

普通高中课程标准实验教科书

**数学**  
SHUXUE

**2**

(必修)

# 教师教学 用书

湖北教育出版社数学教材编写组 编著





# 说 明

为了配合湖北教育出版社出版的《高级中学课程标准实验教科书·数学》的教学实践,我们编写了这套教师用书。

编写教师用书的目的在于,为教师选取素材提供资源,为设计教学提供参考,也为教师处理教学问题提供服务,帮助老师们在充分考虑数学学科特点和高中生心理特点的前提下,运用多种教学方法和手段,实现课程目标。

编写教师用书的目的在于,与老师们沟通,呈现我们将课程标准转化为教材的心路历程;交流编写意图,特别是在贯彻基本理念、处理某些矛盾时的所思所为,从而对教科书的指导思想 and 主要特点形成共识,促使教师创造性地使用教材。

编写教师用书的目的在于,以教科书为载体,从教学的基本问题出发,和老师们一起,共同领会课程标准的基本精神,立足于以人为本,发展和完善人的高度,构建现代理念下的课堂教学。

本套教师用书一般以教科书的章为单元编写,每章由教育价值、教学目标、教材结构、课时分配、内容分析、相关资源、评价建议和习题解答八部分构成。

**教育价值:**是课程目标在本章的具体化,也是课程设计中确定本章为教学内容的理由。

**教学目标:**是本章要达到的基本目标,它比课程标准中《内容与要求》要具体些。

**教材结构:**主要介绍三个方面:知识如何定位,教材怎样展开,有何特点。

**课时分配:**对每一小节所需的**教学课时数**作了大致的估计。

**内容分析:**一般按章头语、各大节逐次展开。每大节包括三个项目:内容概述及基本要求、重难点分析和教学建议。其中教学建议是主体,阐述教学中应该强调什么,注意什么,例题的功能及其处理。除此之外,还涉及到旁批、交流话题、信息技术链接及教科书中课件符号标识处的教学思考等。

**相关资源:**在于展示本章内容的知识背景,为教学提供素材,包括重要结论的推理、证明与拓展。

**评价建议:**回答评价什么,如何评价等问题,并提供必要的参考案例。

**习题解答:**不仅包括练习、习题、复习题等基本题型的参考答案,还就《阅读与讨论》中的讨论题、《思考与实践》中的问题给出了可供参考的解决方案。

我们希望通过上述栏目的设置,既有助于解决教学设计、教学实施中的主要问题,满足教学的基本需要,又能拓展教师的视野,提升数学教学的境界。

诚然,有些想法虽然很好,却是我们力所不及的。比如评价建议,又比如教学目标中的情感目标,如何落实和实践还有待于我们共同去研究和探索。

我们的课程改革,从理念、内容到实施,与过去相比都有较大的变化。要实现课程改革的目标,教师是关键。教师不仅是课程的实施者,而且也是课程研究、建设和资源开发的重要力量。我们殷切地希望各位老师能为这套教师用书建言,更为教科书的完善献力,使它们更加有利于教师创造性地进行教学,更加有利于学生主动地学习和发展。

本套教师用书由湖北教育出版社数学教材编写组编写,主编齐民友,副主编裴光亚,徐学文,郭熙汉。本册主要编者是常绪珠,刘运新。

# 目 录

第 1 章 立体几何初步.....	1
第 2 章 平面解析几何初步.....	30

# 第1章 立体几何初步

## 一、教育价值

本章从对空间几何体的整体观察入手,认识空间图形,再以长方体为载体,直观地认识和理解空间点、线、面的位置关系.这种从感性逐步上升到理性的认知过程与学习活动,符合认识新事物的规律.有助于发展学生把握空间与图形的能力,使学生更好地认识和理解人类生存的空间;有助于发展学生的直觉能力,培养学生的创新精神;有助于发展学生推理论证能力、合情推理能力、运用图形语言表述与交流能力.

## 二、教学目标

### 1. 知识与能力

(1)在观察实物模型及大量图形的基础上,认识空间几何体的结构特征,并能应用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.

(2)掌握斜二测画直观图的方法.通过观察平行投影、中心投影以及几何直观图,了解平面上表示空间图形的不同方法;能画出简单几何体的三视图;能识别三视图所表示的立体模型;会使用材料(如纸板、橡皮泥)制作模型;会用斜二测画法画出它们的直观图.

(3)掌握平面的基本性质,会画图表示平面.

(4)借助长方体模型,直观地认识和理解空间点、线、面的位置关系.

(5)了解空间两条直线的位置关系,能画出空间两条直线的各种位置关系的图形;通过异面直线的判定,进一步熟悉反证法.

(6)了解空间直线和平面的位置关系,能画出空间直线和平面的各种位置关系的图形;掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理;掌握直线和平面垂直的判定定理和性质定理.

(7)了解两个平面的位置关系,能画出两个平面的各种位置关系;掌握两个平面平行的判定定理和性质定理;掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理.

(8)会用数学符号表示点、线、面的各种位置关系和性质.

(9)了解柱、锥、台、球的概念及表面积与体积的计算公式或计算方法.

(10)通过本章教学,培养和发展学生的直觉思维能力,合情推理与逻辑论证能力、空间想象能力、运用图形语言与符号语言表达与交流能力.

### 2. 过程与方法

立体几何的学习是以现实三维空间为背景,让学生经历“直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算”四个层次的认知过程.

(1)经历直观感知、操作确认,建立柱、锥、台、球的基本概念,抽象出这些空间几何体的基本属性.

(2)经历直观感知、操作确认,直观地认识和理解空间点、线、面的位置关系,抽象出点、线、

面位置关系的定义,了解平面的基本性质.

