21世纪高等学校规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

GAODENG SHUXUE（上册）

主编 王金金
主审 李尚志

GAODENG SHUXUE

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是作者近年来在建设“高等数学”精品课程的教学实践中，按照对课程体系、教学内容进行深入研究和改革的精神，根据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合我国中学教育课程改革的实际情况，为适应我国各类高等学校“高等数学”课程的教学而编写的.

内容上以培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及分析和解决应用问题能力为主线，重要概念均通过实际背景引出，并以其几何意义和物理意义的对比再现其本质内涵.定理、性质的原理在运用中以朴素的语言体现其逻辑性、严谨性，展现了从本质到现象的过程.

全书分上、下两册出版，上册内容包括：第1章，函数、极限与连续；第2章，导数与微分；第3章，微分中值定理与导数的应用；第4章，不定积分；第5章，定积分；第6章，空间解析几何.书末附有习题答案.

本书通俗易懂，例题搭配合理，便于学生理解和掌握.为了适应各类学时的学生使用，内容包括了工科类本科“高等数学”基本要求的全部内容，使用者可根据学时及专业需要适当取舍.本书可作为各类普通高等学校工科“高等数学”课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/王金金主编.--北京：北京邮电大学出版社，2010.3

ISBN 978-7-5635-2155-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第033352号

书 名	高等数学(上册)
主 编	王金金
责任编辑	苏文刚
出版发行	北京邮电大学出版社
社 址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010-62282185(发行部) 010-62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经 销	各地新华书店
印 刷	北京忠信诚胶印厂
开 本	787 mm×960 mm 1/16
印 张	17
字 数	341千字
版 次	2010年3月第1版 2010年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2155-5 定价：26.00元

前　言

高等数学是一门经典的学科，但随着社会的发展，它也是一门与时俱进的学科.它的发展反映了社会发展的需要.随着我国中学新课标的实施，高等数学中的基础知识开始普及化，由此对高等数学教学内容改革也提出了新的要求.为了适应这一新的要求，结合我国中学教育课程改革的实际情况，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，在作者近年来建设“高等数学”精品课程的教学实践基础上编写了本书.

在编写过程中，特别注意了与中学数学教学的衔接，对中学数学已讲授过的内容（如集合、函数，向量的概念、坐标、数量积等），在教材中有些只给出结论，有些可以不讲授；对中学数学中没有讲授的极坐标，在定积分应用中极为重要，做了一些补充，保持了教材的完整性.

全书分上、下两册出版，共 11 章.上册内容包括：第 1 章，函数、极限与连续；第 2 章，导数与微分；第 3 章，微分中值定理与导数的应用；第 4 章，不定积分；第 5 章，定积分；第 6 章，空间解析几何；下册内容包括：第 7 章，多元函数微分及其应用；第 8 章，重积分；第 9 章，曲线积分和曲面积分；第 10 章，无穷级数；第 11 章，微分方程.

教材中保持结构严谨，逻辑清晰，通俗易懂，例题合理分配，注重基础，同时加强应用，相对独立，便于取舍，适合高等院校工科类各专业学生使用.

作为高等院校理工科专业重要的基础理论课，本书旨在帮助学生达到高等院校对本课程的两个要求：一是为后继课程提供必需的基础数学知识；二是传授数学思想，培养学生的创新意识，逐步提高学生的数学素养、数学思维能力和应用数学的能力.

本书由王金金教授主编.其中第 1、2 章由王金金教授执笔，第 4、8、9 章由李广民教授执笔，第 3、6、7 章由任春丽副教授执笔，第 5、10、11 章由张卓奎副教授执笔.

西安电子科技大学刘三阳教授认真审阅了书稿.北京航空航天大学李尚志教授主审了本书，提出了许多宝贵意见.在此一并表示衷心的感谢.

本书在编写过程中得到西安电子科技大学理学院领导及从事“高等数学”教学的广大教师的热情支持，他们对本书的编写提出了许多宝贵意见，编者在此致以深深的谢意.

