应用型本科院校规划教材/数学

Applied Mathematics Basics On Economics Ⅱ: Linear Algebra

经济应用数学基础（二）

线性代数

- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业

主编 李 允 吴海燕

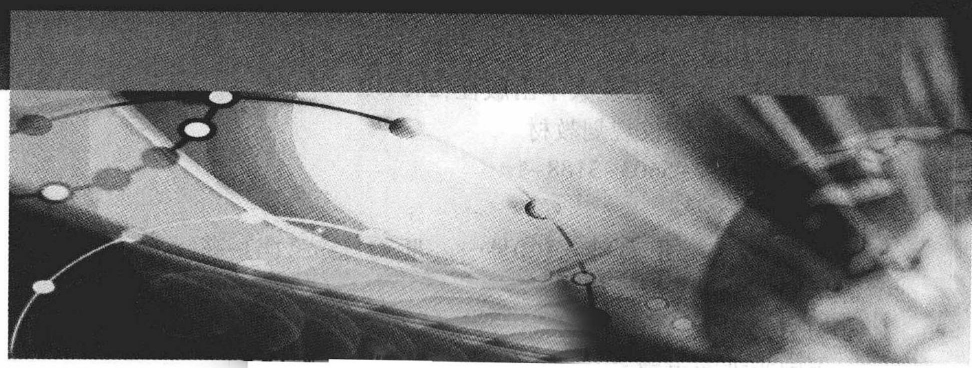
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

应用型本科院校规划教材/数学

Applied Mathematics Basics On Economics Ⅱ: Linear Algebra

经济应用数学基础（二）

线性代数



主　编　李　允
副主编　刘珊珊

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书为应用型本科院校规划教材，是按照传承与改革的精神，依据国家教育部高等教育司审定的“高等学校财经管理类”专业核心课程《经济数学基础教学大纲》，结合编者多年将数学与经济学相结合的教学实践成果编写而成的.

本书共分6章，分别为行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、特征值与特征向量、二次型及其标准形. 每章最后面都有与之相应的应用实例.

本书是应用型本科院校经济管理类各专业学生的推荐教材，也可作为相关专业学生的学习参考书和从事经济管理工作人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学基础(二)：线性代数/李允，吴海燕主编.
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.2
应用型本科院校规划教材
ISBN 978-7-5603-3188-1

Ⅰ.①经…　Ⅱ.①李…②吴…　Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①F224.0②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第018058号

策划编辑　赵文斌　杜　燕
责任编辑　范业婷　李长波
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　肇东粮食印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张11.25　字数241千字
版　　次　2011年2月第1版　2011年2月第1次印刷
书　　号　ISBN978-7-5603-3188-1
定　　价　22.80元

序

哈尔滨工业大学出版社策划的“应用型本科院校规划教材”即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的“应用型本科院校规划教材”，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

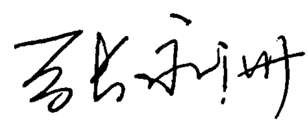
本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科

体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的 PPT 多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

“应用型本科院校规划教材”的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

黑龙江省教育厅厅长



2010 年元月于哈尔滨

前　言

《经济应用数学基础》(包括微积分、线性代数和概率统计三部分内容),是财经管理类的核心课程之一,是一门重要的基础课.这门课程不但为将来从事经济管理工作的学生提供一种定量分析的工具,而且对学生逻辑思维的培养与创新思维的开发起着重要作用.

本书是应用型本科院校规划教材之一,按照传承与改革的精神,结合经管类教学的基本要求编写而成.

随着大众教育时代的到来,应用型本科教学改革大潮的涌动,如何在教学中推行素质教育,如何培养学生的创新意识与创新精神,如何确保教学质量稳步提高,是我们面临的一个新课题,而教材创新正是该课题中的一个核心内容. 过去我们往往只注重知识体系完整、传授方法得当、思维训练严谨,但有时学生学完数学,只会解题却不会应用,感到数学无用武之地而束之高阁,而真要用的时候便手足无措,之所以形成这种局面,除了受课时和教学方法的固有模式的限制之外,现有的教材过于“阳春白雪”,缺乏实际应用,因此,我们编写了这套教材,作为一种尝试与探索.