(3)经历直观感知、操作确认,归纳直线与平面、平面与平面平行或垂直的判定定理和性质定理.

在学生亲身经历了直观感知与操作确认的过程之后,才能对所学几何知识形成更深刻的印象,为下一步的思辨论证、度量计算打下坚实的基础.

### 3. 情感、态度与价值观

从对空间几何体的整体观察入手,认识空间图形,再以长方体为载体,认识和理解空间点、线、面的位置关系.这种将几何知识生活化地体现出来的方式,能使学生产生亲近感,能进一步提高学生的学习兴趣;而且大量知识的获取是学生们亲身经历了直观感知、操作确认的结果,这样就能增强学生的成就感,使他们摒弃对几何学习的畏惧心理,进一步提高学生的学习信心.

通过自主探索、动手实践、合作交流等形式多样的学习活动有助于发挥学生学习的主动性,并能让學生切身体验数学发现与创造历程.进一步激发他们的学习热情,调动他们学习的积极性,发展他们的创新精神;贴近生活的实例引入.学生参与的实习作业与实践活功,能使学生认识到立体几何与我们生存空间的关联,从中体验到立体几何的应用价值,能进一步发展他们的几何应用意识.

## 三、教材结构

本章知识定位在“培养和发展学生的空间想象能力、推理论证能力、运用图形语言进行交流的能力以及几何直观能力”上.因此,本章内容的设计遵循从整体到局部、具体到抽象的原则,能过“直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算”四种方法认识和理解空间图形及其性质.

在章头语中,以我们生活的现实空间为背景,用两个实例阐述了本章内容的意义与价值.本章共分三节:

1.1节(空间几何体) 借助丰富的实物模型或计算机软件所呈现的空间几何体,通过对这些模型的整体观察,帮助学生认识其结构特征,运用这些特征描述现实生活中的一些简单物体的结构.学习在平面上用斜二测画法画出空间几何体的直观图;巩固和提高义务教育阶段有关三视图的学习和理解,帮助学生通过观察平行投影与中心投影画出的视图与直观图,了解平面上表示空间图形的不同方法.

1.2节(空间直线与平面) 从现实生活中所常见的平面的实例抽象出平面的概念.并通过生活中一些常见的现象,使学生能直观地感知并确认平面的基本性质,了解一些可以作为推理依据的公理和定理.在此基础上,以长方体为载体,直观地认识空间点、线、面的位置关系,抽象出空间点、线、面位置关系的定义.以这些定义、公理、定理为出发点,通过实例直观感知、操作确认、思辨论证,认识和理解空间中线面平行和垂直的有关性质和判定.

1.3节(棱柱、棱锥、棱台、球的表面积和体积) 在学生已具备了一定的立体几何知识之后,再回到空间几何体中重新审视、观察棱柱、棱锥的几何性质.抽象出棱柱和棱锥的定义.并通过实验操作,确认柱、锥、台、球的体积计算公式和表面积的计算公式.

## 四、课时分配

本章共 18 个课时,具体分配如下(仅供参考):

### 1.1 空间几何体

#### 1.1.1 多面体和旋转体

约 1 课时

1.1.2 直观图和三视图	约 2 课时
1.2 空间直线与平面	
1.2.1 平面的基本性质	约 2 课时
1.2.2 空间直线、平面间的位置关系	约 1 课时
1.2.3 空间两条直线	约 2 课时
1.2.4 直线与平面平行的判定和性质	约 1 课时
1.2.5 直线与平面垂直的判定和性质	约 2 课时
1.2.6 两个平面平行的判定和性质	约 1 课时
1.2.7 两个平面垂直的判定和性质	约 2 课时
1.3 棱柱、棱锥、棱台、球的表面积和体积	
1.3.1 棱柱、棱锥、棱台	约 1 课时
1.3.2 棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积	约 1 课时
1.3.3 球的表面积和体积	约 1 课时
思考与实践(含本章小结)	约 1 课时

## 五、内容分析

### 章头语

根据学生已有的生活经验及常见的大量的空间问题中,列举两个实例,并以此为线索,阐述立体几何的内容以及学习立体几何的意义. 让学生明确自己学习的任务与作用、目的与要求. 从而滋生出学习立体几何的欲望和兴趣.

### 1.1 空间几何体

#### 1. 内容概述及基本要求

本节从学生已经学习过的长方体、正方体、直棱柱、圆柱、圆锥和球这些空间几何体出发,把学生的视线从这些抽象的几何体引入到与我们生活密切相关的空间物体上来,如金字塔、救灾帐篷、矿物结晶、蒙古包、足球以及微观世界里的分子结构等. 这些几何体大致分为两类:一类是由平面多边形围成的,如长方体、正方体、棱柱等. 它们统称为多面体;另一类则不完全是由平面多边形围成的,有些面是曲面. 如圆柱、圆锥、球,它们的曲面都是由一些线段或半圆绕轴旋转而得到的,我们称之为旋转体.

能在平面上画出反映空间几何体的几何特征的图形,是我们研究空间几何体所必需的技能. 本节介绍了用斜二测画法画直观图的方法,介绍了常用的投影方法以及用三视图表示物体的方法.

用斜二测法画直棱柱的直观图包括两个主要步骤:

- (1)画水平放置的平面多边形(即直棱柱的底面);
- (2)画直棱柱的侧棱和上底面.

平行投影与中心投影能够在平面上反映出空间几何体的某些特征与数量关系,在义务教育阶段学习的三视图就是用投影原理画出的. 教材通过一个奖杯的三视图画出它的直观图的例子,巩固和提高对义务教育阶段所学的三视图的理解,学会在三视图、直观图和实物之间进行转换.