由于编者水平与经验有限，错误与不妥之处一定难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

目　录

第1章

函数、极限与连续

初等数学(代数、几何、三角)研究的是不变的量(常量)和规则的图形,而高等数学研究的是客观世界中大量存在着的变量和不规则图形. 函数是同一自然现象或技术过程中变量之间依赖关系的反映,它是高等数学中最重要的基本概念之一,也是高等数学研究的对象. 极限方法是高等数学中的基本方法,它是通过对变量在不同条件下变化趋势的研究,以解决初等数学所不能解决的问题. 事实上,高等数学中的许多基本概念,如连续、导数、定积分等,本身就是某种特殊形式的极限.

在这一章中,首先复习和归纳中学数学中关于函数的知识,并进一步引入初等函数的概念,在此基础上,再来讨论函数的极限和函数的连续性.

第1节 初等函数

一、邻域

邻域是一个经常用到的概念.

设 $a,\delta \in \mathbf{R}$, 且 $\delta > 0$, 称数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$, 即 $U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$.

由于 $|x-a| < \delta$ 相当于 $a-\delta < x < a+\delta$, 故 $U(a,\delta)$ 是以 a 为中心,δ 为半径的开区间. 通常称点 a 为该邻域的中心,δ 称为该邻域的半径,如图 1-1 所示.

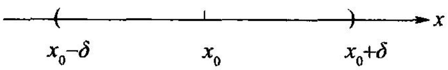


图 1-1

有时需要用到不含中心 a 的邻域. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心 δ 邻域,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$. 即 $\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$, 这里 $0 < |x-a|$ 表示 $x \neq a$.

为了方便,称开区间 $(a-\delta,a)$ 为 a 的左 δ 邻域,称开区间 $(a,a+\delta)$ 为 a 的右 δ 邻域.

二、函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量同时变化．一般这几个变量并不是彼此孤立变化的，而是相互有联系，遵从一定规律变化的．

现在考虑两个变量的简单情形．

例 1.1.1　圆的面积问题．考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的依赖关系 $A=\pi r^2$．当圆的半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，圆的面积 A 也就随之确定了．当半径 r 变化时，其面积 A 也变化．

例 1.1.2　自由落体问题．设物体下落的时间为 t，下落距离为 h，假定从 $t=0$ 时开始下落，那么 h 与 t 之间的依赖关系由公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 给出，其中 g 为重力加速度．在这个关系中，下落距离 h 随时间 t 的变化而变化．若物体落地的时刻为 $t=T$，则当时间 t 在区间 $[0,T]$ 内任意取定一个数值时，由上式即可确定下落距离 h．例如，当 $t=1$ 时，$h=\frac{1}{2}g$；当 $t=2$ 时，$h=2g$，等等．

上述两个例子描述的问题各不相同，但当抽去所考虑的量的具体含义后，它们都表达了两个变量之间的依赖关系：当其中一个变量在某一范围内取定一个值时，另一个变量就按一定的法则有一个确定的值与之对应．两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质．下面给出函数的定义．

定义　**设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集．如果对于每一个 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则(或关系)总有唯一确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$．x 称为自变量，y 称为因变量(或函数)，数集 D 称为这个函数的定义域，而因变量 y 的变化范围称为函数 $f(x)$ 的值域．**

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可以用 φ、F 等其他字母表示，此时函数记作 $y=\varphi(x)$、$y=F(x)$ 等．

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如在例 1.1.1 中，定义域 $D=\{r\mid r\in(0,+\infty)\}$；在例 1.1.2 中，定义域 $D=\{t\mid t\in[0,T]\}$．如果不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，则函数的定义域就是自变量所能取得的使算式有意义的一切实数值．例如，函数 $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ 的定义域是 $[-2,1)\cup(1,2]$．

函数的对应法则是多种多样的，但一般表示一个函数主要采用解析法、表格法和图示法，这 3 种方法在中学都已经比较熟悉了．在高等数学中还常常用到分段函数，即用几个式子分段来表示一个函数．下面举几个分段函数的例子．

例 1.1.3　函数 $u_a(t)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1, & t>a\end{cases}$ $(a\in\mathbf{R})$，其定义域为 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$，值

域为 {0,1}. 此函数在电子技术中经常遇到,称为单位阶跃函数. 这种用两个以上解析式表示的函数称为分段函数. 该函数的图形如图 1-2 所示.