随着现代科学技术和经济领域的重大变革与面临的挑战,业已深刻地影响着数学的发展,促进数学能动地向各个领域纵横渗透,近二三十年的变化显得尤为突出,它以千姿百态的形式活跃于自然科学、经济科学、生命科学以及人文科学等研究领域. 特别是一年一度的大学生数学建模竞赛(MCM),为大学生发挥创造性才能提供了一个广阔的平台,为此我们近几年来为数学教学创新先后完成了两个课题:“经济数学课程教学改革全程优化的研究与实践”和“在民办高校大力开展数学建模教育,努力培养应用型创新人才”,力求使常规教学、数学建模、数学实验三者之间相互作用、协调发展、共同提高,激发学生分析问题和解决问题的主动性和能动性,克服学生的依赖心理.

本教材以国家教育部高等教育司审定的“高等学校财经管理类”专业核心课程《经济数学基础教学大纲》为依据,结合应用型本科教育的现实情况,并融进编者多年将数学和经济科学相结合的教学实践的成果,遵循“以应用为目的,以必须够用为度”的原则,借鉴了大量的国内外资料,对经典内容的阐述,力求以经济问题或几何直观为切入点,深入浅出,简明扼要,张弛适度,同时还增加了数学方法的介绍及其经济方面的应用. 本教材的一个主要特色是在每一章后面都增加了一节与本章内容相适应的经济应用实例,力求数学科学与经济科学相结合,这部分内容既可以在课堂上介绍,也可以在课外讨论,让学生感到数学大有用武之地,主动地发现问题,能动地解决问题,为大学生数学建模竞赛起到了普及与推动作用,并为后续课程的学习奠定良好的基础.

本书共分 6 章，第 1 章行列式，主要内容是行列式的性质、计算方法及克莱姆法则；第 2 章矩阵，主要内容是矩阵及其运算、逆矩阵；第 3 章线性方程组，主要内容是向量的线性相关性及线性方程组解的结构及其解法；第 4 章向量空间，主要内容是向量的内积、正交矩阵及正交变换；第 5 章特征值与特征向量，主要内容是矩阵的特征值与特征向量、相似矩阵和矩阵的对角化；第 6 章二次型及其标准形，主要内容是二次型及其矩阵表示、二次型化为标准形与规范形. 每章最后都有与之相应的应用实例.

本教材在内容上注重线性代数的基本思想，保持经典教材的优点. 贴近生活与经济活动的实际，适当引入经济模型，让数学模型进入课堂，加强应用能力的培养.

本教材的原则是“以应用为目的，以必须够用为度”.

本教材的特点是结构严谨、逻辑清晰、前有孕伏、后有变化、逐步渗透、自然衔接、表达自然、文字流畅、便于自学.

美国卡耐基教学促进会指出：“任何大学都不可能向学生传授所有的知识，大学教育的基本目标是要给学生提供终身学习的能力.”教学创新离不开教材创新，一部好的教材可以引导学生走上成功之路，我们希望本教材的改革能达到这一目的.

本书由李允、吴海燕任主编，刘珊珊、董刚任副主编. 参加编写的院校有：哈尔滨德强商务学院、东北农业大学成栋学院、哈尔滨商业大学广厦学院、哈尔滨理工大学远东学院. 其中第 1 章和第 6 章由董刚编写，第 2 章和第 5 章由刘珊珊编写，第 3 章由吴海燕编写，第 4 章由郝虎建编写，参与编写的还有凌春英、刘辉、李宗秀、陈佳妮、陈雪梅，李允提供并编写各章的应用实例. 全书由主编总纂，修改定稿.

