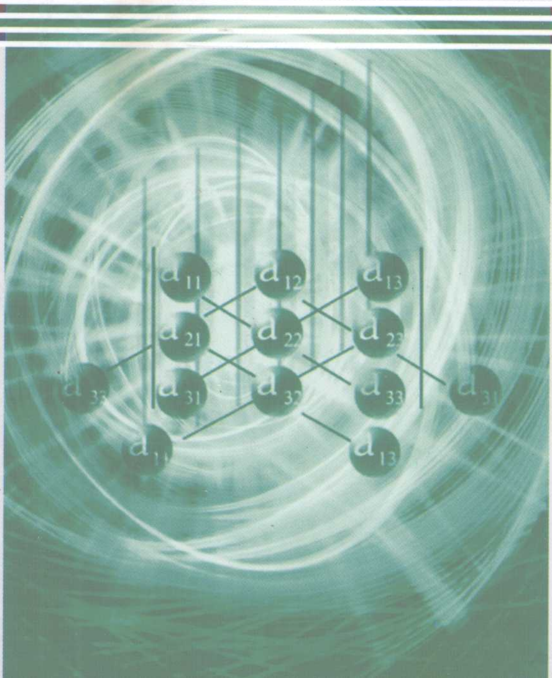
应用型本科院校规划教材

主编　郭润喜　王晓春

线性代数

Linear Algebra



- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业

哈爾濱工業大學出版社

应用型本科院校规划教材

主　编　郭润喜　王晓春
副主编　王丽凤　付吉丽

线性代数

Linear Algebra

哈尔滨工业大学出版社

内容简介

本教材依据工科类本科线性代数课程教学基本要求，并在编者多年课堂教学实践的基础上编写而成. 符合独立学院及应用学院的大多数普通高等院校的办学定位和人才培养目标. 本书涵盖了行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换等内容.

本书可供应用型本科院校各专业学生及工程类、经济管理类院校学生使用，也可供科技人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/郭润喜，王晓春主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.2

应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-5603-3190-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①郭… ②王… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第018051号

策划编辑 赵文斌 杜 燕

责任编辑 王勇钢

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006

传 真 0451-86414749

网 址 http://hitpress.hit.edu.cn

印 刷 东北林业大学印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张12.75 字数229千字

版 次 2011年2月第1版 2011年2月第1次印刷

书 号 ISBN978-7-5603-3190-4

定 价 26.00元

序

哈尔滨工业大学出版社策划的“应用型本科院校规划教材”即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的“应用型本科院校规划教材”，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

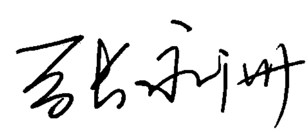
本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用

讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的 PPT 多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

“应用型本科院校规划教材”的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

黑龙江省教育厅厅长



2010 年元月于哈尔滨

前　言

本教材依据工科类本科线性代数课程教学基本要求，并在编者多年课堂教学实践的基础上编写而成。符合独立学院及应用学科的大多数普通高等院校的办学定位和人才培养目标。考虑到工科学生的实际情况，本教材行文力求通俗易懂和实用，为了方便学生自学，对于某些比较复杂的证明也给出了详尽的证明。并且范例比较多，以便学生更好地理解本书的理论知识。在考虑课程自身的系统性和科学性的基础上，突出其应用性。内容安排由浅入深，先直观，后抽象，注重基本概念、基本方法和基本运算，书中基本概念的引入，力求直观，尽量减少其抽象性。本书涵盖了行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换等内容。

讲授本课程大约为 34 学时（选修）或 42 学时（必修），使用者可依据本校情况相应处理。

由于编者水平所限，书中不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2010 年 7 月

目　　录

第 1 章

行列式

1.1　n 阶行列式

1.1.1　引言

解方程与解线性方程组是代数的基本问题. 对于一个线性方程组我们所关注的问题主要是:一个线性方程组是否有解,在有解的时候它会有多少解,如何求出它的解. 所有这些问题的解决都要涉及行列式以及矩阵的理论. 在本章我们先解决关于 n 阶行列式的有关理论与方法. 对于行列式运算比较重要的 Cramer 法则,本书将在 2.2 节给出.

