应用型本科院校规划教材/数学

Applied Mathematics Basics On Economics Ⅲ: Probability and Statistics

经济应用数学基础（三）

概率统计

- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业

主编　李　允　侯嫚丹

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

应用型本科院校规划教材/数学

Applied Mathematics Basics On Economics Ⅲ: Probability and Statistics

经济应用数学基础（三）

概率统计

主　编　李　允　侯嫚丹
副主编　刘　辉　裴　魏

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书为应用型本科院校规划教材，是按照传承与改革的精神，依据国家教育部高等教育司审定的“高等学校财经管理类”专业核心课程《经济数学基础教学大纲》，结合编者多年将数学与经济学相结合的教学实践成果编写而成的.

全书共分为9章，分别为概率论的基本概念、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本分布、参数估计、假设检验和回归分析简介. 每章最后都有应用实例.

本书是应用型本科院校经济管理类各专业学生的推荐教材，也可作为相关专业学生的学习参考书和从事经济管理工作人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学基础(三)：概率统计/李允，侯嫚丹主编.
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.2
应用型本科院校规划教材
ISBN 978-7-5603-3189-8

Ⅰ.①经… Ⅱ.①李… ②侯… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材
②概率论-高等学校-教材 ③数理统计-高等学校-教材
Ⅳ.①F224.0 ②O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第018052号

策划编辑 赵文斌 杜 燕
责任编辑 刘 瑶
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 肇东粮食印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张13 字数283千字
版　　次 2011年2月第1版 2011年2月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3189-8
定　　价 24.80元

序

哈尔滨工业大学出版社策划的“应用型本科院校规划教材”即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的“应用型本科院校规划教材”，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科

体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的 PPT 多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

“应用型本科院校规划教材”的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

黑龙江省教育厅厅长

2010 年元月于哈尔滨

前　言

《经济应用数学基础》(包括微积分、线性代数和概率统计三部分内容),是财经管理类的核心课程之一,是一门重要的基础课.这门课程不但为将来从事经济管理工作的学生提供一种定量分析的工具,而且对学生逻辑思维的培养与创新思维的开发起着重要作用.

本书是应用型本科院校规划教材之一,按照传承与改革的精神,结合经管类教学的基本要求编写而成的.

随着大众教育时代的到来,应用型本科教学改革大潮的涌动,如何在教学中推行素质教育,如何培养学生的创新意识与创新精神,如何确保教学质量稳步提高,是我们面临的一个新课题,而教材创新正是该课题中的一个核心内容. 过去我们往往只注重知识体系完整、传授方法得当、思维训练严谨,但有时学生学完数学,只会解题却不会应用,感到数学无用武之地而束之高阁,而真要用的时候便手足无措,之所以形成这种局面,除了受课时和教学方法的固有模式的限制之外,现有的教材过于“阳春白雪”,缺乏实际应用,因此,我们编写了这套教材,作为一种尝试与探索.

随着现代科学技术和经济领域的重大变革与面临的挑战,业已深刻地影响着数学的发展,促进数学能动地向各个领域纵横渗透,近二三十年的变化显得尤为突出,它以千姿百态的形式活跃于自然科学、经济科学、生命科学以及人文科学等研究领域. 特别是一年一度的大学生数学建模竞赛(MCM),为大学生发挥创造性才能提供了一个广阔的平台,为此我们近几年来为数学教学创新先后完成了两个课题:“经济数学课程教学改革全程优化的研究与实践”和“在民办高校大力开展数学建模教育,努力培养应用型创新人才”,力求使常规教学、数学建模、数学实验三者之间相互作用、协调发展、共同提高,激发学生分析问题和解决问题的主动性和能动性,克服学生的依赖心理.