本书在编写过程中得到了哈尔滨德强商务学院副院长于长福教授，基础部主任张永士教授，教务处处长韩毓洁教授，东北农业大学葛家麒教授的宝贵指导和支持，在此一并致以诚挚的谢意.

由于编者水平有限，疏漏和不当之处在所难免，敬请读者不吝赐教，使之日臻完善.

编　者

2010 年 12 月 20 日于哈尔滨

目　　录

第 1 章　行列式 …… 1

1.1　n 阶行列式 …… 1

1.2　行列式的性质 …… 7

1.3　行列式按行(列)展开 …… 12

1.4　克莱姆法则 …… 16

1.5　应用实例:多项式求解与斐波那契数列问题 …… 18

习题一 …… 21

第 2 章　矩阵 …… 25

2.1　矩阵 …… 25

2.2　矩阵的运算 …… 28

2.3　逆矩阵 …… 35

2.4　矩阵的秩 …… 43

2.5　分块矩阵 …… 45

2.6　应用实例:城市通达与信息编码问题 …… 50

习题二 …… 53

第 3 章　线性方程组 …… 58

3.1　消元法 …… 58

3.2　n 维向量 …… 69

3.3　向量组的线性相关性 …… 71

3.4　向量组的秩 …… 77

3.5　线性方程组解的结构 …… 81

3.6　应用实例:投入产出分析、交通流量与气象观测站问题 …… 90

习题三 …… 99

第 4 章　向量空间 …… 104

4.1　向量空间 …… 104

4.2　向量的内积 …… 109

4.3　正交矩阵与正交变换 …… 114

4.4　应用实例:基因距离的度量问题 …… 116

习题四 …… 119

第 5 章　特征值与特征向量 …… 121
5.1　矩阵的特征值与特征向量 …… 121
5.2　相似矩阵和矩阵可对角化的条件 …… 125
5.3　实对称矩阵的对角化 …… 129
5.4　应用实例:受教育程度依赖性与劳动力就业转移问题 …… 134
习题五 …… 137
第 6 章　二次型及其标准形 …… 141
6.1　二次型及其矩阵表示 …… 141
6.2　化二次型为标准形 …… 143
6.3　化二次型为规范形 …… 147
6.4　应用实例:斐波那契数列的矩阵解法与小行星的轨道问题 …… 150
习题六 …… 153
参考答案 …… 155
参考文献 …… 167

第 1 章

Chapter 1

行 列 式

在代数学中,行列式是一个重要的概念,也是一个基本工具. 在实际生产生活中也有广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法以及求解 n 元线性方程组的克莱姆法则,并在最后给出了行列式在实际问题中的应用. 特别强调,本书中除特殊说明,研究的范畴均为实数域 $\mathbf{R}$.

1.1 n 阶行列式

1.1.1 二阶、三阶行列式

考虑如下二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

为了求得方程组(1.1)的解,利用消元法可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为了便于记忆上述解的公式,把方程组(1.1)中未知量的四个系数按原位置排成两行,并在两边加上双竖线,记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

称为**二阶行列式**,其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为二阶行列式(1.3)的**元素**,a_{ij} 的下标 i 表示它所在的行,j 表示它所在的列. 称位于第 i 行第 j 列的元素为二阶行列式的(i,j)元. 称 a_{11} 和 a_{22} 所在的连线为二阶行列式的**主对角线**. 称 a_{12} 和 a_{21} 所在的连线为二阶行列式的**副对角线**. 由二阶行列式的定义可知,二阶行列式(1.3)等于主对角线元素之积减去副对角线元素之积,这个计算方法称为**二阶行列式的对角线法则**.

