动力气象习题集

吕美仲 翟子航等编

中国人民解放军空军气象学院

1981年 9月

前　　言

动力气象学是大气科学的一门重
象学中广泛地应用了数学和物理学中
问题愈来愈广泛，研究的问题也愈来
为专业基础理论的那些部分，只是该学科中最基础的东西。开设这部分课程的目的，仅限于从流体力学的基本概念和原理出发，阐明自转地球上大气运动最基本的性质。我们认为，要讲授好这样的内容，必须着重于物理原理的阐述，重视讲明处理问题的常用的数学方法，并力图把两者有机地结合起来。为了帮助学员巩固所学的动力气象基础知识，培养他们应用基本概念和原理分析解决实际问题的能力，选择一些习题供学员练习是十分必要的。为此我们编写了这本习题集。

本习题集基本上是根据本院工程班教学大纲要求编写的。汇集的习题中有一小部分难度较大，解答这部分习题可能需要更多的知识，但都给出了必要的提示。这部分习题并不要求每一个学员都做，但对于有能力做完这部分习题的学员，将会从中获得不少有用的知识。

考虑到目前的教本和动力气象学参考书中尚未采用国际单位制，在编写本习题集时，也没有完全采用国际单位制，但附录中列举的常用的物理常数都是以国际单位制给出的，目的是供大家参考并以此作为过渡，拟在今后修编本习题集时再行改变过来。

参加汇集本习题集工作的有吕美仲、翟子航、王蒸民、朱延年、张维桓等同志，最后由吕美仲、翟子航同志整理定稿。

编　　者

一九八一年九月

目 录

习　题

一、大气运动方程、尺度分析

1．说明温度平流变化的物理含义，证明

$$-\boldsymbol{V}\cdot\nabla T=-V\frac{\partial T}{\partial s}$$

$$-\boldsymbol{V}\cdot\nabla T=-V_n\frac{\partial T}{\partial n}$$

其中 $\boldsymbol{s}$ 是水平速度方向，$\boldsymbol{n}$ 是水平温度梯度的方向。

2．图中实线为平面中流线，虚线为等温线，试讨论图中 A，B，C，D，E 各点温度平流的符号（C，A 分别是冷、暖中心）。

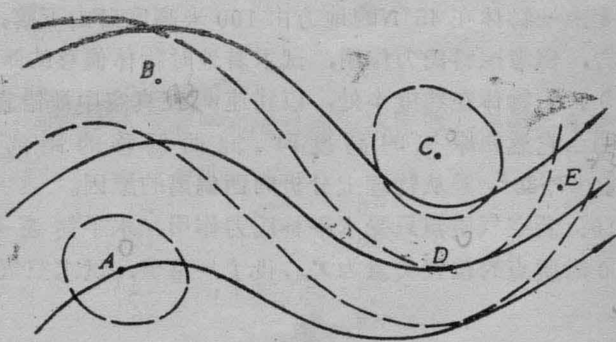

图1

3．有一探空气球以200米/分的速度铅直飞向高空。从探空气球上的温度计测得气球上温度随时间的变率为－1.31°C/

分，大气的温度铅直递减率为 $-\frac{\partial T}{\partial z}=0.65°C/100$ 米，试求气球所经过的各高度上温度的局地变化。设大气温度在水平面上分布均匀，空气的铅直速度为10厘米/秒，问空气块温度的个别变化为多少？空气是作干绝热运动呢还是作非绝热运动？为什么？

4．流场为定常的、均匀的沿纬圈运动的带状环流，试求空气微团的绝对速度和绝对加速度。

5．说明气压、气压梯度和气压梯度力的物理含义。

6．试指出空气微团在以下几种运动中所受的科氏力：

（1）在赤道沿赤道向东运动；

（2）在赤道向北运动；

（3）在赤道作铅直上升运动。

7．一人造地球卫星经过赤道时飞行方向与赤道成 60° 交角，设其相对速度为 8 公里/秒，试求它的科氏加速度。

8．一物体在 45°N的地方由 100 米高度自由下落，不计空气阻力，但考虑科氏力作用，试求着地时物体偏移的距离。

9．一物体在纬度 φ 处，以初速 w_0 在真空中被铅直上抛，试证明当它返回原来的高度时，向西偏移的距离约为 $4\Omega w_0^3\cos\varphi/3g^2$，并从物理上分析向西偏离的原因。

