现代数学基础

20 几何与拓扑的概念导引

■ 古志鸣 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

20

几何与拓扑的概念导引

Jihe yu Tuopu de Gainian Daoyin

■ 古志鸣 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书致力于对几何与拓扑的基本概念的解释及基本理论的综述,内容涉及古典几何、微分流形与李群、微分几何、拓扑学、代数曲线。

本书叙述较为细致,语言较为通俗,需要的预备知识较少,特别注意从直观的几何现象入手讲解抽象的概念,尽量介绍本学科与其他学科的关系,以便照顾更多的读者群体。

本书是了解近代几何与拓扑学的导引,可作为大学数学系及其他有关专业的研究生的公共课教材,也可以用作自学者的入门读物。

图书在版编目(CIP)数据

几何与拓扑的概念导引/古志鸣编著.—北京:高等教育出版社,2011.1

ISBN 978-7-04-031069-6

Ⅰ.①几… Ⅱ.①古… Ⅲ.①几何-高等学校-教材 ②拓扑-高等学校-教材 Ⅳ.①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 215861 号

策划编辑 李 鹏 **责任编辑** 田 玲 **封面设计** 张 楠
责任绘图 尹 莉 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 刘 莉
责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2011 年 2 月第 1 版
印　　张	20	**印　　次**	2011 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	370 000	**定　　价**	49.00 元

物料号　31069-00

前　言

视觉占用了大脑皮层的 80% 或 90%。……因此 spatial intuition 或者 spatial perception 是一种非常强有力的工具, 也是几何学在数学上占有如此重要位置的原因, 它不仅仅对那些明显具有几何性质的事物可以使用, 甚至对那些没有明显几何性质的事物也可以使用。我们努力将它们归结为几何形式, 因为这样可以让我们使用我们的直觉。我们的直觉是我们最有力的武器。

(M.F. 阿蒂亚, 2000 年在南开大学的报告)

几何学 (正如上面阿蒂亚所指的, 这里是指广义的几何学, 它包括狭义的几何学与拓扑学) 在 20 世纪基础数学中的重要地位已是公认的事实, 只需列举近 50 年来菲尔兹奖得主的获奖工作便可得知。从这些工作中还可以看到物理学与几何学之间的更密切的关系已被人们所认识; 另外, 由于信息科学等学科的飞速发展, 在物理学之外的许多新兴学科中也出现了对几何知识系统应用的现象。例如: 在量子计算机领域中, 人们使用许多拓扑学的概念和知识; 在机器人理论领域中, 人们需要关于李群的系统的几何与拓扑知识; 在编码学和信息安全领域中, 人们需要使用深刻的代数曲线理论, 等等。另一方面, 由于历史的原因, 在几何方面我国的大学数学教育比较薄弱, 这就更需要在传播几何与拓扑学知识方面做大量的基础性工作。对于一个从事实际工作的人来说, 他的当务之急可能是尽快地建立起有关的基本概念, 熟悉若干基本结论, 然后才谈得上做出新的工作。比如在编码学中使用代数曲线时, 一些深刻的定理几乎是无法绕过去的, 而为了理解它们, 仅靠纯代数的描述对于没有受过几何学训练的人

来说这无疑是天书。我们在教学和科研工作中经常遇到这类情形, 深感有必要将自己的学习心得写出来, 为大家提供参考。

写作的机会缘于 2002 年。从那一年起, 我每年为我校的硕士研究生讲授名为“几何与拓扑”的公共基础课。考虑到听课的研究生来自不同的 (包括非数学系的) 专业, 加之目前国内大学本科阶段的数学课程中几何类课程很少, 所以最初在草拟教学大纲时就尽量安排基础性的材料, 而且覆盖面要适当地宽, 以便使各专业的选课者均能在不太长的时间内对几何与拓扑学的基本概念和基本结论有一个大致的了解, 为他们今后进一步的学习打下基础。因为一时没有找到与此目标相适应的教科书, 我就开始自己编写讲义, 边写边讲, 边讲边改, 逐渐积累形成了本书的雏形。

