21世纪高职高专规划教材·公共基础课系列

高等数学

工科类

学习辅导与习题解答

刘建勇　主编

国防科技大学出版社

21 世纪高职高专规划教材

公共基础课系列

高等数学
(工科类)
学习辅导与习题解答

刘建勇　主编

国防科技大学出版社

【内容简介】 本书是专为高职高专工科类各专业编写的高等数学教材，是《高等数学》(工科类)的配套教学用书。书中全面、系统地介绍了高职高专工科类所需的高等数学基础知识，内容包括知识总结与梳理，典型例题的讲解，课后习题的解答。

本教材的特色在于知识讲解透彻易懂，例题选用经典实用，习题解答方法多样。既注重理论知识学习的同时，又强调了运用数学知识解决实际问题。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学(工科类)学习辅导与习题解答/刘建勇
主编. —长沙：国防科技大学出版社，2010.8
ISBN 978-7-81099-642-6
Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等数学—高等学校—
教学参考资料 Ⅳ.①013
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 149102 号

出版发行：国防科技大学出版社
网　　址：http://www.gfkdcbs.com
责任编辑：文　慧　　特约编辑：岳　欢
印 刷 者：北京振兴源印务有限公司
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：12
字　　数：305 千字
印　　次：2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：18.00 元

前　言

本书是国防科技大学出版社出版的《高等数学》(工科类)的配套教学用书。本书是根据教育部制订的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》,认真研究总结全国高职高专教学教改的经验,结合高等工程专科教育中专业教学的特点,并充分考虑到高职高专学制转换的要求而编写的。

在多年的教学实践与研究中,我们认识到高职高专院校的数学基础教育应该着力培养学生以下几个方面的能力:一是运用数学的思想、概念和方法去消化吸收工程实践中的概念与原理的能力;二是将工程实践问题转化为数学模型的能力;三是求解数学模型的能力。本书将数学素质的培养有机地融合于知识讲解中,突出数学思想的介绍,突出数学方法的应用。本书详细地讲解了课后习题,旨在引导学生灵活运用所学知识。

本书主要包括两部分内容:

1.《高等数学》(工科类)的学习辅导,从高等数学的知识体系出发,串讲概念,总结性质与定理,使知识系统化,便于掌握,并注重知识点之间的联系,对每章节的知识进行总结与梳理。针对本章所涉及的知识点进行分类,给出典型例题,并对其进行了深入详细的分析讲解,引导学生思考。

2.《高等数学》(工科类)课后习题的解答,对有难度或重点的题目进行了具体分析和小结,便于学生更好的理解和掌握。

由于编者水平有限,本书难免有一些疏漏和不足之处,恳请广大读者批评与指正。

编　者

目　录

第一章　函数　极限　连续

第一节　函数

一、基本概念

1. 函数的概念

定义　设x和y是两个变量，D是一个给定的非空数集，如果对于每个给定的数$x \in D$，变量y按照一定的法则总有唯一确定的值和它对应，则称y是x的函数，记作$y = f(x)$，$x \in D$.

确定一个函数的两要素是定义域和对应法则. 当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时这两个函数才是相同的函数.

2. 初等函数

基本初等函数有以下几种：

(1) 幂函数　$y = x^a (a \in \mathbf{R})$，$x$的取值范围由常数$a$确定.

(2) 指数函数　$y = a^x$，其中$a > 0$且$a \neq 1$.

(3) 对数函数　$y = \log_a x (x \in (0, +\infty))$，其中$a > 0$且$a \neq 1$.

(4) 三角函数

正弦函数　$y = \sin x \quad (x \in \mathbf{R})$；

余弦函数　$y = \cos x \quad (x \in \mathbf{R})$；

正切函数　$y = \tan x \quad \left(x \in \left\{x \mid x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}\right)$；

余切函数　$y = \cot x \quad (x \in \{x \mid x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\})$.