1.1.2　排列

1. 排列

n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列是指由这 n 个数码组成的一个有序组,例如1234,2341 都是四个数码的排列.

n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 的全部排列共有 $n!$ 个.

2. 反序与反序数

在一个排列里,如果较大的数码排在较小的数码前面,我们就说这两个数码构成了一个反序. 一个排列里反序的个数叫做这个排列的反序数.

计算一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的反序数的方法是:先从数码1开始,看在1的前面有几个数码比它大记为 m_1,划去数码1;再看在数码2的前面有几个数码比它大记为 m_2,……,以此类推,直到划去排列中最大的数码为止. 于是该排列的反序数是

$$\pi(i_1i_2\cdots i_n) = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

例 1　计算下列排列的反序数:

(1)523146 与 623145;

(2)$n,n-1,\cdots,2,1$;

(3)$2k,1,2k-1,2,\cdots,k+1,k$.

解　(1)$\pi(523146) = 3+1+1+1+0+0 = 6$;$\pi(623145) = 3+1+1+1+1+$

$0 = 7$.

(2)$\pi(n,n-1,\cdots,2,1) = (n-1)+(n-2)+\cdots+1+0 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(3)$\pi(2k,1,2k-1,2,\cdots,k+1,k) = (1+2+3+\cdots+k)+(0+1+2+\cdots+k-1) = k^2$.

如果一个排列的反序数是偶数，就称这个排列是偶排列，否则称为奇排列. 例如523146就是一个偶排列，623145就是一个奇排列.

如果交换一个排列中两个数码的位置，就说对该排列施行了一个对换，例如排列623145就是由排列523146施行了一个对换($5\leftrightarrow6$)得到的. 从例题1的计算中我们可以看到排列523146是偶排列，而排列623145是奇排列. 这表明对一个排列施行了一个对换，改变了该排列的奇偶性.

n个数码$1,2,\cdots,n$的全部排列共有$n!$个，其中奇排列与偶排列各有$\dfrac{n!}{2}$个. 我们可以证明这个结论.

设奇排列个数为p，偶排列的个数为q.

对这p个奇排列施行同一个对换，则得到p个偶排列，于是$p\leqslant q$；同样地对这q个偶排列施行同一个对换，则得到q个奇排列，于是$q\leqslant p$.

综合有$p = q = \dfrac{n!}{2}$.

1.1.3 置换

将两个n阶排列写成$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$的形式就得到一个$n$阶置换. 我们约定，一个$n$阶置换总是写成$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$的形式. 于是$n$阶置换个数也是$n!$个.

例如，三阶置换为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

共6个.

如果一个置换的上下两个排列的反序数之和是偶数(或奇数)，则称该置换为偶置换(或奇置换). 一个固定的置换实质就是一个一一映射，当对置换的第一行的排列施行一个对换时，它的下面一行的排列也会相应地施行对换，保持着对应关系不变. 因此有下面的性质.

性质1 设对置换$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$的第一行施行对换得到$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$的奇偶性与$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$的奇偶性完全相同.

证明 事实上，设对排列$i_1i_2\cdots i_n$施行了m次对换得到排列$12\cdots n$，则$j_1j_2\cdots j_n$也相应

地施行了 m 次对换得到 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，因此前后两个置换的上下两个排列的反序总数之和相差 $2m$，故前后两个置换的奇偶性没有变化.

性质 2 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$奇偶性相同.

证明　显然$(-1)^{\pi(i_1i_2\cdots i_n)+\pi(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)+\pi(i_1i_2\cdots i_n)}$，所以命题成立.

一般地，我们总把一个置换写成$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$的形式.

性质 3　将一个置换的第一行进行一个对换，而另一行的排列顺序不变，则改变这个置换的奇偶性.

证明　必须注意，当将一个置换的第一行进行一个对换，而另一行的排列顺序不变时，这已经不是原来的那个置换了. 这时第一行排列的奇偶性发生了改变，而另一行排列的奇偶性没发生改变，所以这个新的置换的奇偶性发生了改变.