在本节的学习中,学生要通过观察大量的空间实物认识空间图形的结构特征,理解并掌握多面体与旋转体的概念;了解视图与三视图的概念,会用斜二测画法画直观图,学会在三视图、直观图和实物之间进行转换.

## 2. 重难点分析

本节的重点:是认识空间几何体的结构特征,了解多面体与旋转体的定义及符号表示;会用斜二测法画直观图;会在三视图、直观图和实物之间进行转换.

本节的难点:空间概念的初步形成和三视图与实物之间的转换.

## 3. 教学建议

以往的立体几何课程与教学特别注重形式化,新的课程标准则强调知识发生、发展的过程和实际应用.因此,在教学中,教师应突出几何的本质,引导学生经历直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算等探索与研究几何的过程.

在本节教学中,要尽可能多地向学生展示空间几何体模型,利用多媒体等现代教学手段演示大量空间几何体图形,供学生观察、研究.在他们充分经历了直观感知的基础上,确认多面体的共同属性,抽象出多面体的定义;同样利用实物或多媒体演示旋转体的形成过程,感知并确认旋转体的共同属性,抽象出旋转体的定义.

在学生观察空间图形的同时,教师要适时地指导他们利用牙签、橡皮泥、纸板等制作各种几何模型.让他们在自制模型的过程中,亲身经历图形与实物间的转换,加深感性认识,建立空间概念,提高把握空间和图形的能力、几何直观能力及空间想象能力.

在讲正六棱柱直观图的画法时,关键是画好处于水平位置的底面的直观图.教学时,需要学生随着老师的示范一起作图,然后再独立地另作一图.巩固学习成果.同时要向学生说明平面上表示空间图形的方式是多样的,可以借助平行投影和中心投影画出的视图与直观图,让学生观察.还要引导学生回顾义务教育阶段学习的三视图也是一种方法.教材中通过一个奖杯的三视图画出其直观图,一方面巩固所学的三视图,另一方面要求学生学会在三视图、直观图和实物之间相互转换.(奖杯顶上的球并非主体,而用斜二测画法画球的直观图不仅困难,而且所画的球很难看,因而奖杯上的球的直观图的画法进行了模糊处理,并未严格按斜二测法画图.)

图形语言和符号语言是进行数学表达与交流的重要工具,从一开始就要严格要求和规范.逐步培养学生运用符号语言和图形语言表达和交流的能力.

## 1.2 空间直线与平面

### 1. 内容概述及基本要求

平面是现实世界存在着的客观事物的数学抽象.教材通过桌面、墙面、平静的水面这些具备平面形象的实物去想象几何中理想的平面概念.平面和点、直线一样是几何中不定义的原始概念,在理论上,平面的性质由公理 1~公理 3 反映,这些公理成为本章的理论基础,是进一步推理的出发点和依据.

公理 1 是直线与平面位置关系的基础,它给出了直线在平面内的定义;它利用直线的“直”刻画了平面的“平”;它利用直线的无限延伸性描述了平面的无限伸展性.

公理 2 从点与平面的相互关系上突出了确定平面条件的点的个数与位置.即一点或二点不能确定平面,三点共线也不能确定平面,四点不一定共面,只有“三个点”且“不共线”时才能确定一个平面.公理 2 及它的 3 个推论给出了确定平面的方法和途径,是今后判定共面问题和作图的重要依据.



公理 3 是两个平面位置关系的基础,它揭示了两个平面相交的重要特征:两个平面相交,则它们交点的集合一定是一条直线;它提供了确定两个平面交线的方法:两个平面的交线一定是经过已知交点的直线.

3 个公理及 3 个推论还隐含着点、线、面三个基本概念的相互表示,即“直线”是由“点”组成的,“平面”是由“直线”组成的.正是点、线、面的这种相互表示,使我们能引入集合的符号来表示点、线、面的位置关系.把直线、平面都看成点的集合,于是点  $P$  在直线  $l$  上记作  $P \in l$ ;直线  $l$  在平面  $\alpha$  内记作  $l \subseteq \alpha$ ;平面  $\alpha$  与平面  $\beta$  相交于直线  $l$  记作  $\alpha \cap \beta = l$ .在读法上仍用几何语言,即“ $P \in \alpha$ ”读作“点  $P$  在平面  $\alpha$  内”.要注意的是直线  $a$  与直线  $b$  相交于点  $A$  时,记作  $a \cap b = A$ ,而不是记作  $a \cap b = \{A\}$ ,这点与集合符号略有不同.

借助长方体模型,观察其棱与棱、棱与面、面与面的关系,感知并确认两条直线有平行、相交、异面三种位置关系;直线与平面有直线在平面内、与平面相交和与平面平行三种位置关系;两个平面有相交和平行两种位置关系.同时掌握这些位置关系的图形画法与符号表示.注意画两条异面直线时,要有平面衬托才有立体感.

公理 4(平行直线传递性质)与等角定理及其推论是平面几何中的定理和性质在立体几何中的推广.但是并非所有关于平面图形适用的结论对于立体图形仍然适用.对此可用反例解释、提醒学生:一般说,要把关于平面图形的结论推广到立体图形上,必须经过证明.

公理 4 与等角定理及其推论揭示了两条直线平行或相交所成的锐角(或直角)在空间中任意平移变换下保持不变的性质,这个不变性既是确立两条异面直线所成角的依据,也是以后研究空间其他角的理论基础.此性质还为我们提供了一个研究角的重要方法——平行移动法.