本书是为理工科 (包括非数学专业) 研究生介绍几何学与拓扑学的入门读物。在内容安排和叙述方式上作了如下考虑: 内容的选择既注重基本概念和基本理论, 又尽可能多地涉及当前应用领域所需的几何与拓扑的不同分支; 在叙述方式上, 尽量多用实例来解释概念和结论, 在这方面使用的篇幅特别大; 对于有较强的普遍性的问题, 多从原始的模型讲起, 以帮助读者加深印象; 对于有重要意义而又不难接受的数学推理和计算, 采用正规的数学方式表达, 对于有重要意义而较难接受的数学推理和计算, 则利用实例进行解释, 但是结论（如定理、推论等）的叙述仍是严格的。

我一直很欣赏那种对概念解释得很细的书, 比如伍鸿熙教授等写的 [33] 与 [34], 苏竞存教授写的 [30], 以及 T.Needham 教授写的 [19] 等, 这些都使人从中受到极大的教益, 也让人感受到作者诲人不倦的精神。本书既然把重心放在概念的导引上, 我想更应该向这个方向努力, 当然不敢预言效果如何, 只有请读者来评说了。

本书的第 1 章利用变换群的语言介绍古典几何学, 这一部分既是几何学发展的源头, 同时也仍然是有实用价值的基础理论。第 2 章的目标是详细解释微分流形及相关的概念, 以及围绕这些概念的最基本的结论。掌握它们是学习现代几何与拓扑学时首先要做的事。研究微分流形的基本方法是研究它上面定义的函数 (映射), 其中一种是向量场, 在第 3 章介绍; 另一种是微分形式, 在第 4 章介绍。第 5 章是对几何学中无法回避的一个基本概念——李群的简单介绍。第 6 章介绍微分几何中两个核心的概念, 即联络与曲率, 并借此机会介绍纤维丛方面的入门知识。拓扑学是现代几何学的一个既庞大又重要的部分, 我们仅在第 7 章中介绍拓扑学的核心内容之一, 即同调论的基础知识。按照当今的惯例, 代数几何已经是与几何学、拓扑学并列的独立学科, 不过, 像阿蒂亚说的, 代数几何“屡屡成为现代微分几何的巨大动力” (见《数学译林》第 23 卷, 第 2 期), 而且在当今的数学应用中也占有重要地位, 所以我们在最后一章里介绍了该学科的基本研究对象, 即代数曲线的入门知识。

考虑到本书是为多种专业的读者准备的,我们尽可能地减少了对预备知识的要求,只要求读者预先掌握大学理工科的微积分、线性代数及解析几何的基本内容;了解微分方程、抽象代数和复变函数的初步知识。对于有些较深而又必不可少的预备知识,我们放在正文中的适当位置介绍,以便于初学者学以致用。这里特别对第 8 章要多说几句话,学习代数几何有两条路径,一是代数方法,一是超越方法。在本书的前面几章中已对超越方法的基础作了较多的介绍,它对于理解代数几何的直观意义很有益处;但是就目前许多技术领域的读者来说,他们在接触代数几何 (主要是代数曲线) 的时候,见到的多是代数的处理方式。这样就可能发生两方面的困难,一是代数知识不足,而且在短时间内不易单独补充这些知识;二是代数的处理方式比较缺乏直观性,不易理解。鉴于上述考虑,我们对第 8 章的处理采用了两种方式并用的办法。

全书内容大致可以分成两大部分,第一部分由前四章组成,它们是学习几何与拓扑的必备知识。正因为是必备知识,所以在许多几何教科书上都能找到。如果要问本书的这一部分有什么特别之处,我觉得可以提到的是,其中稍微多写了几笔关于微分与导数的概念的演化线索,它是我学习的体会,也许对读者理解相关的内容有用。第二部分包括后面的四章,这部分可以全读,也可以根据需要选读其中的某几章。后四章中的每一章都对应着独立的一门几何学分支,这四章只能说是这些分支的概览,所以如果读者看过之后,有兴趣去看专门的教科书,那就是对我的努力的最好奖赏了。