10．若空气质点只受水平科氏力作用，水平初速是 $\boldsymbol{V}_0$，$t=0$ 时质点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_0$，设 $f=$ 常值，试求空气质点的轨迹。

11．设地球为正球体，试计算海平面上地心引力与重力之间的夹角，又夹角的最大值为多少。

12．重力位势与重力位能这两个概念有何区别。

13. 证明引力位势ϕ_a，离心力位势ϕ_e及重力位势ϕ分别满足：

（1）$\nabla^2\phi_a=0$；

（2）$\nabla^2\phi_e=-2\Omega^2$；

（3）$\nabla^2\phi=-2\Omega^2$。

这里的∇^2为三维拉普拉斯算子。

14. 计算赤道上空重力等于零的高度。一地球卫星进入该高度其绕地球旋转的周期是多少。

15. 证明相对加速度可写作

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\frac{\boldsymbol{V}^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V}$$

16. 对于匀质流体，试证明有以下能量方程

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\left(\frac{p}{\rho}+gz+E\right)=0$$

其中$E=\dfrac{V^2}{2}$。

17. 假定运动是水平的，对于匀质流体，证明水平运动方程可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(f+\zeta)v=-\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(f+\zeta)u=-\frac{\partial P}{\partial y}$$

其中

$$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$P=\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}$$

18. 不考虑地球曲率影响，在柱坐标（r、θ、z）中将$d\boldsymbol{V}/dt$进行展开。

19. 试在柱坐标系中，将$2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{V}$进行展开。

20. 试给出柱坐标系中相对运动方程。

21. 证明球坐标系中运动方程中曲率项力与相对速度是相垂直的。

22. 写出单位质量空气块对地轴的绝对角动量表达式。由此式出发，根据角动量定律，推出球坐标系中沿纬圈方向上的标量形式相对运动方程。

23. 试证明绝热方程可写成如下形式

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d_h \ln p}{dt}-\frac{d_h \ln \rho}{dt}=-\sigma w$$

其中$\sigma=\frac{1}{T}(\gamma_d-\gamma)=\frac{g}{RT}\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\gamma_d}\right)$，而

$$\kappa=c_p/c_v=1.4$$

24. 令L为水平尺度，H为垂直尺度，U为水平速度尺度，W为垂直速度尺度。一般认为：(a)经过H距离，气压、密度的垂直改变量与本身的量级相同；(b)水平气压梯度力与科氏力量级相同；(c)垂直气压梯度力与重力的量级相同。由此条件证明

（1） $RT\sim gH$

（2） $$\frac{\partial \ln p}{\partial x}\sim\frac{\partial \ln p}{\partial y}\sim\frac{fU}{gH}$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial x}\sim\frac{\partial \ln \rho}{\partial y}\sim\frac{fU}{gH}$$

$$\frac{\partial ln\theta}{\partial x}\sim\frac{\partial ln\theta}{\partial y}\sim\frac{fU}{gH}$$