(5) 反三角函数

反正弦函数　$y = \arcsin x \quad (x \in [-1, 1])$；

反余弦函数　$y = \arccos x \quad (x \in [-1, 1])$；

反正切函数　$y = \arctan x \quad (x \in \mathbf{R})$；

反余切函数　$y = \operatorname{arccot} x \quad (x \in \mathbf{R})$.

(6) 常量函数　$y = c$（c为常数）

二、函数的四个基本特征

1. 有界性 $f(x)$ 在区间 I 上有界 $\Leftrightarrow \forall x \in I, \exists M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$.

2. 单调性 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$,则有 $f(x_1) < f(x_2)$. $f(x)$ 在区间 I 上单调递减 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$,则有 $f(x_1) > f(x_2)$.

3. 奇偶性 $f(x)$ 在定义域 D 上是奇函数 $\Leftrightarrow \forall x \in D$,则 $-x \in D$,且 $f(x) = -f(-x)$. $f(x)$ 在定义域 D 上是偶函数 $\Leftrightarrow \forall x \in D$,则 $-x \in D$,且 $f(x) = f(-x)$.

4. 周期性 $f(x)$ 是周期为 T 的函数 $\Leftrightarrow f(x) = f(x+T)$.

三、典型例题精解

1. 判断两个函数是否相同

例 1 下列( )中两个函数相同.

A. $f(x) = x, f(x) = \arctan(\tan x)$ B. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}, f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

C. $f(x) = \cos x, f(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}$ D. $f(x) = \ln x^2, f(x) = 2\ln x$

解:根据函数相同的两要素可知,答案为 B.

2. 函数定义域的求法

例 2 求下列函数的定义域.

(1)$y = \ln x^2$;(2)$y = \arccos \dfrac{x+1}{9}$.

解:(1) 由 $x^2 > 0$ 得 $x \neq 0$,即定义域为$\{x \mid x \neq 0\}$.

(2) 由 $-1 \leqslant \dfrac{x+1}{9} \leqslant 1$ 得 $-10 \leqslant x \leqslant 8$,即定义域为$[-10, 8]$.

3. 反函数的求法

例 3 求 $y = \ln(x+2) + 1$ 的反函数及反函数的定义域.

解:由 $y = \ln(x+2) + 1$ 得 $y - 1 = \ln(x+2)$,即 $e^{y-1} = x + 2$,则 $x = e^{y-1} - 2$,所求的反函数为 $y = e^{x-1} - 2$.

又由反函数的定义域就是原函数的值域,$y = 1 + \ln(x+2)$ 的值域为 $\mathbf{R}$,即反函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

4. 复合函数的概念的理解与运用

例 4 设 $f(x) = \log_a x$(a 为常数),$g(x) = \sqrt{x}$,$h(x) = \sin x + 2$,求 $f(g(h(x)))$.

解:$f(g(h(x))) = \log_a(g(h(x))) = \log_a \sqrt{h(x)} = \log_a \sqrt{\sin x + 2}$.

习题 1-1 解答

1. **解**:根据集合的交集和并集的定义,得 $A \cup B = \{-2,-1,0,1,2,4,6,9\}$,$A \cap B = \{-1,2,4\}$.

2. **解**:函数相同的判别必须满足两点:

① 函数的定义域必须相同;② 任意取定义域中的一个值,对应的函数值也相同.

(1)$f(x) = |x|$ 定义域为全体实数 **R**,$g(x) = \sqrt{x^2}$ 的定义域为全体实数 **R**.

并且 $g(x) = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$,即 $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$,从而 $f(x) = g(x)$.

(2)$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ 的定义域为$\{x \mid x \neq -2\}$,$g(x) = x-2$ 的定义域为全体实数 **R**.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同,所以 $f(x) \neq g(x)$.

(3)$f(x) = \sin x$ 的定义域为全体实数 **R**,$g(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}$ 的定义域为全体实数 **R**.

但是 $g(x) = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$,所以 $f(x) \neq g(x)$.