1.1.4　二、三阶行列式

一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

它的系数排列成正方形，再加两条竖线就得到二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

一个三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}z + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

它的系数排列成正方形，再加两条竖线就得到一个三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

二阶行列式的计算方法如下

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式的计算方法就是所谓的对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

探求上面二、三阶行列式的展开方法，我们可以得到下面的结论：

(1) 二阶行列式有 $2!$ 项;三阶行列式有 $3!$ 项.

(2) 每一项的构成都是不同行不同列元素的乘积.

(3) 每一项的符号是 $(-1)^{\tau}$,τ 是由组成每一项元素的行标组成的排列在上,列标组成的排列在下构成的置换的反序数之和.

例如,三阶行列式的项 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 的行列组成的置换是 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$,$\tau=0+2=2$,所以符号为正;$a_{12}a_{21}a_{33}$ 的行列组成的置换是 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$,$\tau=0+1=1$,所以符号为负.

由此就可以定义 n 阶行列式了.

1.1.5 n 阶行列式

定义 1 将 n^2 个数排列成 n 行 n 列,并加左右两道竖线

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

组成一个 n 阶行列式,它是一个代数和.

(1) 共有 $n!$ 项.

(2) 每一项的构成是由行列式中不同行不同列的元素的乘积,就是 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$.

(3) $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau}$,$\tau=\pi(12\cdots n)+\pi(k_1k_2\cdots k_n)$,于是

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{(k_1k_2\cdots k_n)}(-1)^{\tau}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

我们把横的叫行,竖的叫列,项 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ 中前面的足标对应着该元素所在的行,后面的足标对应着该元素所在的列.

例 2 证明: $\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证明 由定义可知行列式的每一项的构成是 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$,第一行只能选取 a_{11},因为其余各项都为零.

选取第二行的元素有两个选项,即 a_{21} 与 a_{22},但是 a_{21} 所在的列已经选取,故只能选择 a_{22},…… 考虑第 i 行元素的选择,有 i 个选项,即 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ii}$,由于 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{i,i-1}$ 所在的列已经选取,故只能选择 a_{ii},以此类推可得到结论.

同理有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上面的行列式叫三角行列式,今后我们进行行列式计算时总是把它化成三角行列式.

例3 证明:$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$.

证明 由例题2可知 D 中不为零的项只有 $a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$,而这一项的符号为 $(-1)^{\pi(n,n-1,\cdots,2,1)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,所以命题成立.

例4 求 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x+3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 3x+3 & 8 \\ 4 & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}$ 中 x^2 的系数.

解 含有 x^2 的项只能出现在含有 $a_{13}a_{44}$ 与含有 $a_{33}a_{44}$ 的项中,由

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

可知含有 $a_{13}a_{44}$ 的项有

$$(-1)^{\pi(3124)}a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} = (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} = a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$$

和 $$(-1)^{\pi(3214)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} = (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} = -a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$$

注意到 $a_{13} = x+3, a_{21} = 0$,所以

$$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} = 0$$

$$a_{13} = x+3, a_{22} = 2, a_{31} = 3, a_{44} = 4x+4$$

所以 $-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ 中 x^2 系数 $=-24$.

同理由置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 中的对应关系,可知含有 $a_{33}a_{44}$ 的项有

$$(-1)^{\pi(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

和 $$(-1)^{\pi(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$$

注意到

$$a_{11} = 1, a_{22} = 2, a_{33} = 3x+3, a_{44} = 4x+4$$

所以 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 中 x^2 系数 $=24$,而

$$a_{12} = 2, a_{21} = 0$$

所以 $-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ 中 x^2 系数 $=0$.

综合有 $f(x)$ 中 x^2 系数 $=-24+24=0$.

1.2 n 阶行列式的性质及计算

1.2.1 n 阶行列式的性质

关于 n 阶行列式的性质，由于学时有限，可以述而不证.