25．对第23题中给出的绝热方程进行尺度分析，证明

（1）$\sigma W\sim\frac{fU^2}{gH}$；

（2）当$\frac{\gamma}{\gamma_a}<1$时，又有

$$\frac{W}{H}\gtrsim\frac{fU^2}{gH}$$

26．对连续方程进行尺度分析，证明

$$D=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\sim\frac{W}{H}$$

2 √27．如果认为在大气边界层中湍流摩擦力与水平科氏力具有同样大小的量级，试由此估计大气边界层的厚度。这里设水平方向上湍流摩擦力可表示为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{zx}}{\partial z}=k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{zy}}{\partial z}=k\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

k称湍流系数，$k\sim10$米^2/秒。

2 — √28．设$f=10^{-4}$/秒、$U=10$米/秒，如果水平运动方程中局地加速度的量级与科氏力相同，问时间尺度应是多大。

29．在地面附近测得气压为p，温度为T，又已知气压的测量误差为δp、温度的测量误差为δT，试问由p、T计算出来

的位温相对误差为多少。

30. 设$f=10^{-4}$/秒、$U=10$米/秒，试分别计算$L=10^7$，10^6，10^5，10^4米时的$Rossby$数的大小。

31. 准静力平衡条件下，仍存在垂直速度，若将准静力平衡条件下垂直速度记作W_R，假设运动是绝热的，试证明

$$\frac{\partial W_R}{\partial z}=\frac{c_v}{c_p}\frac{1}{p}\left[-\boldsymbol{V}_h\cdot\nabla p-\frac{c_p}{c_v}p\nabla\cdot\boldsymbol{V}_h+g\int_z^{\infty}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}_h)dz\right]$$

这一方程是W_R的诊断方程，是Richardson首先导出来的。

32. 试估计大尺度运动中等压面坡度和等温面坡度的量级。

二、"p"坐标系、"θ"坐标系

1. 试讨论建立"p"坐标系的物理基础和"p"坐标系的优缺点。

2. 证明"p"坐标系中热力学方程可写作

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\frac{\partial\phi}{\partial p}+\sigma_s T+\frac{1}{c_p\rho T}\frac{\delta q}{\delta t}=0$$

其中$\frac{\delta q}{\delta t}$为单位质量空气的加热率，

$$\sigma_s=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \ln\theta}{\partial p}$$

为"p"坐标系中静力稳定度参数。

3. 证明"p"坐标系中水平运动方程可改写为以下的

"通量"形式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}u^2+\frac{\partial}{\partial y}uv\right)_p+\frac{\partial}{\partial p}u\omega-fv=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}uv+\frac{\partial}{\partial y}v^2\right)_p+\frac{\partial}{\partial p}v\omega+fu=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_p$$

4．证明"p"坐标系水平运动方程可改写为以下形式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_p-(\zeta_p+f)v+D_p u+\frac{\partial u\omega}{\partial p}=-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p+(\zeta_p+f)u+D_p v+\frac{\partial v\omega}{\partial p}=-\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_p$$

其中 $\zeta_p=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p$

$$D_p=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p$$

$$P=\phi+\frac{1}{2}(u^2+v^2)$$

5．取x轴为低压（或高压）中心轴线水平投影方向，以α表示低压（或高压）中心轴线和铅直方向之间的交角（如图2所示），证明

$$\mathrm{tg}\alpha=-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_p\Big/\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_p$$

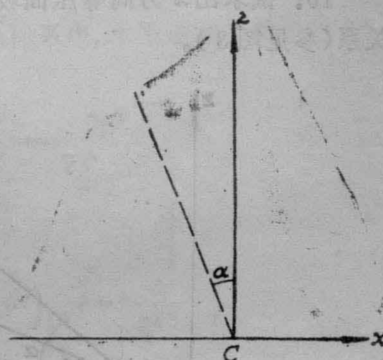

图2

并讨论其物理意义。

6．证明对于热力对称系统（气压系统中心与冷暖中心重合）等压面坡度随高度变化满足

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_p$$

7．若 $p\to 0$ 时 $\omega\to 0$，试证明

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\rho\boldsymbol{V}\cdot\nabla_p\phi+\rho g w_p-\int_0^p\nabla_p\cdot\boldsymbol{V}dp$$