(4)$f(x) = 3\lg x$ 的定义域为$\{x \mid x > 0\}$,$g(x) = \lg x^3$ 的定义域为$\{x \mid x > 0\}$,且 $g(x) = \lg x^3 = 3\lg x$.

所以 $f(x) = g(x)$.

3. **解**:(1)$y = \sqrt{x-4}$ 的定义域需满足 $x-4 \geqslant 0$,即 $x \geqslant 4$,

所以定义域为$\{x \mid x \geqslant 4\}$,即 $x \in [4,+\infty)$.

(2)$y = \dfrac{1}{1-x^2}$ 的定义域需满足 $1-x^2 \neq 0$,即 $x \neq \pm 1$,

所以定义域为$\{x \mid x \neq \pm 1\}$.

(3)$y = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{x-1}$ 的定义域需满足 $\begin{cases} 4-x^2 \geqslant 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$,

解得 $-2 \leqslant x \leqslant 2$ 且 $x \neq 1$,

所以定义域为$\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 2$ 且 $x \neq 1\}$,即 $x \in [-2,1) \cup (1,2]$.

(4)$y = \arcsin \dfrac{x-2}{3}$ 的定义域需满足 $-1 \leqslant \dfrac{x-2}{3} \leqslant 1$,解得 $-1 \leqslant x \leqslant 5$,

所以定义域为$\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 5\}$,即 $x \in [-1,5]$.

4. (1) **解**:$f(x) = x\sin x$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$,关于原点对称,在定义域上任取一点 x,

$f(x) = x\sin x$, $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin x) = x\sin x$.

从而 $f(x) = f(-x)$, $f(x)$ 为偶函数.

(2) **解**:$f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$,定义域关于原点对称.

在定义域上任取一点 x,则

$f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$,

$$f(-x)=\ln(\sqrt{1+(-x)^2}+x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x),$$

从而 $f(-x)=-f(x)$，$f(x)$ 为奇函数.

5. **解**:由反函数的定义求解，$y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq -1\}$，

移项得 $(x+1)y=x-1, xy+y=x-1, x(1-y)=y+1$，反解出 $x=\dfrac{y+1}{1-y}$，

再将 x 与 y 互换，得反函数为 $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

6. **解**:因为 $|0|<1$，所以 $f(0)=1-2\times 0=1$，

因为 $|-1|=1$，所以 $f(-1)=1-2\times(-1)=3$，

因为 $\left|\dfrac{3}{2}\right|>1$，所以，$f(\dfrac{3}{2})=(\dfrac{3}{2})^2+1==\dfrac{13}{4}$.

7. **解**:(1) $f(x)=\arctan x^2$ 可以分解为 $f(x)=\arctan u$，$u=x^2$.

(2) $f(x)=e^{\sin 2x}$ 可以分解为 $f(x)=e^u, u=\sin v, v=2x$.

(3) $f(x)=\lg\sin\sqrt{x}$ 可以分解为 $f(x)=\lg u, u=\sin v, v=\sqrt{x}$.

(4) $f(x)=(\sin\ln x)^2$ 可以分解为 $f(x)=u^2, u=\sin v, v=\ln x$.

8. **解**:由复合函数的定义，

(1) $g[f(x)]=\sqrt{f(x)}=\sqrt{2^x}=2^{\frac{x}{2}}$；

(2) $f[g(x)]=2^{g(x)}=2^{\sqrt{x}}$.

9. **解**:由题意，行李不超过 50 千克时按每千克 0.15 元收费；行李超出 50 千克的部分按 0.25 元收费；从而自变量 x(千克) 是分段的，$y=f(x)$ 为分段函数.

当 $x\leqslant 50$ 时，由题意 $y=0.15x$

当 $x>50$ 时，由题意 $y=50\times 0.15+(x-50)\times 0.25=7.5+0.25(x-50)$.

