x-1).\\&x^3-ax^2-x+a\\=&x(x^2-1)-a(x^2-1)\\=&(x-a)(x+1)(x-1).\end{aligned}$$

这就表明了第一个人总能使所填数符合要求.

试一试

下面的谜语都是以数学用语(数学概念)为谜底,你能猜出来吗?

(1) 大口; (2) 当面点清;

(3) 不搞绝对平均; (4) 垂钓;

(5) 东张西望; (6) 考试作弊;

(7) 一笔债务; (8) 五四三二一;

(9) 一个葫芦做两个瓢.

谜底见第 2 讲.