把自己的数学功底与本书各章内容对照,我总有自不量力之感,所以书中的不当、甚至谬误之处一定难免,请专家及各位读者发现后及时指正。

在本书即将出版之际,我首先要感谢我的导师——南开大学的周学光教授,他引导我走进了几何与拓扑学的宏伟殿堂,而且一直关注着我的学习与工作;也要感谢母校的林金坤和周性伟等教授,他们讲授的高质量的课程使我有了继续学习的可能。我还要感谢在学术活动中认识的许多数学家,特别是姜伯驹教授、李邦河教授、林己玄教授、虞言林教授、孙以丰教授、吴振德教授、许以超教授,他们主讲的多门精彩课程及平时的指导使我受益匪浅。最后,我要感谢南京航空航天大学研究生院和数学系对出版本书的支持,感谢高等教育出版社的李鹏先生的热情帮助。

古志鸣

2010 年 6 月 25 日　于钟山麓

目　录

第 1 章　变换群与几何学

§1.1　引　　言

我们大约从初中时起就开始听到“几何性质”这个名词，估计当时每个人都自认为了解这个词的涵义，但是很少有人能准确地把其表述出来，即便是粗略地表述出来了，可能又发现各人对这个词的理解不完全一样. 1872 年，德国数学家克莱因 (F.Klein) 对这个问题给出了一个明确的答案，他在受聘于埃尔朗根大学的演讲中提出，所谓几何学，就是研究图形对于某类变换保持不变的性质的学问. 按照这一观点，所谓图形的“几何性质”便是它们对于某变换群保持不变的性质，换言之，有多少种不同的变换群，就有多少种不同的几何学. 克莱因的这个观点后来被称为“埃尔朗根纲领”.

考虑平面几何中对三角形进行分类的做法，最先想到的分类标准就是“全等”，用变换的观点看，就是考查平面图形在刚体运动这种变换下是否不变. 实际操作时总是想办法用三角形的某些数值特征来判断，即把三角形的边长和内角的大小这些数值中的某一部分进行组合，得到所谓的“边，边，边”，“边，角，边”，“角，边，角”等判别三角形全等的方法，而且这些充分条件也是三角形全等的必要条件，即几何学家们通常说的“完全的全等不变量”.

还有一个比较粗的分类标准，就是三角形的相似关系，这里对应的变换是相似变换. 很显然，按相似关系对三角形分类所得到的等价类会比用全等关系分类得到的等价类“大”，即“全等”蕴涵“相似”，反之不对. 与此相适应的是，相似的数值不变量也较简易，这时的“完全的相似不变量”是三对对应边的比，或两对对应角，或两对对应边的比及其夹角. 很显然，这些相似不变量也是全等不变量，但不是完全的全等不变量.

如何把上述认识的共性抽象出来呢？

我们先说明变换群的概念 (群的概念见附录 B). 设 X 是一个非空的集, 把 X 到自身的双射 (既是单射又是满射的映射) 的全体记为 $\mathcal{S}(X)$, 它显然不是空集 (因为它至少包括恒等映射 $1_X: X \to X$), 再把映射之间的复合当作 $\mathcal{S}(X)$ 中的二元运算, 则容易证明 $\mathcal{S}(X)$ 关于这个运算构成一个群, 称之为 X 的**全变换群**, 并把 $\mathcal{S}(X)$ 的子群叫做 X 的一个**变换群**.

作为一个简单的例子, 考虑 $X = \mathbf{R}$ 的情形, 把形如

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = x + b, \quad b\text{是常数}$$

的自映射的全体记为 $\mathcal{P}_1$, 容易验证 $\mathcal{P}_1$ 是 $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ 的一个子群, 而且是交换群.

再看另一个例子, 把 $\mathbf{R}$ 的形如

$$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = kx + b, \quad k \neq 0, b\text{是常数}$$

的自映射的全体记为 $\mathcal{A}_1$, 也容易证明 $\mathcal{A}_1$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个变换群 (但非交换).