综合以上 $y=\begin{cases}0.15x, & 0\leqslant x\leqslant 50;\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50.\end{cases}$

第二节　极限与连续

一、基本概念

1. 数列极限的概念

如果数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 的取值无限接近常数 a，我们称 a 是数

列$\{x_n\}$当$n \to \infty$时的极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. 函数的极限

(1) 当$x \to \infty$时函数的极限

当$|x|$无限增大时,$f(x)$的取值与常数L无限接近,此时称L是$f(x)$当$x \to \infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

(2) 当$x \to x_0$时函数的极限

设$f(x)$在x_0的某个去心邻域有定义,如果$x \to x_0$的过程中,对应的函数值$f(x)$无限接近于确定的数值A,那么就说A是函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限,记作:$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$或$f(x) \to A$(当$x \to x_0$).

3. 无穷小、无穷大

函数$f(x)$当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时为无穷小$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$(或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$);

函数$f(x)$当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时为无穷大$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$(或$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$).

4. 无穷小的比较

设α, β是同一变化过程中的无穷小量,则

(1) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$,则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,记作$\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$,则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小;

(3) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$,则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小;

(4) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小;

(5) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$,则称$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小.

5. 连续函数的概念

设函数$y = f(x)$在x_0的某一邻域有定义,如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$,那么称函数$y = f(x)$在点$x_0$处连续.

左连续$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$,

右连续$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

6. 间断点

若$f(x)$在x_0处出现以下三种情况之一时:

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义;(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

第一类间断点(包括可去间断点和跳跃间断点)$\Rightarrow f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 均存在.

可去间断点 $\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$.

跳跃间断点 $\Leftrightarrow f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$.

第二类间断点 $\Leftrightarrow f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 至少有一个不存在.

无穷间断点 $\Leftrightarrow f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 之中有一个为 ∞.

二、重要定理与性质

1. 收敛数列的性质

(1) 唯一性　　收敛数列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的.

(2) 有界性　　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

2. 函数极限的性质

(1) 唯一性　　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,那么极限唯一.

(2) 局部有界性　　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,那么存在 $M>0$ 和 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) 保号性　　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,A>0$(或 $A<0$),那么存在 $\delta>0$,使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

3. 无穷小与函数极限的关系

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$,其中 α 是自变量同一变化过程中的无穷小.

4. 等价无穷小的定理

设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,但 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

5. 极限的运算法则

(1) 有限个无穷小的和也是无穷小;

(2) 有限函数与无穷小的乘积为无穷小;

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$,

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$,

若 $B \neq 0$，$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

6. 极限存在的两个准则

准则 Ⅰ　如果数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 满足下列条件：

(1) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \quad (n = 1, 2\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$，那么 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

准则 Ⅰ′　如果 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 满足下列条件：

(1) $\exists \delta > 0 (M > 0)$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$（或 $|x| > M$）时有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$.

那么 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$.

准则 Ⅱ　单调有界数列必有极限.

7. 连续函数的运算定理

(1) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（当 $g(x_0) \neq 0$ 时）在 x_0 处连续.

(2) 单调连续函数的反函数是单调连续的.

(3) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$ 且 $y = f(u)$ 在 $u = a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)) = f(a)$.

(4) 设函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续且 $g(x_0) = u_0$，而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$ 处连续，那么复合函数 $f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 处也连续.

(5) 一切初等函数在其定义域内都是连续的.

8. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\forall x \in [a,b]$，$\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ 使得 $m = f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) = M$.

(2) 有界性定理　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\forall x \in [a,b]$，$\exists M > 0$，使得 $|f(x)| \leqslant M$.

(3) 零点定理　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则 $\exists \varepsilon \in (a,b)$，使得 $f(\varepsilon) = 0$.

(4) 介值定理　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且在端点取不同的函数值 $f(a) = A$ 及 $f(b) = B$，则对于 A、B 之间的任意一个数 C，存在 $\varepsilon \in (a,b)$ 使得 $f(\varepsilon) = C$.

三、典型例题精解

1. 利用极限运算法则求极限

例 1 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+4x}{11x^2+6}$.