关于异面直线的判定,是把它作为共面的反面,用反证法来判断的.异面直线的概念不能误解为:“分别位于两个不同平面内的两条直线”,而应理解为:“经过这两条直线无法作出一个平面”.

公理 4 用数学符号表示为

$$\left. \begin{array}{l} a // c \\ b // c \end{array} \right\} \Rightarrow a // b.$$

等角定理用数学符号表示为

$$\left. \begin{array}{l} AB // A'B' \\ AC // A'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \angle BAC = \angle B'A'C' \text{ 或 } \angle BAC = 180^\circ - \angle B'A'C'.$$

直线和平面平行的判定是由两条直线的平行来实现的.这个定理用符号表示为

$$\left. \begin{array}{l} a // b \\ b \subseteq \alpha \\ a \not\subseteq \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a // \alpha.$$

直线和平面平行的性质定理是由线面平行推出两直线平行,它也可以作为两直线平行的判定方法.这个定理的符号表示为

$$\left. \begin{array}{l} a // \alpha \text{ 且 } a \subseteq \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b.$$

直线和平面垂直是线面相交关系中的特殊情况,章头语所举的第一个例子已经引出了直线和平面垂直的概念.1.2.5 小节对线面垂直现象进一步观察,挖掘其中的本质属性,抽象出平面和直线垂直的定义.

根据线面垂直的定义来判断线面垂直,在应用上有一定的困难,但定义中所包含的性质则

是我们经常应用的,即

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \subseteq \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp b.$$

直线和平面垂直的判定是由两直线垂直来实现的,这个判定定理用符号表示即为

$$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha, b \subset \alpha \\ a \cap b = A \\ a \perp c, b \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow c \perp \alpha.$$

1.2.5 小节例 1 的结论是判定线面垂直的另一个常用的命题.

直线和平面垂直的性质定理是例 1 所述命题的逆命题,这两个互逆命题用符号表示即为

$$\text{若 } a \perp \alpha \text{ 且 } a \parallel b, \text{ 则 } b \perp \alpha. \iff \text{若 } a \perp \alpha \text{ 且 } b \perp \alpha, \text{ 则 } a \parallel b.$$

两个平面平行的判定是由直线和平面平行实现的,用符号表示这个定理即是

$$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha, b \subset \alpha \\ a \cap b = A \\ a \parallel \beta, b \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

根据平行的两个平面没有公共点这一特征,我们很容易得出如下命题:

$$\left. \begin{array}{l} a \subseteq \alpha \\ a \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

它被用来判定线面平行.

两个平面平行的性质定理为我们提供了两直线平行的判定方法,用符号表示即是

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b.$$

注意到 1.2.6 小节例 1 与例 2 的结论也是互逆的命题,它们常常分别用来断定两个平面平行与直线和平面垂直.用符号表示即是:

$$\text{若 } a \perp \alpha \text{ 且 } a \perp \beta, \text{ 则 } \alpha \parallel \beta. \iff \text{若 } a \perp \alpha \text{ 且 } \alpha \parallel \beta \text{ 且 } a \perp \beta.$$

教材中引入二面角的概念是为两个平面垂直的定义作铺垫的.两个平面垂直就是它们的二面角为直二面角.

两个平面垂直的判定除了用定义外,还有判定定理,这个判定定理是以直线与平面垂直为基础的,用符号表示即是

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ a \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

两个平面垂直的性质定理是推导直线与平面垂直的一个定理,体现了两种垂直关系之间的密切联系,其符号表示即为

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l \\ a \subset \alpha \\ a \perp l \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \beta.$$

本节是本章的核心内容,必须要遵循直观感知、操作确认和思辨论证的方法.让学生参与到这些知识的发生、发展与应用的全过程.

数学语言是在数学思维中发生和发展的,又是数学思维不可缺少的工具.在学习中,应要求学生把用文字语言表述的公理、定理、推论转化为图形与符号语言,提高其运用数学语言表

达和交流的能力.

### 2. 重难点分析

本节的重点:直线、平面之间的位置关系;平面的基本性质(公理 1、2、3);平行传递性质(公理 4);等角定理;直线与平面、平面与平面的平行与垂直的四个判定定理和四个性质定理.

本节的难点:在直观感知中发现、抽象和归纳平面的基本性质.各种位置关系的判定与性质;把文字语言表述的公理、定理与推论转化为符号语言,画出表示各种位置关系的直观图形;运用公理、定理和推论进行逻辑推理.

### 3. 教学建议

在平面概念的教学中,要引导学生观察具有平面形象的实物,如桌面、黑板面、平静的水面等等,从中感知平面的概念.类比直线的无限延伸性指出平面的无限伸展性,这样有助于学生的理解.

讲平面的表示法时,应说明所画的平行四边形只是平面的部分,必要时可以将它伸展出去,这和平面几何中画短线表示直线是一样的道理.有时根据需要也可以用其他平面图形(如三角形、梯形、圆)表示平面.

画两个相交平面时.要强调必须画出交线,被遮挡部分可以不画或画虚线(如图 1-1).

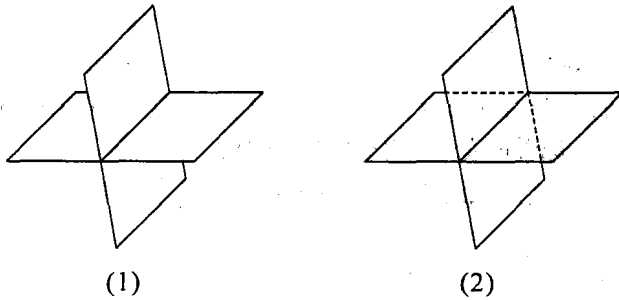


图 1-1

以点为元素,直线、平面都是点的集合,用点集认识几何图形,是数学发展的结果,是深入研究几何所必要的.几何中许多符号的规定都是基于将图形视为点集,在介绍有关符号的使用时,结合前面所学的集合知识讲一讲符号来源的背景,可以帮助学生正确使用符号.