本教材以国家教育部高等教育司审定的“高等学校财经管理类”专业核心课程《经济数学基础教学大纲》为依据,结合应用型本科教育的现实情况,并融进编者多年将数学和经济科学相结合的教学实践的成果,遵循“以应用为目的,以必须够用为度”的原则,借鉴了大量的国内外资料,对经典内容的阐述,力求以经济问题或几何直观为切入点,深入浅出,简明扼要,张弛适度,同时还增加了数学方法的介绍及其经济方面的应用. 本教材的一个主要特色是在每一章后面都增加了一节与本章内容相适应的经济应用实例,力求数学科学与经济科学相结合,这部分内容既可以在课堂上介绍,也可以在课外讨论,让学生感到数学大有用武之地,主动地发现问题,能动地解决问题,为大学生数学建模竞赛起到了普及与推动作用,并为后续课程的学习奠定良好的基础.

本书共分 9 章,第 1 章概率论的基本概念,主要内容是随机事件及其古典概型;第 2 章随机变量及其分布,主要内容是离散型和连续型随机变量的分布函数,随机变量的概率分布及其概率密度;第 3 章二维随机变量及其分布,主要内容是二维离散型和连续型随机变量的联合分布函数,联合概率分布和联合概率密度及其边缘分布;第 4 章随机变量的数字特征,主要内容是离散型和连续型随机变量的数学期望、方差、协方差及相关系数;第 5 章大数定律与中心极限定理,主要内容是切比雪夫不等式,大数定律和中心极限定理;第 6 章样本分布,主要内容是简单随机样本与统计量,抽样分布;第 7 章参数估计,主要内容是点估计和一维随机变量的区间估计;第 8 章假设检验,主要内容是一维随机变量正态总体未知参数的假设检验;第 9 章回归分析简介,主要内容是一元线性回归分析和相关性检验与预测. 每章最后都有与之相应的应用实例.

本教材在内容上注重概率统计的基本思想,保持经典教材的优点. 贴近生活与经济活动的实际,适当引入经济模型,让数学模型进入课堂,加强应用能力的培养。

本教材的原则是“以应用为目的,以必须够用为度”。

本教材的特点是结构严谨、逻辑清晰、前有孕伏、后有变化、逐步渗透、自然衔接、表达自然、文字流畅、便于自学.

美国卡耐基教学促进会指出:“任何大学都不可能向学生传授所有的知识,大学教育的基本目标是要给学生提供终身学习的能力”. 教学创新离不开教材创新,一部好的教材可以引导学生走上成功之路,我们希望本教材的改革能达到这一目的.

本书由李允、侯嫚丹任主编,刘辉、裴巍任副主编. 参加编写的院校有:哈尔滨德强商务学院、东北农业大学成栋学院、哈尔滨商业大学广厦学院、哈尔滨理工大学远东学院. 其中第 1 章和第 7 章由裴巍编写,第 2 章和第 4 章由刘辉编写,第 3 章和第 9 章由侯嫚丹编写,第 5 章由李宗秀编写,第 6 章由刘珊珊编写,第 8 章由凌春英编写,参与编写的还有吴海燕,郎奠波,陈佳妮,陈雪梅,李允提供并编写各章的应用实例,哈尔滨玻璃钢研究院马国峰负责所有图形绘制工作. 全书由主编总纂,修改定稿.

本书在编写过程中得到了哈尔滨德强商务学院副院长于长福教授,基础部主任张永士教授,教务处处长韩毓洁教授,东北农业大学葛家麒教授的宝贵指导和支持,在此一并致以诚挚的谢意.

由于编者水平有限,疏漏和不当之处在所难免,敬请读者不吝赐教,使之日臻完善.

编　者

2010 年 12 月于哈尔滨

目　　录

第1章

Chapter 1

概率论的基本概念

在日常生活中，人们观察到的现象大体上可以分为两类：一类是可以准确预计结果的，即在某种特定的条件下，某种现象必然发生，这类现象称之为**确定现象**. 例如，太阳东升西落；物体抛向高处必然落下；在1个标准大气压下，纯水在零摄氏度就开始结冰；磁铁同极相互排斥，异极相互吸引等. 另一类现象与确定现象正好相反，它们不能准确地预计结果，即每次观察的结果都可能不相同，这类现象称之为**随机现象**. 例如，抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面向上，也可能是反面向上；在相同条件下，测试10只灯泡，观察其正常工作的个数，结果有可能为0,1,…,10；在经济方面，保险业务的增长、银行利率的变化也是不能准确预计的. 但是，通过大量的观察、试验和深入的分析，发现随机现象的结果虽然不确定，但也存在着某种规律. 例如，重复地抛掷一枚质地均匀的硬币，其正面向上和反面向上的次数之比接近1∶1；通过精确分析，也能发现经济现象中的某种规律性的东西，从而指导生产生活. 正如恩格斯所说，在表面是偶然性起作用的地方，这种偶然性始终是受内部隐蔽着的规律支配的，而问题是在于发现这些规律.