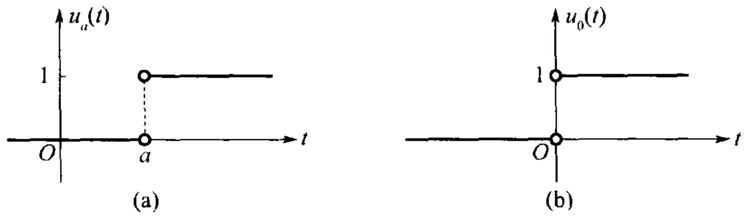


图 1-2

例 1.1.4　函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

称为符号函数,其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{-1,0,1\}$. 它的图形如图 1-3 所示. 对于任何实数 x, 关系式 $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$ 恒成立.

例 1.1.5　设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作 $[x]$, 则函数 $y = [x]$ 称为取整函数. 其图形如图 1-4 所示,在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跃度为 1. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为所有整数. 这个函数的特点是,与 x 相对应的函数值 y 为不超过 x 的最大整数,例如, $\left[\frac{4}{9}\right] = 0, [\pi] = 3, [-4.2] = -5$.

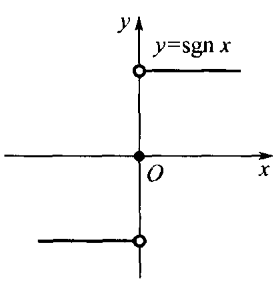


图 1-3

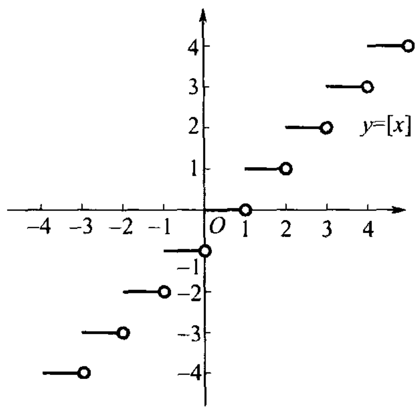


图 1-4

三、函数的简单性质

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I \subset D$. 如果对区间 I 上的任意两点 x_1 和 x_2, 当 $x_1 <$

x_2 时总有不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(如图 1-5);若当 $x_1 < x_2$ 时总有不等式 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的(如图 1-6).单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.从图形上看,单调增加函数表现为曲线从左到右上升,单调减少函数表现为曲线从左到右下降.

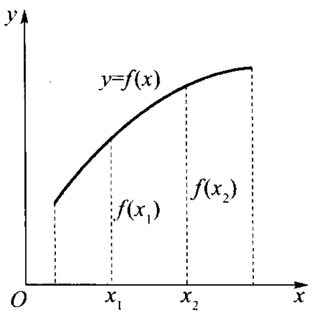


图 1-5

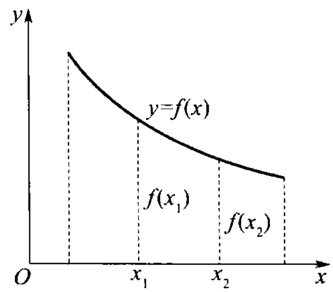


图 1-6

例如,函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的,在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的;在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x) = x^2$ 不是单调的(如图 1-7).又如函数 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的(如图 1-8).