有了二阶行列式的定义,在式(1.2)中分别记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

D 是由方程组(1.1)中未知量的四个系数所确定的二阶行列式,称为**系数行列式**. D_1 和 D_2 是用方程组(1.1)右端的常数项 b_1,b_2 分别替换系数行列式的第1列和第2列所得到的行列式. 因此,当方程组(1.1)的系数行列式 $D \neq 0$ 时,方程组(1.1)有唯一解,可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1.4}$$

【例1.1】 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \times (-3) - 2 \times (-2) = -5 \neq 0$$

所以方程组有唯一解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-5}{-5} = 1$$

类似地,为了便于求解如下三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.6}$$

称式(1.6)为三阶行列式.

三阶行列式(1.6)由6项构成,每项均为位于不同行不同列的三个元素的乘积. 每项前的正负号可按图1.1所示的三阶行列式的对角线法则来记忆.

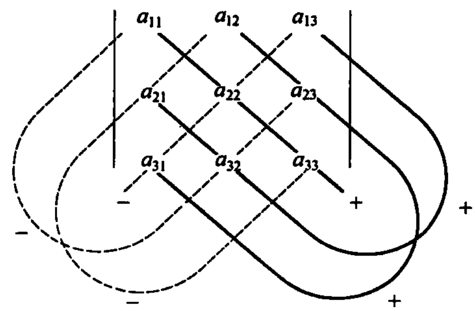


图1.1　三阶行列式的对角线法则

【例1.2】　计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

解　按对角线法则

$$D=2\times(-2)\times(-1)+1\times5\times(-3)+3\times4\times2-3\times(-2)\times(-3)-1\times4\times(-1)-2\times5\times2=4-15+24-18+4-20=-21$$

利用消元法,不难求出方程组(1.5)的解,其结果可以用三阶行列式表示. 当

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时,方程组(1.5)有唯一解.

若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

方程组(1.5)的解可表示为

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1,2,3 \tag{1.7}$$

对照式(1.4),可以发现式(1.4) 与式(1.7) 具有类似的特点. 这种方法同样适用于求取如下 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的解.

【例 1.3】 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 26 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

所以方程组有唯一解,又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \\ 26 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -55, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 16 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 3 & 26 & 1 \end{vmatrix} = -20, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 2 & -4 & 9 \\ 3 & -1 & 26 \end{vmatrix} = 15$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{-55}{-5} = 11, \quad x_2 = \frac{-20}{-5} = 4, \quad x_3 = \frac{15}{-5} = -3$$

1.1.2 排列的逆序数

1.1.1 小节给出的二阶和三阶行列式定义均为位于不同行不同列的元素乘积再冠以正负号作和得到的. 为了将二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式,下面引入排列的逆序数的概念.

定义 1.1 由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个 n 元有序数组 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 称为一个 n 级排列,共有 $n!$ 种.

定义 1.2 考虑排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中的元素 $p_i(i = 1,2,\cdots,n)$,若在 p_i 前面比它大的数有 τ_i 个,就说 p_i 的逆序数是 τ_i. 而排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中全体元素的逆序数之和称为排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的

逆序数,记为$\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)=\sum_{i=1}^{n}\tau_i=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n$.

【例1.4】 1 3 2 是1,2,3 三个数组成的一个排列. 元素1位于排列的首位,逆序数是0;元素3前面没有比它大的数,逆序数是0;元素2前面有一个数3比它大,逆序数是1,所以排列1 3 2 的逆序数是$0+0+1=1$.

定义1.3 逆序数是奇数的排列称为奇排列,逆序数是偶数的排列称为偶排列.

逆序数为零的排列,规定它是偶排列.

如果互换排列中任意两个元素的位置,其余元素不动,就得到了一个新的排列,称这样的互换为**对换**. 如排列1 3 2 中,选择互换3 与1 的位置,得到一个新的排列3 1 2,它的逆序数是$0+1+1=2$. 排列3 1 2是偶排列. 可见,任意互换排列中两个元素,进行一次对换,得到的新排列的奇偶性发生了改变. 一般情况下,对一个排列中任意两个元素进行一次对换,排列奇偶性改变. 所以对换的次数就是奇偶性发生变化的次数,而**自然排列** 1 2 $\cdots$ n 是偶排列,那么一个奇排列变成自然排列要经过奇数次对换,偶排列变成自然排列要经过偶数次对换.