这种随机现象中呈现出的规律性，称之为**随机现象的统计规律**. 概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的一门学科.

1.1 随机事件与样本空间

1.1.1 随机试验

试验是一个广泛的术语，在自然界和人类社会中，把对某一现象的一次观察称为**一次试**

验.例如：

(1)抛一枚硬币，观察其是正面向上，还是反面向上；

(2)抛掷一颗骰子，观察其出现的点数；

(3)单位时间内，观察某个服务器接收到的请求次数；

(4)观察某校大一新生的身高情况.

上述试验有着共同的特点.首先是其观察的结果不确定，但却可以知道试验所有可能的结果.例如，抛掷一颗骰子，它的结果不确定，但只可能是1点到6点中的一个；测量一批大一新生的身高，测量值也不确定，但却在一定的范围内变化.其次是这些现象在一定条件下都可以重复地观察.综上所述，这些例子有以下特点：

(1)试验在相同的条件下可以重复进行；

(2)试验的所有可能结果都明确，但不唯一；

(3)试验前不能预计哪一个结果会出现.

在概率论与数理统计中，把具有以上特点的试验称为**随机试验**，通常用字母 E 表示.

1.1.2 随机事件及其相关概念

随机试验 E 的所有可能结果是明确的，对于 E 中的每一个可能的基本结果(不可分割)称为**基本事件**，一般用 $\{e\}$ 表示.基本事件对应的元素称为**样本点**，一般用 e 表示. E 中所有样本点的集合称为**样本空间**，用 Ω 表示.基本事件与样本空间的关系，可以表示为 $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots\}$.

下面写出引例中的基本事件和样本空间：

(1) 抛一枚硬币，出现的结果可能有两种，令 e_1 表示“正面向上”，e_2 表示“反面向上”，则 $\{e_1\}$，$\{e_2\}$ 为基本事件，$\Omega=\{e_1,e_2\}$ 为样本空间.

(2) 掷一颗骰子，出现的点数可能有6种，分别是1，2，…，6，可以令 $e_i=i(i=1,2,\cdots,6)$，则 $\{e_i\}$ 为基本事件，$\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_6\}=\{1,2,\cdots,6\}$ 为样本空间.

(3) 单位时间内，服务器接收到的请求次数可能为0，1，2，…，可以令 $e_i=i(i=0,1,2,\cdots)$，则 $\{e_i\}$ 为基本事件，$\Omega=\{e_0,e_1,e_2,\cdots\}=\{0,1,2,\cdots\}$ 为样本空间.

(4) 观察某校大一新生的身高情况，以 m 为单位.从新生中挑选一位同学，以 h 表示其身高，则可以把在一定范围内的任意实数视为基本事件，样本空间可以用 $\Omega=\{h\mid 0.5<h<2.5\}$ 表示.

在上述例子中，(1)、(2) 的样本空间由有限个样本点组成；(3)、(4) 的样本空间由无限个样本点组成，且(3) 中的样本点为可列无穷多个，(4) 中的样本点为不可列无穷多个.

在随机试验 E 中，把由一些样本点构成的集合称为**随机事件**，简称事件，用 $A,B,C,\cdots$ 表示.这些集合中的样本点往往带有某些共同的特征.例如，对于掷骰子的试验，可以把“出现偶数点”的情况定义为一个随机事件.定义事件 A 表示“出现偶数点”，则记 $A=\{2,4,6\}$，可以看出事件 A 是由三个样本点组成.也可以定义事件 B 表示“出现2点”，则记 $B=\{2\}$.从以上事件

A,B 的定义可以看出,定义一个事件,可以用文字描述的方式,也可以写成样本点的集合的形式.