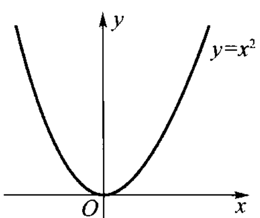


图 1-7

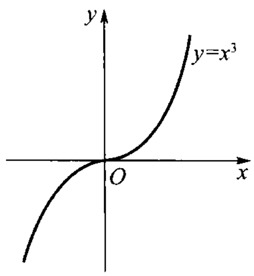


图 1-8

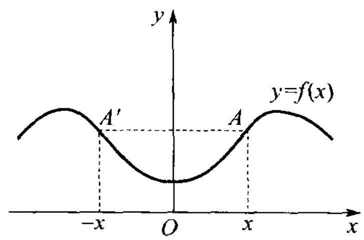
2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点是对称的,且对于任何 $x \in D$,恒有 $f(-x) = f(x)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 为偶函数;如果恒有 $f(-x) = -f(x)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

从函数图形上看,偶函数的图形是关于 y 轴对称的,奇函数的图形是关于原点对称的(参见图 1-9).

例如,对于函数 $y(x) = x^3$,由于 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$,所以它是奇函数;而对于函数 $y(x) = x^4$,由于 $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$,所以它是偶函数.一般地,$x$ 的奇次幂是奇函数,x 的偶次幂是偶函数.

除了奇函数和偶函数以外,还存在大量的非奇非偶函数.可以证明,任何一个在对称区间 $(-a, a)$ 上有定义的函数一定能写成一个奇函数和一个偶函数之和.实际上,令



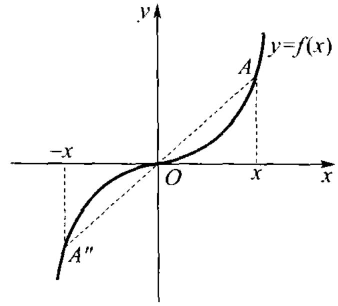


图 1-9

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

则容易验证，$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，并且 $f_1(x)$ 是偶函数，$f_2(x)$ 是奇函数.

读者还可自行证明：两个奇函数的积是偶函数，两个偶函数的积是偶函数，奇函数与偶函数的积是奇函数.

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零数 l，使得对于任意的 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期指的是最小正周期.

例如，正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$ 都是周期函数，其最小正周期均为 2π. 正切函数 $y=\tan x$ 也是周期函数，其最小正周期为 π.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D, I\subset D$. 如果存在正数 M，使得对任意 $x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界. 函数无界是指对于无论多么大的正数 M，总存在 $x_1\in I$，使得 $|f(x_1)|>M$.

若存在正数 K_1，使得对任意 $x\in I$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界，而正数 K_1 称为函数 $f(x)$ 的一个上界；如果存在正数 K_2 使得对任意 $x\in I$，有 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有下界，而正数 K_2 称为函数 $f(x)$ 的一个下界.

关于函数的有界性，有结论：函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在该区间上既有上界又有下界. 读者可自行证明此结论.

四、反函数与复合函数

1. 反函数

在自由落体运动过程中，物体下落距离 h 可表示为时间 t 的函数：$h=\frac{1}{2}gt^2$，在其定义

域内任意确定一个时刻 t，即可由该函数得到下落的距离 h. 如果考虑此问题的逆问题，即已知下落距离 h，求时间 t. 此时有 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$. 在这里，原来的因变量和自变量进行了交换，这样将自变量和因变量交换所得到的新函数即为原来函数的反函数.

一般，对于函数 $y=f(x)$，若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时，变量 x 在函数的定义域内都有唯一确定的值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，则变量 x 是变量 y 的函数，把这个函数用 $x=\varphi(y)$ 表示，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 显然，如果 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，那么 $y=f(x)$ 也是 $x=\varphi(y)$ 的反函数. 通常函数 $y=f(x)$ 的反函数也记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，我们把自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以可将 $x=\varphi(y)$ 写成 $y=\varphi(x)$. 由于函数的实质是自变量和因变量的对应关系，至于 x 和 y 仅仅是记号而已，$x=\varphi(y)$ 和 $y=\varphi(x)$ 中表示对应关系的符号 φ 并没有改变，它们实质上是同一个函数.