性质 1 把行列式 D 的行换成相应的列，就得到 D 的转置行列式，记做 D^{T}，并且有 $D=D^{\mathrm{T}}$. 即，若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(k_1k_2\cdots k_n)}(-1)^{\tau}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(k_1k_2\cdots k_n)}(-1)^{\tau}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}$$

证明 由定义可知两者的项数都是 $n!$，即项数相同. 另外考虑项 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$，它是 D 中的一项，它的元素位于 D 的不同行不同列，也位于 D 的不同列不同行，所以也是 D^{T} 的一项，由置换的性质可知，这一项在 D 中的符号是 $(-1)^{\pi(k_1k_2\cdots k_n)}$，在 D^{T} 中的符号也是 $(-1)^{\pi(k_1k_2\cdots k_n)}$，反过来，$a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}$ 是 D^{T} 的一项，也是 D 中的一项，并且符号相同，所以 D 与 D^{T} 是带有相同符号的相同项的代数和，所以 $D=D^{\mathrm{T}}$.

有了这个性质，行列式的其他性质对行成立的，对列也成立，所以对其他性质我们只对行的情况加以证明即可.

性质 2 交换一个行列式的两行（或者两列），行列式改变符号一次.

证明 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D 中的每一项可以写成 $a_{1k_1}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{nk_n}$，由于这一形的元素位于 D_1 不同行不同列，所以也是 D_1 中的项，反过来 D_1 中的项也是 D 中的项，并且 D 中的不同项对应着 D_1 中的不同项，因此两者具有完全相同的项.

$a_{1k_1}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{nk_n}$ 在 D 中的符号是 $(-1)^{\pi(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}$，在 D_1 中，原来行列式的第 i 行换成了第 j 行，第 j 行元素换成了第 i 行，而列的次序没变，所以由置换的性质有 $a_{1k_1}\cdots a_{jk_i}\cdots a_{ik_j}\cdots a_{nk_n}$ 的符号为 $(-1)^{\pi(1\cdots j\cdots i\cdots n)+\pi(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)} = (-1)^{\pi(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)+1}$，因此在 D_1 中符号与在 D 中的符号相反，所以行列式改变符号一次.

性质 3 如果一个行列式的两行(列) 完全相同，那么这个行列式等于零.

证明 由性质 2 可知交换行列式中相同两行，则改变符号，但是，被交换的这两行完全一样，实际上等于没有交换，所以有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 4 把一个行列式的某一行(列) 的所有元素同乘以一个数 k，等于这个数 k 乘以行列式.

证明 设把行列式 D 的第 i 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 乘以 k 而得到行列式 D_1，那么 D_1 的第 i 行元素是 $ka_{i1},ka_{i2},\cdots,ka_{in}$.

D 的每一项可以写做 $a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$，在 D 中的符号是 $(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}$.

D_1 的每一项可以写做 $a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} = k(a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n})$，在 D_1 中的符号是 $(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}$.

所以 $D_1=kD$.

推论 1 一个行列式的某一行(列) 所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2 如果一个行列式的某一行(列) 所有元素都是零，那么这个行列式等于零.

推论 3 如果一个行列式的某两行(列) 的对应元素成比例，那么这个行列式等于零.

性质 5 设一个行列式的第 i 行(列) 的所有元素都可以表示成两项的和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

那么

$$D=D_1+D_2$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 D 的每一项可以写成 $(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$，去掉括号得

$$(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}=$$
$$(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$ 是 D_1 的一般项，$(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$ 是 D_2 的一般项，所以 $D=D_1+D_2$.

性质 6 把一个行列式的某一行(列)的元素乘以同一个数后加到另一行(列)对应的元素上,行列式不变.

证明 设给定的行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 的第 j 行的元素乘以 k 后加到第 i 行得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 5

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D$$

我们给出几个利用行列式性质简化行列式计算的例子. 约定,用下面的符号表示行列式的变化:

(1) 用 r_i 表示行列式的第 i 行,用 c_j 表示行列式的第 j 列;

(2) $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示两行互换;

(3) 用 r_i+kr_j 表示把行列式的第 j 行元素乘以数 k 后加到第 i 行的对应元素上.

例 1 计算 $D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 \end{vmatrix}$.

解 c_2-c_1, c_3-c_1,得