随机事件作为样本点的集合,当是所有样本点构成的集合时,它就是样本空间;当是一个样本点构成的集合时,就是基本事件. 所以,从集合的观点来看,基本事件是随机事件的子集,随机事件又是样本空间的子集.

当随机试验 E 的结果是 A 中的样本点时,称为**事件 A 发生**. 例如,掷骰子的试验,事件 A 表示"出现偶数点",那么当试验结果出现 2 点时,事件 A 发生,当试验结果出现 3 点时,事件 A 就没有发生.

每次试验中一定发生的事件,称为**必然事件**,用 Ω 表示. 试验中一定不发生的事件,称为**不可能事件**,用 $\varnothing$ 表示. 由于样本空间是所有基本事件的集合,那么每次试验的结果必然出现在样本空间中,所以如果把样本空间看做事件,就是必然事件,从符号的表示上也可以看出这一点. 需要指出的是,必然事件与不可能事件是每次试验之前就可以准确预计的,其结果不具有随机性,但是为了讨论问题方便,也可以将它们看成是随机事件.

1.1.3　事件间的关系及运算

随机事件是一个由样本点组成的集合,因而事件间的关系可以和集合间的关系进行类比. 此外,还可以用图的形式来模拟事件间的关系,用一个矩形来代表样本空间,用若干个圆来代表随机事件,以圆之间的关系类比事件间的关系,这类图形叫做**文氏(Venn)图**.

1. 事件间的关系

(1) 包含关系. 对于同一个随机试验 E 中的两个随机事件 A,B,事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称**事件 A 包含于事件 B**,记为 $A \subset B$. 事件间包含的含义是属于 A 的样本点同时也属于 B,即事件 A 是事件 B 的子集,如图 1.1 所示.

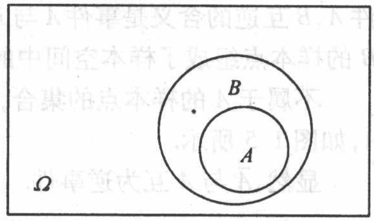

图 1.1

显然对于任意的事件 A,有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

特殊地,还可以给出事件相等的概念. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则 $A = B$,即事件 A 和事件 B 中含有相同的样本点.

(2) 和事件(事件的和). 事件 A,B 至少有一个发生(A 发生或者 B 发生)所构成的事件,称为**事件 A 与 B 的和事件**,记为 $A+B$ 或 $A \cup B$,如图 1.2 所示. 和事件的含义是属于 A 的样本点或属于 B 的样本点组成了 $A+B$ 的样本点,即事件 A 与 B 的和事件为 A 与 B 的并集,即 $A+B=\{e \mid e \in A \text{ 或 } e \in B\}$.

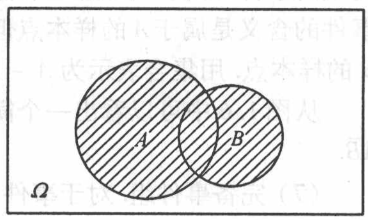

图 1.2

显然,$A \subset A+B, B \subset A+B$.

类似地,可以定义 n 个事件的和事件.

事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生所构成的事件称为它们的和事件,记为$A_1+A_2+\cdots+A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 当$n\to\infty$时,此式为**可列个事件的和事件**.

(3) 积事件(事件的积). 事件A,B同时发生所构成的事件,称为**事件A与B的积事件**,记为AB或$A\cap B$,如图1.3所示. 积事件的含义是属于A的样本点且属于B的样本点组成了AB的样本点,即事件A与B的积事件为A与B的交集,即$AB=\{e\mid e\in A且e\in B\}$.

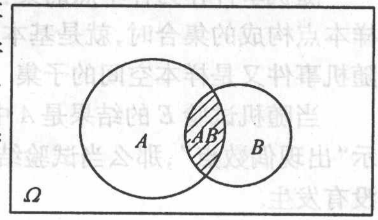

图 1.3

显然,$AB\subset A,AB\subset B$.

类似地,可以定义n个事件的积事件. 事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生所构成的事件为它们的积事件,记为$A_1A_2\cdots A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 当$n\to\infty$时,此式为**可列个事件的积事件**.