平面的基本性质(即教科书中公理 1、公理 2、公理 3)是研究立体几何的理论基础,必须要求学生很好地掌握.在教学时,要努力创设情境.教材中每个公理的导出都有实例作铺垫,教师也可以从学生生活经验出发再挖掘一些实例.通过实例并结合一些直观教具,引导学生观察、思考.从而得到平面的基本性质.在这个过程中,还可以适当提问启发学生的思维.

公理 1 的引入:

提问 1:直线  $a$  上有一个点在平面  $\alpha$  内,直线  $a$  是否全部落在平面  $\alpha$  内?

提问 2:直线  $a$  上有两个点在平面  $\alpha$  内,直线  $a$  是否全部落在平面  $\alpha$  内?

公理 2 的引入:

提问 1:经过空间一个已知点可能有多少个平面?

提问 2:经过空间两个已知点可能有多少个平面?经过共线的三个点可能有多少个平面?

提问 3:经过空间不在同一直线上的三个点可能有多少个平面?

公理 3 的引入:

提问 1:两条相交直线可能有多少个公共点?

思考提问 2: 一条直线与一个平面可能有几个公共点?

提问 3: 两个平面会不会只有一个公共点?

利用平面的基本性质判定共面问题是学生必须掌握的基本技能, 1. 2. 1 小节中的例 1 就是共面的判定问题. 其基本方法是首先由某些元素确定一个平面, 然后再证明其余元素在这个平面内.

与共面问题相呼应的是共线问题. 1. 2. 1 小节中的例 2 是共线的判定. 其基本方法是判定这些点是两个平面的公共点. 因而这些点都在两个平面的交线上.

异面直线的出现, 使两条直线的位置关系从平面拓广到了空间. 根据空间中两直线公共点的情况, 辨析空间两条直线位置关系, 是研究空间问题的基础. 直线与平面、平面与平面的位置关系都是根据其公共点的情况来辨析的. 在教学中, 要以长方体为载体, 让学生观察分析, 在直观感知的基础上, 去发现空间中各种位置关系的本质属性, 抽象出它们的定义. 同时, 还要掌握各种不同位置关系的符号表示、图形画法, 初步形成用符号语言及图形语言表达与交流的能力.

教材一开始就利用长方体中棱与棱、棱与面、面与面的各种不同位置关系设问, 引导学生观察与思考, 教学中要用好这些问题, 帮助学生建立空间概念.

画好空间直观图, 对于分析、理解空间问题非常重要. 在线面位置关系的图形画法教学中, 教师必须严格示范, 让学生掌握各种图形画法要领, 并对学生的画图规范进行严格要求. 必要时, 还可以画出一些不符合作图要求的图形给学生看, 让他们领悟画图的要领. 如图 1-2(b), 异面直线没有平面作衬托, 是否还有异面直线的立体感? 图 1-2(d) 中平行平面只把两组对边画平行. 另外两组不平行, 是否还有平行平面的立体感?

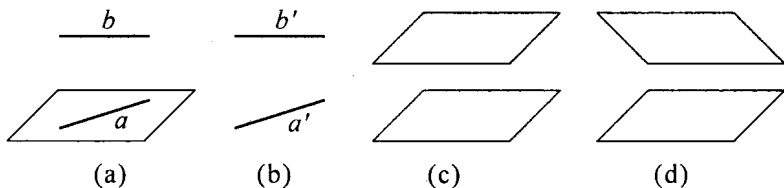


图 1-2

在平行线的传递公理和等角定理的教学中, 应回顾平面几何中相应的命题, 提出问题: 这些在平面几何中成立的命题在立体几何中还成立吗?

对于平行线的传递公理, 可以引导学生观察教室墙面与墙面的交线, 也可以把一张长方形的纸对折几次, 观察比较折痕间的位置关系, 从中归纳出这个公理.

对于等角定理, 可以把一个角在空间中平行移动, 观察移动后的角的两边与平移前角的两边对应的位置关系, 提出猜想, 再回顾平面几何中证明这个定理的一般思路: 由两个角构造两个全等三角形来证明这两个角相等, 从而启发学生探究这个定理的证明方法.

要向学生交待清楚: 并不是所有平面图形中成立的结论都可以推广到立体图形中. 例如在平面图形中, “垂直于同一条直线的两条直线平行”这个定理在立体图形中就不正确. 因此, 平面图形中的结论要推广到立体图形中, 必须给出严格证明.

有了以上的公理、定理和推论作为推理的依据, 就要开始要求学生进行逻辑推理训练. 在提高学生的直观能力的同时, 培养和他们的逻辑推理能力. 教材 1. 2. 3 小节的例 1 在本质上是利用公理 4 证明两条直线平行, 例 2 是运用反证法证明异面直线. 反证法证题时要注意两点: 其一是原命题的结论的反面是什么? 倘若其反面有多种情况, 应全部列出, 不要遗漏, 这是关键的一步. 其二是在假设“原命题的反面成立”的前提下, 结合已知条件进行推导, 断言这个

假设不正确. 因为用反证法证题, 逻辑思维要求较高, 学生在刚开始接触时会感到比较困难. 在教学中, 应配合示例叙述证明问题的思路, 从中归纳出证题步骤, 使学生感到有规律可循. 再通过适当训练, 逐步做到表述正确, 层次清晰.