然后我们来说明一个变换群可以对应一种几何学. 仍利用上面的两个变换群例子. 直线 $\mathbf{R}$ 上的几何图形比较简单, 比如考虑实系数 2 次方程 $\varphi(x) = x^2 + px + q = 0$ 的根所对应的点集 C, 姑且称之为二次点集. 这一类图形可能的形状只有三种情况, 即空集、单点 (或两个相同的点)、两个不同的点.

设 $f \in \mathcal{P}_1$, 它把二次点集 C 变成

$$f(C) = C_1.$$

为了看出 C_1 的形状, 应把 $y = f(x) = x + b$ 中的 x 解出来, 再代到 $\varphi(x) = 0$ 中. 计算表明, 新方程也是实系数 2 次方程, 而且与原方程有相同的判别式, 只是根 (如果根存在的话, 下同) 在 $\mathbf{R}$ 中的位置有一个平移, 所以 C_1 与 C 的形状完全相同, 只是相差一个平移. 另外, 在判别式为正时, 判别式的算术平方根正是两个根的距离, 这个距离在 f 作用下也不变. 按照克莱因的观点, $\mathbf{R}$ 中的二次点集作为一种几何图形, 它的形状及其中两点之间的距离是关于变换群 $\mathcal{P}_1$ 的两项几何性质.

计算还表明, $\mathcal{A}_1$ 中的元素 g 也把二次点集 C 变为二次点集 $g(C) = C_2$, 形状也保持不变, 但是 C_2 中两点之间的距离与 C 中两点之间的距离之比为 k. 所以同样是 $\mathbf{R}$ 中的二次点集, 它的形状也是关于变换群 $\mathcal{A}_1$ 的几何性质, 而两点之间的距离不是关于 $\mathcal{A}_1$ 的几何性质.

不同的几何学研究不同的几何性质. 在 $\mathcal{P}_1$ 情形, 我们能用判别式的值来对 $\mathbf{R}$ 中的二次点集进行分类; 在 $\mathcal{A}_1$ 情形, 我们能用判别式的符号来对 $\mathbf{R}$ 中的二次点集进行分类. 这里说的"判别式的值"与"判别式的符号"分别就是分类用的不变量. 上述两种分类法所依据的标准是两种不同的变换群.

本章的目的就是通过对仿射变换群的较详细的讨论来介绍克莱因的思想,然后简略地介绍一些度量几何与射影空间的知识.

§1.2 仿射坐标变换

笛卡儿坐标系的思想是近代几何学的源头,现在我们先在仿射空间里引入坐标系,然后讨论这些坐标系之间的关系,在 §1.5 中再过渡到变换群的语言,这样做对于初学者可能比较易于接受.

什么是仿射空间?许多专门的几何学教材中都给出了公理化的定义,我们不准备作这样的介绍.事实上,只要能让我们在描述后继的内容时思路足够清晰,仅仅给出仿射空间的一个直观模型就行了.

我们以后把集合 $\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$ 作为 n 维仿射空间的模型.注意,此处的 $\mathbf{R}^n$ 只是元素 (或叫做 $\mathbf{R}^n$ 的点)$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体,并不需要在这些元素之间定义运算.作为一个几何学对象,还应在 $\mathbf{R}^n$ 中定义某种结构,这里需要的概念是“几何向量”.

设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$中两个点,我们把有序偶 (A,B) 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**几何向量**,记之为 $\overrightarrow{AB}$,称 A 与 B 分别为 $\overrightarrow{AB}$ 的起点与终点.因为要考虑顺序,所以 $(B,\ A)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中另一个几何向量,即 $\overrightarrow{BA}$.

几何向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 之间的**相等**关系按下述方式规定:若 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, $D=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,则当

$$b_i-a_i=d_i-c_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

时说 $\overrightarrow{AB}$ **等于** $\overrightarrow{CD}$,记为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

读者可以证明,上述相等关系在 $\mathbf{R}^n$ 的全部几何向量的集合中是一个等价关系,从而得到一个商集合 V^n.详言之,把 $\mathbf{R}^n$ 中彼此相等的几何向量的集合(即一个等价类)算作一个元素,这就是 V^n 中的元素.为了更直观地理解 V^n,我们可以选定 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点 A,把 $\mathbf{R}^n$ 中以 A 为起点的全体几何向量记为 $T_A\mathbf{R}^n$,则依据几何向量相等的定义,集合 $T_A\mathbf{R}^n$ 恰好是集合 V^n 的一个代表,称 $T_A\mathbf{R}^n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 在 A 处的**切空间**.