(4) 互斥事件. 事件A,B不能同时发生,即$AB=\varnothing$,**称事件A与事件B互斥或互不相容**,如图1.4所示. 事件A,B互斥的含义是A与B没有相同的样本点.

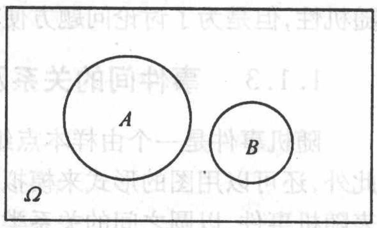

图 1.4

显然,基本事件是两两互斥的.

(5) 互逆事件. 事件A,B必有且只有一个发生,即$AB=\varnothing$,且$A+B=\Omega$,**称事件A与事件B互为逆事件或对立事件**. 事件A,B互逆的含义是事件A与B没有相同的样本点,而且A与B的样本点组成了样本空间中的样本点.

不属于A的样本点的集合,构成了事件A的逆事件,记为$\bar{A}$,如图1.5所示.

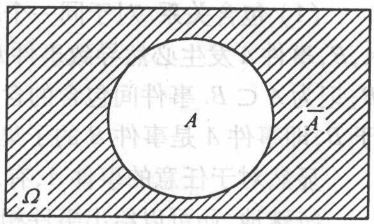

图 1.5

显然,$\bar{A}$与A互为逆事件.

一般地,$\bar{\Omega}=\varnothing,\bar{\varnothing}=\Omega$,若$A\subset B$,则$\bar{A}\supset\bar{B}$.

(6) 差事件(事件的差). 事件A发生但是事件B不发生所构成的事件称为**A与B的差事件**,记为$A-B$,如图1.6所示. 差事件的含义是属于A的样本点但不属于B的样本点构成了$A-B$的样本点. 用集合表示为$A-B=\{e\mid e\in A且e\notin B\}$.

从图1.6中可以看出一个简单的关系式:$A-B=A-AB=A\bar{B}$.

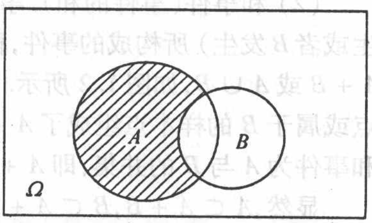

图 1.6

(7) 完备事件组. 对于事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$,若$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$且$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,称$A_1,A_2,\cdots,A_n$为一个**完备事件组**. 完备事件组

的含义是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，且它们的和事件为必然事件.

【例1.1】　同时掷两颗骰子，观察它们的点数之和. 定义事件 A 表示“点数和为2的倍数”，B 表示“点数和为3的倍数”，C 表示“点数和最大”，D 表示“点数和最小”. 请表示事件 (1)$A+C$；(2)AB；(3)CD；(4)$A-B$；(5)$\bar{A}$.

解　根据题意，可以写出事件 A,B,C,D.

$A=\{2,4,6,8,10,12\}$，$B=\{3,6,9,12\}$，$C=\{12\}$，$D=\{2\}$，由定义有

(1)$A+C=\{2,4,6,8,10,12\}$；

(2)$AB=\{6,12\}$；

(3)$CD=\varnothing$；

(4)$A-B=\{2,4,8,10\}$；

(5)$\bar{A}=\{3,5,7,9,11\}$.

2. 事件间的运算

(1) 交换律

$$A+B=B+A, AB=BA$$

(2) 结合律

$$(A+B)+C=A+(B+C),(AB)C=A(BC)$$

(3) 分配律

$$(A+B)C=AC+BC,(AB)+C=(A+C)(B+C)$$

(4) 对偶律

$$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B},\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$$

对偶律可以推广到有限个事件的情形

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}A_i}=\prod_{i=1}^{n}\overline{A_i},\overline{\prod_{i=1}^{n}A_i}=\sum_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

【例1.2】　A,B,C 为3个随机事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件.

(1)A,C 发生，但 B 不发生；

(2)A,B,C 至少有一个发生；

(3)A,B,C 至少有两个发生；

(4)A,B,C 至多有一个发生；

(5)A,B,C 至多有两个发生；

(6)A,B,C 恰好有两个发生.