直线与平面、平面与平面的平行、垂直等内容, 份量较重, 包括判定定理和性质定理共 8 个定理以及定理的应用. 在教学中, 既要考虑“定义”、“判定”、“性质”的内在联系, 注意体现知识的系统性, 又要考虑这些内容在结构形式上的相似性和在认识方式上的一致性(即都要通过让学生经历直观感知、操作确认的认知过程, 再归纳出它们的判定与性质等定理). 因此, 从一开始就要注意对学生的学习能力与思想方法的培养, 为后继学习打好基础.

在“直线与平面平行”的判定定理教学中, 除了教材中所给的实例外, 还可以再多举一些例子, 如教室的门在开合过程中, 装锁的那扇门的边沿为什么保持与墙面平行? 从对实例的观察、思考和分析中, 挖掘线面平行的本质属性, 归纳出判定定理. 然后再要求学生结合自己的生活经验, 举例对这个判定定理加以印证.

在直线与平面平行的性质定理的教学中, 可以先提出问题: 如果直线  $a \parallel$  平面  $\alpha$ , 则  $\alpha$  内任一条直线与  $a$  有没有公共点?  $\alpha$  内的直线与  $a$  有怎样的位置关系? 然后通过观察实例, 直观地意识到平面  $\alpha$  内的直线与直线  $a$  一定存在平行关系(也一定存在异面关系). 至此再问: 怎样才能能在  $\alpha$  内得到  $a$  的平行线? 学生们可以联想到“平行线共面”这一命题, 掌握一种在  $\alpha$  内寻求  $a$  的平行线的方法: 经过  $a$  的平面  $\beta$  与  $\alpha$  相交, 其交线即为  $a$  的平行线. 并从这一过程中归纳出直线与平面平行的性质定理.

1.2.4 小节的例 1 是线面平行的判定定理的运用. 可以起到熟悉定理, 学会运用定理推理论证的作用; 还可以进一步提高用符号语言表述与交流的能力. 接下来例 2 是实验操作题, 准确操作的过程隐含着逻辑推理, 教学中不能忽视了其中的逻辑推理的价值.

在直线和平面垂直的定义的教学中, 从给人们以线面垂直感觉的旗杆出发, 思考旗杆为什么会留给人们这种垂直感觉? 这是因为不论太阳从什么角度照射, 旗杆始终与它在地面上的影子垂直. 从这一现象中可以进一步推理: 旗杆与地面上任一条直线都垂直. 这就是直线与平面垂直的本质特征. 抓住了这一特征, 直线和平面垂直的定义就很自然地产生了.

在讲直线和平面垂直的判定定理时, 先从观察直线与平面内的直线垂直开始, 提出问题: 直线与平面内的一条直线垂直, 能判定这条直线与平面垂直吗? 直线与平面内的两条或更多直线垂直, 能判定直线和平面垂直吗? 不能判定的原因何在? 如果  $\alpha$  内不平行的两条直线与  $\alpha$  外的直线垂直, 能判定这个平面与这条直线垂直吗? 在这些问题的引导下, 再观察一些实例, 教材中引用的实例是注射点滴的简易吊瓶架子, 若能多举一些实例更好. 通过观察实例, 思考问题, 逐渐归纳直线和平面垂直的判定定理.

1.2.5 小节的例 1 是用直线与平面垂直的定义判定线面垂直. 其中蕴含了数学中证明无限个元素具有某种属性的方法. 即从中任取一个, 只需证明其具有这种属性即可. 例 1 的结论本身也可以作为判定线面垂直的依据.

性质定理与例 1 所证的命题关系极大, 可以从例 1 的结论引申, 并结合观察教室的墙面之间的交线都与地面垂直, 这些交线互相平行. 直立的电线杆都与水平地面垂直, 这些电线杆互相平行等事实归纳直线和平面垂直的性质定理. 性质定理的证明用的是反证法, 可以让学生进一步熟悉和体会数学中的反证思想, 这对于刚刚学习了用反证法证题的学生是有好处的.

1.2.5 小节的例 2 是线面平行与垂直的综合应用问题, 这个结论是今后定义平行的直线与平面间的距离的基础.

两个平面平行的判定定理的探索,可以从两个平面平行的基本属性中寻找判定条件.如果两个平面平行,那么其中一个平面内的所有直线一定与另一平面无公共点,即这些直线与另一平面平行.反之,如果一个平面内的所有直线与另一平面平行,可推断两个平面平行.但是实际上难以对一个平面内的所有直线逐一考虑,这与线面垂直的情况很类似.于是类比直线与平面垂直的判定定理的探求过程,思考如下问题:通过一个平面内的一条直线、两条直线或更多直线与另一平面平行,能判定两个平面平行吗?如果一个平面内有两条相交直线与另一平面平行,能判定这两个平面平行吗?再结合一些实例观察思考,即可得到两个平面平行的判定定理.

两个平面平行的性质定理涉及三个平面(其中一个与另两个平行平面相交)和两条交线,并由两个平面平行得出两条交线平行.需要向学生指出:两个平面平行时,分别在两个平面内的两条直线不一定平行,它们可能是异面直线,也可能是平行直线.

1.2.6 小节的例 1 可以用来判定两个平面平行,它可与定理“垂直于同一平面的两直线平行”联系起来记忆.例 2 提供了线面垂直的一种判定方法,也可以作为两个平面平行的一个性质.它可与定理“一个平面垂直于两条平行线中的一条直线,那么它也垂直于另一条直线”联系起来记忆.

讲完本小节,可以把两条直线平行、直线与平面平行、两个平面平行的情况进行比较,使学生的知识系统化.