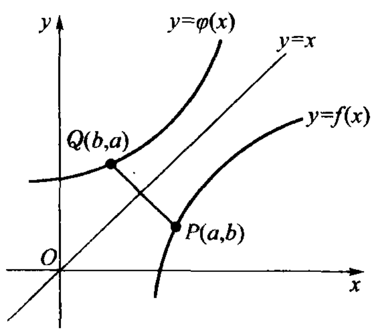


图 1-10

下面分析互为反函数的两个函数图形的关系. 如图 1-10 所示，$y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 在同一坐标系中的图形是同一曲线. 若函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=\varphi(x)$，则对函数 $y=f(x)$ 图形上的任一点 $P(a,b)$，有 $b=f(a)$，因而 $a=\varphi(b)$，即反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形上必有一点 $Q(b,a)$ 与 $P(a,b)$ 对应. 而 P,Q 两点是关于直线 $y=x$ 对称的(即直线 $y=x$ 垂直平分线段 PQ). 同样可以说，反函数 $y=\varphi(x)$ 图形上的任意一点也必有函数 $y=f(x)$ 图形上的一点与之对应，并且这两点同样是关于直线 $y=x$ 对称的. 因此，可以得到关于反函数图形的一条性质：在同一个坐标平面内，函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

2. 复合函数

在实际问题中，经常会遇到一个函数和另一个函数发生联系. 例如，球的体积 V 是其半径 r 的函数：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$；由于热胀冷缩，随着温度的改变，球的半径也会发生变化，根据物理学知道，半径 r 随温度 T 变化的规律是 $r=r_0(1+\alpha T)$，其中，r_0,α 为常数，将这个关系代入球的体积公式，即得到体积 V 与温度 T 的函数关系

$$V=\frac{4}{3}\pi\left[r_0(1+\alpha T)\right]^3.$$

这种将一个函数代入另一个函数而得到的函数称为上述两个函数的复合函数.

一般地，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D，而 $W=\{u\,|\,u=g(x),x\in D\}$，且 $W\subset D_1$，则由 $y=f[g(x)],x\in D$ 确定的函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数，其中 u 称为中间变量.

例如，设 $y=\cos u, u=x^2$，则由这两个函数复合而成的函数为 $y=\cos x^2$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

需要注意的是，不是任何两个函数都能够复合成一个复合函数. 例如，函数 $y=\ln u$，$u=-x^2$ 就不能复合成复合函数. 这是因为，函数 $y=\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，而函数 $u=-x^2$ 的值域为 $(-\infty,0]$，二者的交集为空集，根据复合函数的定义，这两个函数不能复合成复合函数.

复合函数也可由两个以上函数经过复合构成. 例如，设 $y=\sqrt{u}, u=\cot v, v=\frac{x}{2}$，则得复合函数 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$，这里 u 和 v 都是中间变量.

应当注意，求复合函数关键是对应法则的复合，而与用什么符号表示自变量、中间变量、因变量无关. 例如，$f(x)=1+x, g(x)=\ln|x|$，则同样可构成复合函数

$$f[g(x)]=1+\ln|x|,\quad g[f(x)]=\ln|1+x|.$$

不是复合函数的函数也称为简单函数，如 $y=\frac{x+\sin x}{2x}$，$y=x\cos x$ 等.

五、初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 基本初等函数在函数研究中起着基础的作用，因此，对这几种函数的定义、图形、主要性质要十分熟悉. 下面将它们的主要性质简单总结一下，以方便以后作进一步讨论.

1. 幂函数

形如 $y=x^\mu$（μ 是常数）的函数称为幂函数.

幂函数的定义域与 μ 值有关. 当 μ 为正整数时，幂函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；当 μ 为负整数时，幂函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 对于所有的实数 μ，幂函数 $y=x^\mu$ 具有公共的定义域 $(0,+\infty)$.

当 μ 为偶数时，幂函数 $y=x^\mu$ 是偶函数；当 μ 为奇数时，幂函数 $y=x^\mu$ 为奇函数. 当 $\mu>0$ 时，幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；当 $\mu<0$ 时，幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少.