解　此题考察对事件间关系的理解，对此加以分析.

(1)“A,C 发生，但 B 不发生”是 A 与 $\bar{B}$ 与 C 的积事件，可表示为 $A\bar{B}C$.

(2)“A,B,C 至少有一个发生”就是 A 发生或 B 发生或 C 发生，可表示为 $A+B+C$.

(3)“A,B,C 至少有两个发生”可理解为 AB 发生或 BC 发生或 AC 发生或 ABC 发生,可表示为 $AB+BC+AC+ABC$.

实际上,$AB+BC+AC$ 已经包含了 ABC 发生的情况,所以(3)也可以简单地表示为 $AB+BC+AC$.

(4)“A,B,C 至多有一个发生”意思是只有一个事件发生或者都没有发生,可表示为 $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

事件 A,B,C 发生包含了四种情况:“都没有发生”、“恰有一个发生”、“恰有两个发生”、“恰有三个发生”. 此问中包含了前两种情况,可以用后两种情况的逆事件表示,而后两种情况可概括为 A,B,C 至少有两个发生,故“A,B,C 至多有一个发生”还可以表示为 $\overline{AB+BC+AC}$.

(5)“A,B,C 至多有两个发生”包含了三种情况:“都没有发生”、“恰有一个发生”、“恰有两个发生”,所以可以用第四种情况“恰有三个发生”的逆事件来表示,即 $\overline{ABC}$.

“至多有两个发生”还可以理解为“至少有一个不发生”,表示为 $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$.

(6)“A,B,C 恰好有两个发生”说明当其中有两个发生时,另一个一定不发生,表示为 $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$.

1.2 概率的定义

对于一个随机事件,在一次试验中可能发生,也可能不发生,试验前不能预计结果. 在概率论中,不仅关心事件的发生与否,还关心事件发生可能性的大小. 概率正是用来刻画随机事件发生可能性大小的度量.

在现实生活中,经常接触到“彩票中奖率”、“药物有效率”、“射击命中率”等带有“率”字的词语. 这些“率”反映的恰恰是可能性的大小. 概率是随机事件 A 发生可能性大小的度量,度量值就是事件 A 的概率,记为 $P(A)$.

本节将介绍概率的两种定义方式以及概率公理化定义.

1.2.1 频率与概率

一般来说,单凭一次随机试验是不容易估计随机事件发生的可能性大小的. 但如果多次重复地进行试验,事件的发生就会呈现出一定的统计规律. 为此,引入频率的概念,它描述的是多次试验中事件发生的频繁程度. 所以,经过多次重复试验,如果频率趋于稳定,那么就可以用频率来度量随机事件发生可能性的大小,即用频率来逼近概率.

定义 1.1 在相同条件下,重复进行 n 次试验,如果事件 A 发生了 k 次,则称 k 为事件 A 发生的频数,k/n 为事件 A 发生的频率,记为

$$f_n(A)=\frac{k}{n} \tag{1.1}$$

通常情况下，经过多次试验，频率可以反映出随机事件发生的固有属性，也就是说，频率会呈现出一定的统计规律. 例如，历史上的一些数学家对抛硬币的试验进行过统计. 表1.1为抛硬币试验.

表1.1

试验者	抛掷次数	正面向上	频率
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
浦丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

由以上数据可以看到，事件A表示"正面向上"发生的频率$f_n(A)$虽然不同，但都接近于0.5这个数值，而且随着随机试验次数的增多，越来越接近0.5. 所以，可以认为数值0.5反映了事件A发生可能性的大小.

定义1.2　在相同条件下，重复进行大量试验，如果事件A发生的频率$f_n(A)=k/n$稳定在某个p值附近，则把p值作为事件A发生的概率，记为$P(A)=p$.

上述定义称为概率的统计定义，因为它基于大量重复试验. 统计定义在理论上是有缺陷的，一般来说，统计概率值只会越来越接近概率，但究竟n取多大，才能有效地定义概率. 在概率的计算上，不可能对每一个事件进行大量的试验. 所以下面给出一种概率模型，从理论分析上求得概率.