二面角的引入是为引入两个平面垂直的定义服务的,教学中只要求学生了解即可,不必拓宽加深.

两个平面垂直是两个平面相交的特例,在日常生活中,两个平面垂直的例子大量存在,教学时可以结合实例,加深对概念的理解.

画两个平面垂直,其要领是把竖直平面的一组对边画成与水平平面的横边垂直.

两个平面垂直的判定定理,教材是通过门在开合过程中始终与地平面垂直这一事实挖掘的条件.教学时,教师还可以与学生共同举一些生活中的实例进行考证,归纳出判定定理.

教材 1.2.7 小节中的例 1,为两个平面垂直的性质定理的提出与证明埋下了伏笔,在讲性质定理时,对例 1 要善加利用.

两个平面垂直的判定定理和性质定理,前者是由线面垂直导出面面垂直,后者是由面面垂直而得线面垂直.这一方面说明两种垂直之间有密切联系,另一方面说明了两者可以互相转化.在解决有关问题时,经常用到这种转化.

1.2.7 小节的例 2 证明的是直线与平面的一种结合关系(直线在平面内).使用了同一法证明.即为了证明  $a \subseteq \alpha$ ,先作出  $b \subseteq \alpha$ ,然后证明  $a, b$  是同一条直线.这种证法只要求学生理解其思路,不必安排较多的用同一法证明的练习题.

在讲完本小节,可以把两条直线垂直、直线与平面垂直、两个平面垂直这三种垂直情况进行比较,使学生的知识系统化.

## 1.3 棱柱、棱锥、棱台、球的表面积和体积

### 1. 内容概述及基本要求

从对空间图形的整体观察入手,在经历了“直观感知、操作确认、思辨论证”的认知过程之后,学生们已经具备了一定的立体几何知识.本节利用学生已有的知识,再回归到空间几何体中,对棱柱、棱锥、棱台等常用立体图形给出严格定义.通过实验方法,确认柱、锥、台、球的表面积与体积计算公式或方法.

## 2. 重难点分析

本节的重点:了解棱柱、棱锥、棱台的定义;通过实验了解棱柱、棱锥、棱台与球的表面积和体积的计算公式及计算方法.

本节的难点:应用表面积与体积计算公式或方法解决有关实际问题.

## 3. 教学建议

在本节教学中,要让学生观察棱柱、棱锥、棱台的模型、分析、归纳其本质特征,抽象出棱柱、棱锥、棱台的定义,对其中某些小概念的规定的合理性还可以给出证明.例如棱柱与棱台的高,学生的概念一直是含糊的,现在可以证明教材中所述高的规定是合理的.

1.3.2 小节中的例 1,一方面向学生说明了表面积的一般求法——即逐个求每个面的面积,再将每个面的面积相加,另一方面又展示了棱柱侧面可以展开成一个平面图形后再求其面积,也就是对一些特殊图形可以寻求简化计算的办法.

棱柱、棱锥、球的体积公式是学生们早就熟悉的,在教学时只需通过实验的方法向学生说明公式的合理性.具体地讲,把一叠 8 开纸放成直棱柱与斜棱柱两种形状说明棱柱的体积只与底面积和高有关;用棱锥容器装满沙子(或水)倒入与它等底等高的棱柱容器内,说明棱锥体积是和它等底等高棱柱体积的三分之一;用排水量推测球的体积公式.教学时,除教材中介绍的这些方法,教师还可以再补充一些实验方法对公式加于验证.1.3.3 小节中的例 2 是对上述公式的简单应用.教学时教师还要注意训练学生利用所学知识解决实际生活中所遇到的有关问题.

在本章教学中,有条件的学校应在教学过程中,恰当运用现代信息技术展示空间图形,为学生掌握和理解空间图形的几何性质(包括证明)提供形象支持,从而提高学生几何直观能力.教材中标识的鼠标符号,表示此处有教材编写组向教师们提供的相应的教学课件.教师在教学中也可以根据情况自己制作一些课件.

## 阅读与讨论:球的表面积公式的探索

上一节中所学的柱、锥、台、球的表面积与体积公式,都是用实验的方法得到的,这些公式有没有严格的逻辑证明呢?这里以球的表面积公式的推导向学生说明了几何中的面积与体积公式是可以证明的.

通过球的表面积公式的推导,本阅读材料还向学生们渗透了一个(对学生来说)崭新的数学思想方法——微积分思想.

课后的讨论题,可以作为有兴趣的同学在教师指导下的研究性课题.下面给出其解答,供教师们指导学生时参考.

用过球心的平面截球  $O$ ,球被截面分成大小相等的两个半球,截面  $\odot O$ (包含它内部的点)为所得半球的底面.

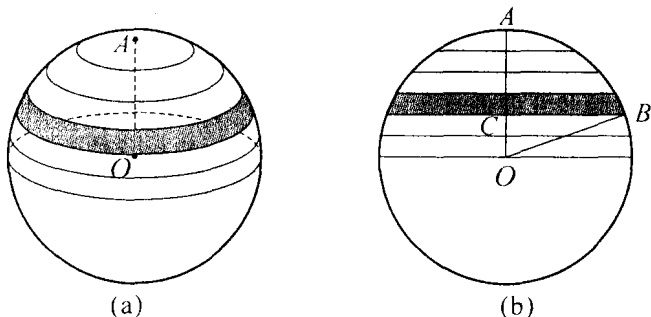


图 1-3

如图 1-3(b), 把球的垂直于底面的半径  $OA_n$  等分, 过这些分点, 用一组平行于底面的平面把半球切割成  $n$  层, 每一层都是近似于圆柱形状的“小圆片”. 这些“小圆片”的体积之和就是半球的体积.