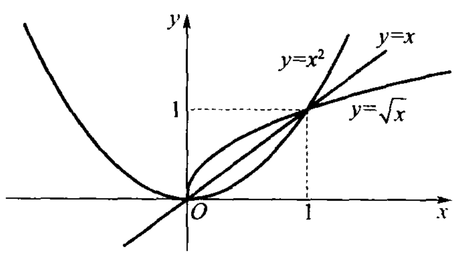


图 1-11

当 μ 取不同值时,幂函数 $y=x^{\mu}$ 的图形如图 1-11、图 1-12、图 1-13 所示.

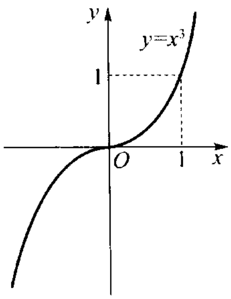


图 1-12

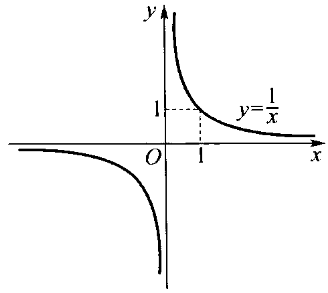


图 1-13

2. 指数函数

形如 $y=a^x$(a 是常数且 $a>0,a\neq 1$)的函数称为指数函数.

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由于对任意实数值 x,总有 $a^x>0$,且 $a^0=1$,因此指数函数的图形总在 x 轴的上方,且通过点 $(0,1)$.

当 $a>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 单调增加,且 a 的值越大,函数增加的速度越快;当 $0<a<1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 单调减少,且 a 的值越小,函数减少的速度越快.

图 1-14 分别描绘了 $a>b>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 和 $y=b^x$ 及 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ $\left(0<\frac{1}{a}<1\right)$ 的图形.

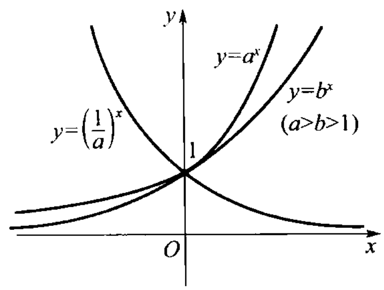


图 1-14

在高等数学中,常常用到指数函数的如下性质:$a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$,$a^{x_1-x_2}=\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$,$a^{x_1x_2}=(a^{x_1})^{x_2}$,$a^{-x}=\frac{1}{a^x}$. 特别地,$a^{x+c}=a^c\cdot a^x$,这表明指数函数具有一个基本特征,就是当自变量增加一个固定的量 c 时,函数值总是现有值乘以一个固定的数 $b=a^c$.

在以后的学习过程中,用得最多的指数函数是函数 $y=\mathrm{e}^x$,其中 e 为常数,其值为 e=2.718 281 8…,它的意义将在以后加以说明.

3. 对数函数

指数函数的反函数是对数函数,记为 $y=\log_a x$(a 是常数且 $a>0,a\neq 1$).

对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$,根据对数函数的定义域知,$y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴的右方,且通过点 $(1,0)$. 因为对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq 1$)互为反函数,故它的图形与指数函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

当 $a>1$ 时,在区间 $(0,1)$ 内,y 的值为负,此时图形位于 x 轴下方,而在区间 $(1,+\infty)$ 内,y 值为正,此时图形位于 x 轴上方. 在其定义域内,对数函数 $y=\log_a x$ 是单调增加的.

当 $0<a<1$ 时,在区间 $(0,1)$ 内,y 的值为正,此时图形位于 x 轴上方,而在区间

$(1, +\infty)$ 内，y 值为负，此时图形位于 x 轴下方. 在其定义域内，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调减少的.

图 1-15 描绘了对数函数 $y=\log_a x$ 的图形.

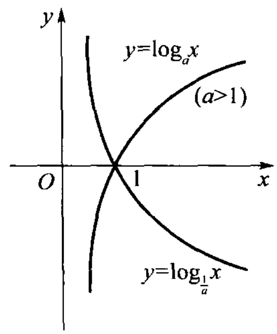


图 1-15

高等数学中常常用到对数函数的如下性质：若 $a^x=y$，则 $x=\log_a y$，$a^{\log_a x}=x$，$\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$，$\log_a\dfrac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$，$\log_a x^m=m\log_a|x|$，$x=\log_a a^x$，$\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

以后会经常遇到以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$，称为自然对数函数，简记为 $y=\ln x$.