对于 $\mathbf{R}^n$ 中另一点 B,当然切空间 $T_B\mathbf{R}^n$ 也是 V^n 的一个代表,这样一来,通过中介 V^n, $T_A\mathbf{R}^n$ 与 $T_B\mathbf{R}^n$ 之间就有一个明显的双射对应.详细地说,对于 $T_A\mathbf{R}^n$ 中的几何向量 $\overrightarrow{AP}$,设 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,则 $\overrightarrow{AP}$ 对应于 $T_B\mathbf{R}^n$ 中的几何向量 $\overrightarrow{BQ}$,其中

$$Q=(q_1,q_2,\cdots,q_n),\quad q_i=p_i-a_i+b_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

我们把这个双射 $\iota_{AB}:\overrightarrow{AP}\mapsto\overrightarrow{BQ}$ 称为从 $T_A\mathbf{R}^n$ 到 $T_B\mathbf{R}^n$ 的**标准平移**.这是一个非常重要的概念.(见图 1.1.)

为了对几何向量进行必要的运算, 我们要在 V^n 中引入线性运算, 使它成为实线性空间. 根据上面的讨论, 我们只需对任意选定的一个点处的切空间定义线性运算就可以了. 以下为了行文简洁, 我们把"几何向量"这个词简称为"向量".

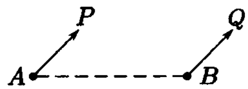

图 1.1 标准平移

设 $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ} \in T_A\mathbf{R}^n$, 定义 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$ 为 $T_A\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\overrightarrow{AC}$, 其中

$$C=(p_1+q_1-a_1,p_2+q_2-a_2,\cdots,p_n+q_n-a_n).$$

定义实数 λ 与 $\overrightarrow{AP}$ 的数乘 $\lambda\overrightarrow{AP}$ 为 $T_A\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\overrightarrow{AD}$, 其中

$$D=(\lambda p_1+(1-\lambda)a_1,\lambda p_2+(1-\lambda)a_2,\cdots,\lambda p_n+(1-\lambda)a_n).$$

容易证明上述定义的加法和数乘使得 $T_A\mathbf{R}^n$ 成为实线性空间, 从而 V^n 也成为实线性空间. 爱好严密的数学家们把点集 $\mathbf{R}^n$ 与线性空间 V^n 合称为 n 维**仿射空间**, 把 V^n 称为 $\mathbf{R}^n$ 的**仿射结构**.

读者容易看出, 上面定义的加法与数乘的原始模型就是平面或空间中的向量的加法与数乘.

关于切空间的这样的线性结构, 前述的标准平移显然是同构.

下面考虑切空间的维数. 我们断言, n 维仿射空间的每一点的切空间都是 n 维线性空间, 这只需找到切空间的一个基便可以验证了. 仍设 $A\in\mathbf{R}^n$ 为一个定点, 在 $T_A\mathbf{R}^n$ 中选取向量 $\overrightarrow{AP_1},\overrightarrow{AP_2},\cdots,\overrightarrow{AP_n}$, 其中

$$P_i=(a_1,\cdots,a_{i-1},a_i+1,a_{i+1},\cdots,a_n),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

很显然, $\{\overrightarrow{AP_i}\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 组成 $T_A\mathbf{R}^n$ 的基, 所以 $T_A\mathbf{R}^n$ 是 n 维线性空间. 以后常把 $T_A\mathbf{R}^n$ 的一个基称为仿射空间 $\mathbf{R}^n$ 在 A 处的一个**仿射标架**,有时也可略去大括号外面的下标, 简记 $\{\overrightarrow{AP_i}\}_{1\leqslant i\leqslant n}=\{\overrightarrow{AP_i}\}$.