1.2.2　概率的古典概型定义

古典概型是概率论历史上最早且最常用的概率模型. 它无需大量的试验，而是对试验进行理论分析，进而得到事件发生的概率.

在1.1节中，引入了"抛硬币"、"掷骰子"的试验，可以看出它们具有如下特点：

(1) 样本空间中含有有限个基本事件，称为**有限性**；

(2) 样本空间中每个基本事件出现的可能性相同，称为**等可能性**.

具有以上两个特点的试验模型，称为**古典概型**，也称为**等可能概型**.

定义1.3　随机试验为古典概型，若样本空间中含有n个基本事件，随机事件A中含有k个基本事件，则随机事件A发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{中所含基本事件数}}{\Omega\text{中所含基本事件总数}}=\frac{k}{n} \tag{1.2}$$

从定义中可以看出，计算事件的概率，首先要明确概率模型为古典概型；其次还要确定Ω中的基本事件总数和A中的基本事件数.

【例1.3】　盒中有6个红球和4个白球. 现以下列方式从中取球. 方式Ⅰ：有放回抽样（即

一次取出一个球,观察其颜色后放回盒中,再取第二个球). 方式Ⅱ:无放回抽样(即一次取一个球不放回盒中,再从余下的球中取第二个球). 求(1) 取到两个红球的概率;(2) 取到两个不同颜色的球的概率.

解 设事件 A 表示"取到两个红球",B 表示"取到两个不同颜色的球"

对于方式Ⅰ:从10个球中有放回地抽取2个球,Ω 中所含的基本事件总数为10^2,A 中所含的基本事件数为 6^2,B 中所含的基本事件数为 $6\times4+4\times6$,所以

$$P(A)=\frac{6^2}{10^2}=\frac{9}{25},P(B)=\frac{6\times4+4\times6}{10^2}=\frac{12}{25}$$

对于方式Ⅱ:从10个球中无放回地抽取2个球,Ω 中所含的基本事件总数为 C_{10}^2,A 中所含的基本事件数为 C_6^2,B 中所含的基本事件数为 $\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_4^1$,所以

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_6^2}{\mathrm{C}_{10}^2}=\frac{1}{3},P(B)=\frac{\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_{10}^2}=\frac{8}{15}$$

【例1.4】(分房间问题) 有 N 个房间分给 n 个人($N\geqslant n$),每个人进入 N 个房间的概率都相同且每个房间的人数没有限制. 求(1) 指定 n 个房间各有1人的概率;(2) 每个房间不超过1人的概率;(3) 某指定房间恰好有 $k(k<n)$ 人的概率.

解 设事件 A 表示"指定 n 个房间各有1人",B 表示"每个房间不超过1人",C 表示"某指定房间恰好有 k 人"

根据题意,将 N 个房间分给 n 个人,共有 N^n 种分法,即 Ω 中所含的基本事件总数为 N^n.

(1)"指定 n 个房间各有1人",其中"指定" 两个字说明房间不用挑选,n 个房间各有1人就相当于对 n 个人做了一个全排列,共有 $n!$ 种分法,即 A 中所含的基本事件数为 $n!$,所以

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

(2)"每个房间不超过1人" 与 A 的区别仅在于房间没有指定,所以应该首先选定房间,然后每个房间再安排1人,其分法有 $\mathrm{C}_N^n n!$,即 B 中所含的基本事件数为 $\mathrm{C}_N^n n!$,所以

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_N^n n!}{N^n}$$

(3)"某指定房间恰好有 k 人",先从 n 个人中选出 k 人安排进入指定房间,再把其余 $n-k$ 个人安排进入余下的 $N-1$ 个房间,共有 $\mathrm{C}_n^k(N-1)^{n-k}$ 种分法,即事件 C 中所含的基本事件数为 $\mathrm{C}_n^k(N-1)^{n-k}$,所以

$$P(C)=\frac{\mathrm{C}_n^k(N-1)^{n-k}}{N^n}$$

【例1.5】 一批20个产品中有4个次品,从这批产品中任取5个. 求其中恰有2个次品的概率.

解 设事件 A 表示"产品中取5个,其中恰有2个次品".