由于“小圆片”近似于圆柱形状, 所以它的体积也近似于圆柱的体积, 这样的圆柱的高是“小圆片”的厚度  $\frac{R}{n}$ , 底面是“小圆片”的下底面. 由勾股定理可得第  $i$  层(由下向上数)“小圆片”的下底面半径

$$r_i = \sqrt{R^2 - \left[\frac{R}{n}(i-1)\right]^2}, i=1, 2, 3, \dots, n.$$

于是, 第  $i$  层“小圆片”的体积

$$V_i \approx \pi r_i^2 \cdot \frac{R}{n} = \frac{\pi R^3}{n} \left[1 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right], i=1, 2, 3, \dots, n.$$

半球的体积

$$\begin{aligned} V_{\text{半球}} &= V_1 + V_2 + \dots + V_i \\ &\approx \frac{\pi R^3}{n} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{1^2}{n^2}\right) + \left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right) + \dots + \left[1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right] \right\} \\ &= \frac{\pi R^3}{n} \left[ n - \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^2} \right] \\ &= \frac{\pi R^3}{n} \left[ n - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^2} \right] \\ &= \pi R^3 \left[ 1 - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \right] \\ &= \pi R^3 \left[ 1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{6} \right] \end{aligned}$$

容易看出, 当所分层数不断增加, 也就是  $n$  不断变大时, 上式所述半球体积的精确度越高.

如果  $n$  变到无穷大, 即可得出  $V_{\text{半球}}$  的准确值. 因为当  $n$  变到无穷大时,  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , 所以

$$V_{\text{半球}} = \pi R^3 \left(1 - \frac{1 \times 2}{6}\right) = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

于是得球的体积公式为

$$V_{\text{球}} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

## 六、相关资源

### 1. 画法几何简介

本章教材中出现的三视图、用斜二测画法画的直观图、平行投影与中心投影图都是研究在二维图形中表达三维空间的几何形状及定位问题的最基本图形, 都是以投影原理为基础的图示方法, 这些均属画法几何的范畴.

#### (1) 轴测投影

用平行投影法把物体连同直角坐标系一起投影到投影面上所得的投影图, 叫做轴测投影图(简称轴测图), 这种投影画法称为轴测投影法. 如图 1-4 所示即是用平行投影法把一个机械零件和坐标轴投影到投影面  $\alpha$  上. 在  $\alpha$  上的投影叫做这个物体的轴测投影, 坐标轴的投影叫做



轴测轴,轴测轴之间的夹角叫做轴间角,平面 $\alpha$ 叫做轴测投影面.由图 1-4 可知,轴测图就是空间物体的直观图.我们约定,空间坐标轴记作 $o_0x_0, o_0y_0, o_0z_0$ ,轴测轴记作 $ox, oy, oz$ .

按轴测投影法,把物体投射到投影面以后,原来平行的线段仍保持平行,并且平行线段的投影的长度与物体实际长度的比不变,我们把这个比值叫做变形系数.即

$$\text{变形系数} = \frac{\text{线段的投影长度}}{\text{线段的实际长度}}$$

因为实物上平行的线段,它们的变形系数都是相等的,所以定出 $ox, oy, oz$ 轴上的变形系数后,就容易画出直观图.(注意:不平行线段的变形系数一般是不同的.)

利用轴测投影画空间物体直观图,最常见最简单的就是斜二轴测投影(简称斜二测)和正等轴测投影(简称正等测).

### ①斜二轴测投影

选择轴测投影面 $\alpha$ 平行于坐标平面 $x_0o_0z_0$ ,投影线与投影面斜交,这种投影称为正面斜轴测图,其特点是 $ox$ 与 $oz$ 轴上的变形系数均为 1,且平行于该坐标面的图形的轴测投影反映实形.我们适当调整射线与投影面的角度,使 $oy$ 轴上的变形系数为 0.5,且与 $ox, oz$ 轴的轴间角为 $45^\circ$ ,得到的投影称为斜二轴测投影,简称斜二测.这就是教材上所讲的直观图的画法.

### ②正等轴测投影

选择轴测投影面与坐标轴斜交,投影线与投影面垂直,这种投影称为正轴测投影.我们适当调整坐标轴与投影面的角度,使三个坐标轴与投影面成等角,所得的投影称为正等轴测投影,其特点是轴间角均为 $120^\circ$ ,轴测轴上的变形系数都相等(约为 0.82).实际画图时,为了方便起见,我们采用简化系数 $k=1$ 来画.这样画出的图形比实际投影图成比例稍有放大,并不妨碍它的直观性.图 1-5 中(a)、(b)分别是用斜二测和正等测两种画法画的同一正方体的直观图.

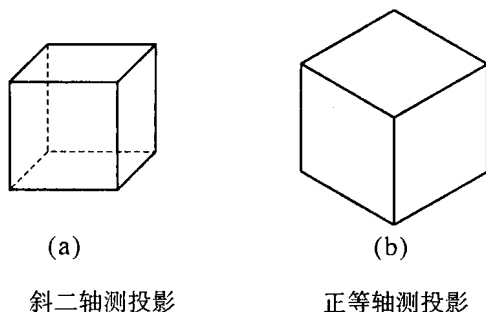


图 1-5

画直观图时,应根据要求,选择一种画法,不能两种画法混用.

### (2)透视投影

用中心投影法将物体投射到投影面的图形称为透视投影,也称透视图,简称透视.

透视图和轴测图都是用单面投影.不同之处在于轴测图是用于平行投影画出,而透视图是用中心投影法画出.

与正投影比较,透视图有一个很明显的点,就是物体距离观察者越近,所得透视投影越