习惯上常把上述仿射标架的起点记为字母 O, 要注意, O 照例仍是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个任意选定的点, 不必是 $\mathbf{R}^n$ 中的点 $(0,0,\cdots,0)$.

在取定 $\mathbf{R}^n$ 的一个仿射标架 $\{\overrightarrow{OB_i}\}$ 后, 我们就可以为 $\mathbf{R}^n$ 中任一点定义坐标. 设 $P\in\mathbf{R}^n$, 则 $\overrightarrow{OP}\in T_O\mathbf{R}^n$, 于是有唯一表达式

$$\overrightarrow{OP}=x_1\overrightarrow{OB_1}+x_2\overrightarrow{OB_2}+\cdots+x_n\overrightarrow{OB_n},$$

并称数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为点 P 关于仿射标架 $\{\overrightarrow{OB_i}\}$ 的**坐标**, 或简称为点 P 的**仿射坐标**. 概括地说, 给定 $\mathbf{R}^n$ 的一个仿射标架就相当于为 $\mathbf{R}^n$ 选定了一个仿射坐标系, 通常还把点 O 称为**坐标原点**, 并把 $\{\overrightarrow{OB_i}\}$ 简记为 $\{O;\boldsymbol{e}_i\}$, 其中 $\boldsymbol{e}_i=\overrightarrow{OB_i}$. (如上段所说, 原点是任意选定的.)

现在我们完成了本节开头时提出的第一个任务, 即引入仿射坐标系的概念. 下面来讨论 $\mathbf{R}^n$ 中不同坐标系之间的关系. 我们强调, 这是一个带有根本性的问题, 因为所有的几何性质都应该与坐标无关. 比如 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点, 它可以有不同的仿射坐标, 那么为了用坐标来辨认这个点, 就必须了解它的不同坐标之间的关系.

为此考虑 $\mathbf{R}^n$ 中的两个仿射标架 (从现在起到 §1.5 末, 把 "仿射标架" 简称为 "标架"), 记它们为 $\{O;\boldsymbol{e}_i\}$ 与 $\{O';\boldsymbol{e}'_i\}$, 我们来研究 $\mathbf{R}^n$ 中任一定点 P 关于这两个标架的坐标的关系. 根据点的坐标的定义, 有

$$\overrightarrow{OP}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n,\quad \overrightarrow{O'P}=y_1\boldsymbol{e}'_1+y_2\boldsymbol{e}'_2+\cdots+y_n\boldsymbol{e}'_n.$$

我们要找出 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$之间的关系. 利用标准平移, 可以把 $\overrightarrow{O'P}$ 等同于 $T_O\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\overrightarrow{OQ}$, 于是在 $T_O\mathbf{R}^n$ 中有等式 (见图 1.2)

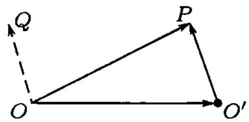

图 1.2 坐标变换

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OO'}. \tag{1.1}$$

利用标准平移, 还可以把 $T_{O'}\mathbf{R}^n$ 中的基向量 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ 等同于 $T_O\mathbf{R}^n$ 中的另一个基, 为节省记号, 我们仍记它为 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$, 这样, 式 (1.1) 化为

$$\sum_i x_i\boldsymbol{e}_i=\sum_i y_i\boldsymbol{e}'_i+\sum_i c_i\boldsymbol{e}_i, \tag{1.2}$$

其中 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是点 O' 关于标架 $\{O;\boldsymbol{e}_i\}$ 的坐标.

作为同一个线性空间 $T_O\mathbf{R}^n$ 中的两个基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 与 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$, 必有从前者到后者的过渡矩阵

$$F=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

使得

$$(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\cdots,\boldsymbol{e}'_n)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)F.$$

把这个式子代入 (1.2) 式便得

$$\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

这就是 $\mathbf{R}^n$ 中点的**仿射坐标变换式**.

在上面的推导中, 读者一定感觉到了标准平移所起的作用.