4. 三角函数

三角函数在数学和其他学科中有着广泛的应用. 自然界中有很多现象都可用三角函数来描述，如简谐振动、交流电等. 三角函数有正弦函数 $\sin x$、余弦函数 $\cos x$、正切函数 $\tan x$、余切函数 $\cot x$、正割函数 $\sec x$、余割函数 $\csc x$，它们都是周期函数.

高等数学中常常用到三角函数的如下性质：

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad 1+\tan^2 x=\sec^2 x,$$

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y},$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x},$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)],$$

$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)],$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)],$$

$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)].$$

正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，周期均为 2π. 正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数，它们的图形见图 1-16 和图 1-17.

正切函数 $\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$，周期为 π，是奇函数；余切函数 $\cot x$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\}$，周期为 π，是奇函数. 它们的图

形如图 1-18 和图 1-19 所示.

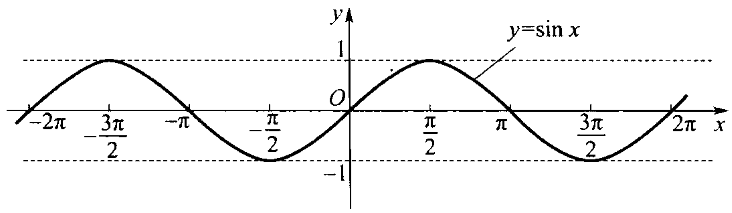


图 1-16

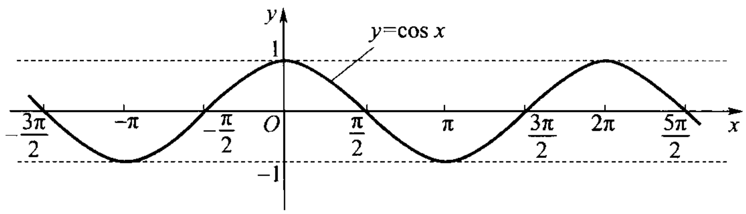


图 1-17

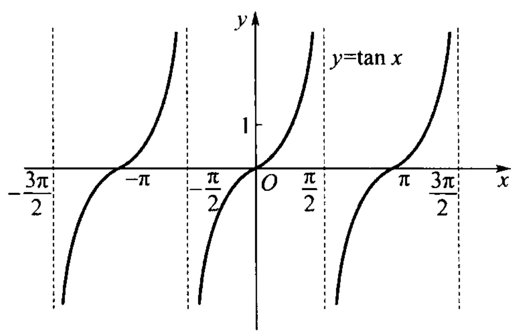


图 1-18

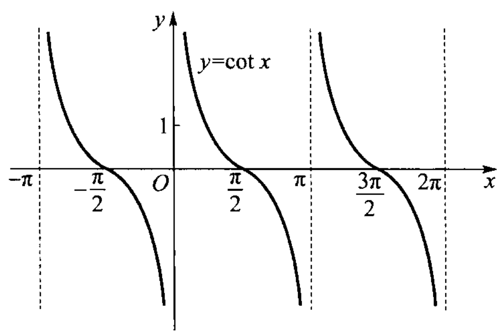


图 1-19

正割函数 $\sec x$ 是余弦函数 $\cos x$ 的倒数,余割函数 $\csc x$ 是正弦函数 $\sin x$ 的倒数,即

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

它们都是以 2π 为周期的周期函数.

5. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 正弦函数 $y = \sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是单调增加的,它在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数记为 $y = \arcsin x, x \in [-1,1]$,称为反正弦函数,其图形如图 1-20 所示. 余弦函数 $y = \cos x$ 在$[0,\pi]$上是单调减少的,它在$[0,\pi]$上的反函数记为 $y = \arccos x$,