解:因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x^n}=a(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x})^n=0$. 所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+4x}{11x^2+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9+\dfrac{4}{x}}{11+\dfrac{6}{x^2}}=\dfrac{9}{11}$.

注:当 $a_0\neq 0,b_0\neq 0,m$、n 为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},n=m\\ 0,\ n>m\\ \infty,n<m\end{cases}$$

2. 利用夹逼准则求极限

例 2 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})$.

解:因为$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\leqslant\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\leqslant\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\dfrac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1}=\dfrac{1}{2}$,

由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})=\dfrac{1}{2}$.

3. 利用两个重要极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

例 3 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{2x}$.

解:(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4(\dfrac{x}{2})^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}})^2=\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{2x} \xlongequal{t=-\frac{1}{x}} \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}(-2)} = e^{-2}$.

4. 利用无穷小的性质求极限

例 4　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^n)}{\ln^m(1+x)}(m,n\in \mathbf{N}^*)$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{x+1}{x^2}\sin(x^2+3x+1)]$.

解：(1) 由于 $\ln(1+x^n)\sim x^n$，　$\ln^m(1+x)\sim x^m$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^n)}{\ln^m(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}\infty, n<m\\ 1,\ n=m.\\ 0,\ n>m\end{cases}$$

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2}=0$，而 $|\sin(x^2+3x+1)|\leqslant 1$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{x+1}{x^2}\sin(x^2+3x+1)]=0$.

5. 判断函数的连续性

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, x\neq 0\\ 1,\qquad x=0\end{cases}$，问 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续?

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$，则

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}{1+\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}=1, f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1.$$

由于 $f(0+0)\neq f(0-0)$. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限不存在，因而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

6. 求函数的间断点

例 6　求函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e}{x(x-1)}$ 的间断点.

解：显然 $f(x)$ 在其定义域 $\{x\mid x\neq 0 且 x\neq 1\}$ 内连续，又因 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-e}{x(x-1)}=\infty$，

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x-e}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e(x-1)}{x(x-1)}=e,$$

同理 $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^x-e}{x(x-1)}=e$.

综合可知 $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点,而 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

习题 1-2 解答

1. **解**:$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,由极限的定义

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,从而 $x\to 0$ 时,$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 极限不存在.

2. **解**: $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ 1, & x=0.\\ x+1, & x>0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在;

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$,

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$,所以当 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 存在极限,极限值为 1.

3. **解**:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n-1)}{2}\cdot n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n^2-n}{2}}{n^2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n^2+11n+6}{5n^3+n}=\dfrac{1}{5}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}(2-\dfrac{1}{2^n})=2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=2-0=2$.

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+1}{2\times 1+1}=\dfrac{2}{3}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=2$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2}{2x^2+3x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{2+0}=-\dfrac{1}{2}$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x}{4x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\frac{2}{x}}{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{4}=\infty$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x-1}{3x^5-2x^4+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^5}}{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^5}}$.

因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0,\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}=0,\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^5}=0,\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$.

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{0}{3-0+0}=0$.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}=1-0+0=1$.

(10) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2(\sqrt{4-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2\times 4+1}+3}=\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

(11) 因为$|\arctan x|\leqslant 1$,为有界值，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1.$$

4. **解**:(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\pi\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{x}}{\dfrac{\pi}{x}}=\pi\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{x}}{\dfrac{\pi}{x}}=\pi\cdot 1=\pi$.

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

5. **解**:(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+x}{x})^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}[(\dfrac{1+x}{x})^{x}]^3=e^3$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{2x}\cdot(-2)}=[\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{2x}}]^{-2}=e^{-2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-4}{x+3})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+3-7}{x+3})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{7}{x+3})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{7}{x+3})^{\frac{x+3}{-7}\cdot\frac{-7x}{x+3}}$.

因为$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{7}{x+3})^{\frac{x+3}{7}}=e.\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x}{x+3}=-7$.所以原式$=e^{-7}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}=[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}]^3=e^3$.

6. **解**:(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.