现在反过来, 设已经有了一个可逆矩阵 F 及一组数 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, 我们就可以在标架 $\{O;\boldsymbol{e}_i\}$ 之外再构造另一个标架 $\{O';\boldsymbol{e}_i'\}$, 使两者之间的坐标变换式恰好是等式 (1.3).

为了书写简洁, 常把 (1.3) 式改写成

$$x^{\mathrm{T}}=Fy^{\mathrm{T}}+c^{\mathrm{T}}. \tag{1.4}$$

如果总结一下, 我们可以得到以下结论: 在 $\mathbf{R}^n$ 中任意选定一个标架 $\{O;\boldsymbol{e}_i\}$, 那么 $\mathbf{R}^n$ 中其他的每个标架都恰好对应 $\mathbf{R}^n$ 上的一个仿射坐标变换, 反之亦可. 再把 (1.4) 的特例 $x^{\mathrm{T}}=y^{\mathrm{T}}$ 视为 $\{O;\boldsymbol{e}_i\}$ 到其自身的坐标变换, 就可以说 $\mathbf{R}^n$ 上的全体仿射坐标变换与全体仿射标架之间有双射对应.

§1.3 超 平 面

仿射空间中最简单的几何图形是超平面, 它是初等解析几何学中的直线与平面概念的直接推广.

定义 1.1 *设 Π 是仿射空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集, 若存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个标架及一个 n 元一次多项式*

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b,$$

*使得 Π 中各点关于此标架的坐标的集合与 p 的零点集 $p^{-1}(0)$ 是同一集合, 则称 Π 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个***超平面***, 并称 $p=0$ 是 Π 关于该标架的方程.*

这个定义中使用了一个标架及一个多项式 p, 我们可以断言, 如果 Π 是超平面的话, 定义中的条件不以标架的改变而改变, 用几何学的话说, 超平面这个几何学概念与标架 (即坐标系) 的选择无关.

事实上, 设两个标架之间的关系如 (1.3) 或 (1.4), 则

$$0=(a_1,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+b=(a_1,\cdots,a_n)\left(F\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}\right)+b$$

$$=(a_1,\cdots,a_n)F\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}+\Big(\sum_{i=1}^n a_ic_i\Big)+b,$$

记 $(a_1',\cdots,a_n')=(a_1,\cdots,a_n)F$ 及 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ic_i\right)+b=b'$, 则因 F 可逆, 得

$$(a_1',\cdots,a_n')\neq(0,\cdots,0),$$

于是 $\varPi$ 关于后一标架的方程为

$$a_1'y_1+\cdots+a_n'y_n+b'=0,$$

它仍然是 n 元一次方程.

在初等解析几何学中, 直线与平面都有方向的概念, 对于超平面也有相应的推广.

取超平面 $\varPi$ 中一个定点 Q, 设它在原坐标系中的坐标为 $(c_1,\cdots,c_n)$, 则

$$p(c_1,\cdots,c_n)=0.$$

利用线性方程 $p(x_1,\cdots,x_n)=0$ 的这个特解, 可以写出其通解

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\eta+\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix},$$

其中 $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程 $p(x)-b=0$ 的通解, 选其中的基础解系 $\eta^{(1)},\eta^{(2)},\cdots,\eta^{(n-1)}$, 就得到 $\varPi$ 的一组点 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$, 它们在原标架下的坐标分别是 $\eta^{(1)}+c,\eta^{(2)}+c,\cdots,\eta^{(n-1)}+c$, 这里 $c=(c_1,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$. 因为 $\eta^{(1)},\eta^{(2)},\cdots,\eta^{(n-1)}$ 是线性无关的, 故 $T_Q\mathbf{R}^n$中的向量组 $\{\overrightarrow{QP_i}\}$ 是线性无关的,$i=1,2,\cdots,n-1$. 注意 $\{P_i\}$ 是 $\varPi$ 中的点集, 所以向量组 $\{\overrightarrow{QP_i}\}$ 是 "$\varPi$ 中的" 向量组, 我们把这组向量称为 $\varPi$ 在 Q 处的**切标架**. 如果两个超平面 $\varPi$ 与 $\varPi'$ 的切标架经标准平移后可以互相线性表示, 则称 $\varPi$ **平行**于 $\varPi'$.