1.1.3 n 阶行列式

有了逆序数的定义就可以解决二阶、三阶行列式中各项的正负号选取问题.

首先分析三阶行列式的特点. 三阶行列式(1.6) 是由所有位于不同行不同列的三个元素乘积再冠以正负号作和得到的,其中每一项都可以写成下述形式:

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} \tag{1.8}$$

当这一项的行标构成自然排列时,其列标构成一排列$p_1\,p_2\,p_3$. 当$p_1\,p_2\,p_3$为偶排列时,项(1.8)冠以正号;当$p_1\,p_2\,p_3$为奇排列时,项(1.8)冠以负号. 因此,项(1.8)前的符号是$(-1)^{\tau(p_1\,p_2\,p_3)}$,且这样项的个数恰为三级排列的总数3! =6个. 所以,三阶行列式也可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{p_1\,p_2\,p_3}(-1)^{\tau(p_1\,p_2\,p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中$\sum\limits_{p_1\,p_2\,p_3}$ 表示$p_1\,p_2\,p_3$取遍所有三级排列时,对形如$(-1)^{\tau(p_1\,p_2\,p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$的项求和.

对于二阶行列式可以进行类似的分析,并可以发现同样的规律. 故自然地可以把二阶、三阶行列式的概念推广到n阶行列式.

定义1.4 n阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$是所有取自不同行不同列的$n$个数的乘积$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$再冠以符号$(-1)^{\tau(p_1\,p_2\,\cdots\,p_n)}$后作和得到的,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $\sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

【例 1.5】 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & x \\ 3 & 4 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解 方程左端是三阶行列式

$$D = 2x^2 + 3x + 12 - 18 - 4x - x^2 = x^2 - x - 6$$

由 $x^2 - x - 6 = 0$,得 $x_1 = -2$ 或 $x_2 = 3$.

【例 1.6】 证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

证明 由 n 阶行列式的定义 $D = \sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$,本题中只有 $p_1 p_2 \cdots p_n = 1\ 2 \cdots n$ 时,乘积 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 才不等于 0,所以 D 中不为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau(1\ 2 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$,故 $D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

n 阶行列式中从左上角到右下角的对角线称为 n 阶行列式的**主对角线**. 对角线上的各元素 $a_{ii}(i = 1,2,\cdots,n)$ 称为**主对角线元素**. 而主对角线以外的元素均为 0 的行列式,称为**对角形行列式**. 由例 1.6,显然对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

【例 1.7】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&2&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0&n-1\\n&0&0&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

解　由 n 阶行列式的定义 $D_n=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，本题中当且仅当 $p_1\ p_2\ \cdots\ p_n=2\ 3\ \cdots\ n\ 1$ 时，乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 才不等于0，故

$$D_n=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}\times1\times2\times\cdots\times n=(-1)^{n-1}n!$$

由于数的乘法满足交换律，所以行列式各项中 n 个元素的顺序也可以任意交换，一般有下面结论.

定理 1.1　n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 的项可以写成

$$(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{q_1p_1}a_{q_2p_2}\cdots a_{q_np_n}\tag{1.9}$$

其中 $q_1q_2\cdots q_n$ 和 $p_1p_2\cdots p_n$ 都是 n 级排列.

证明略.

推论 1　n 阶行列式可以定义为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$$

证明　在定理1.1中，取 $p_1p_2\cdots p_n=1\ 2\ \cdots\ n$，即可证得结论成立.

1.2　行列式的性质

由1.1节中 n 阶行列式的定义可以看出，随着阶数 n 的增加，计算量的增大相当惊人. 为了寻求更方便的计算行列式的方法，下面来研究行列式的性质.

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'，即如果

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\text{则 }D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$