从上面的讨论可以看出, 超平面 $\varPi$ 被它的 n 个点 $Q,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 唯一确定, 或者说 $\varPi$ 被它的一个点 Q 及它的切标架唯一确定, 这些现象对于读者来说一定不陌生.

现在我们利用这一成果来讨论如何简化超平面的方程, 答案很简单, 即

定理 1.1 如果 $\varPi$ 是仿射空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个超平面, 则存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个仿射标架, 使 $\varPi$ 关于该标架的方程为

$$x_n=0.$$

证明　取定 Π 的一组点 $Q, P_1, \cdots, P_{n-1}$, 使向量组 $\overrightarrow{QP_1}, \overrightarrow{QP_2}, \cdots, \overrightarrow{QP_{n-1}}$ 构成 Π 的切标架, 因为 Π 的切标架是线性无关的, 所以必可将 $\overrightarrow{QP_1}, \overrightarrow{QP_2}, \cdots, \overrightarrow{QP_{n-1}}$ 扩充为 $T_Q\mathbf{R}^n$ 的基, 即得到以 Q 为原点的一个仿射标架. 显然, Π 关于此标架的方程形如 $x_n = 0$. □

当然读者知道, 当 $n = 3$ 时, 以上讨论的超平面就是 $\mathbf{R}^3$ 中的平面, 但是 $\mathbf{R}^3$ 中还有直线的概念. 于是我们还可以定义更广义的超平面的概念:$\mathbf{R}^n$ 中的子集 Π 叫做**余维数为 q 的超平面**当且仅当存在 $\mathbf{R}^n$ 的仿射标架及 q 个 n 元一次多项式

$$\begin{cases} p_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_q = a_{q1}x_1 + \cdots + a_{qn}x_n + b_q, \end{cases}$$

其中 $q \times n$ 型矩阵 (a_{ij}) 的秩为 q(即满秩), 使得 Π 的各点关于该标架的坐标的集合恰为此多项式组的公共零点集. 此时也说 Π 关于该标架的方程为

$$p_1 = \cdots = p_q = 0. \tag{1.5}$$

在 $q = 1$ 的时候, 就是前面详细讨论的情形; 在 $q = n - 1$ 的时候, 我们还可以称余维数为 $n - 1$ 的超平面为直线, 余维数为 n 的超平面显然是单点集.

从方程组 (1.5) 还可以看出, 一个余维数为 q 的超平面是 q 个余维数为 1 的超平面的公共交集, 再考虑到满秩条件, 还可以说这些余维数为 1 的超平面是**横截相交**的.

对于余维数为 q 的超平面, 也可以仿照余维数为 1 的情形定义切标架的概念, 这里应该是 $n - q$ 个线性无关的向量, 其构造法只需将 $q = 1$ 情形的线性方程 $p = 0$ 换成现在的线性方程组 $p_1 = \cdots = p_q = 0$, 细节请读者补齐. 有了切标架的概念就可以定义平行的概念了, 关于余维数为 q 的超平面的方程简化问题, 也请读者仿照定理 1.1 进行叙述和证明.

另外, 依线性代数的常识, 线性方程组 (1.5) 的通解可用 $n - q$ 个自由参数表示出来, 这便是余维数为 q 的超平面的参数方程表达法.

最后, 我们指出, 可以把 $\mathbf{R}^n$ 的余维数为 q 的超平面看成 $n - q$ 维的仿射空间, 即 $\mathbf{R}^n$ 的 $n - q$ 维的**仿射子空间**.

§1.4　二次超曲面

读者也许已经猜到, 如果我们把上一节关于超平面的定义 1.1 中的多项式的次数限制放宽, 就可以得到 $\mathbf{R}^n$ 中的“超曲面”的概念. 本节就是沿着这个思路定义二次超曲面的概念, 它们是初等解析几何中的主要研究对象——二次曲线与二次曲面的直接推广.