其中W_p表示与p相对应的 z 高度上垂直速度。

8．试从质量守恒定律，不用转换关系，直接导出“θ”坐标系中的连续方程（设运动是干绝热的）。

9．若运动是非绝热的，证明“θ”坐标系中的垂直速度$\dot{\theta}$与w有以下近似关系式：

$$w\cong\frac{T}{\theta}\frac{1}{\gamma_d-\gamma}\dot{\theta}$$

10．试求出x方向等压面坡度与等熵（θ）面坡度之间的关系(参见图３)。

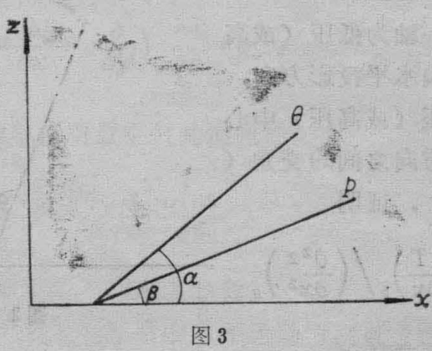

图3

11. 试证明等压面上水平散度与等熵面上水平散度有以下关系

$$\nabla_p \cdot \boldsymbol{V} - \nabla_\theta \cdot \boldsymbol{V} = \frac{1}{\gamma_d - \gamma} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z} \cdot \nabla_p T$$

12. 1949年伊里亚逊(*Eliassen, A.*)，建议用压力的对数代替独立自变数 z，建立所谓对数压力坐标系。对数压力坐标系中垂直坐标为

$$z^* = -H \ln \frac{p}{p_0}$$

其中$H = RT_0/g$是均质大气高度，取常值；p_0 通常取1000毫巴。

定义

$$w^* = \frac{dz^*}{dt} = -\frac{H\omega}{p}$$

试证明在(x, y, z^*, t)坐标系中，水平运动方程和"p"坐标系中的形式一样，即

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} + f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V} = -\nabla\phi$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla\right)_{z^*} + w^* \frac{\partial}{\partial z^*}$$

13. 证明在对数压力坐标系中静力方程和连续方程分别为

$$\frac{\partial\phi}{\partial z^*}=\frac{\mathrm{R}\ T}{H}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w^*}{\partial z^*}-\frac{w^*}{H}=0$$

14．证明在对数压力坐标系中垂直速度与“ z ”坐标系中垂直速度近似相等，即

$$w^*\sim w$$

15．证明对数压力坐标系中热力学方程形式为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)T+w^*\sigma^*=\frac{1}{c_p}\frac{\delta q}{\delta t}$$

其中

$$\sigma^*=\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z^*}=\frac{\partial T}{\partial z^*}+\frac{\mathrm{R}\ T}{c_pH}$$

$\dfrac{\delta q}{\delta t}$为单位质量空气的加热率。

三、自由大气中的平衡运动

1．北纬45°处，700毫巴等压面图上3000位势米和2960位势米两根等高线间的最短距离为190公里，问地转风有多大。

2．在1∶2×10⁷高空等压面图上，间隔40位势米的相邻两条等高线的距离为$\Delta n'$（以厘米为单位），试证明此时地转风大小可用以下公式计算

$$V_g = \frac{13.44}{\sin\varphi \Delta n'} \text{（米/秒）}$$

3．设$V_g = 20$米/秒，试求$30°N$处等压面的坡度。

4．沿经圈由$57.5°N$到$52.5°N$气压升高了1%，若温度为$7°C$，求地转风大小。

5．当罗斯贝数$Ro = 0.1$时，取地转近似的相对差误是多

6．若$v_g = 10$米/秒，试求$45°N$处地转风散度。

7．试从物理上说明地转风随高度变化的原因。

8．试证明正压大气中有

$$\frac{\partial T}{\partial x} : \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x} : \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} : \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y} : \frac{\partial p}{\partial z}$$

9．试证明正压大气中地转风和梯度风不随高度变化。

10．力管向量$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p$可用以表征大气的斜压性，试证明在地转风条件下有

$$N_x = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{i} = -f\frac{\partial u_g}{\partial z}$$

$$N_y = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{j} = -f\frac{\partial v_g}{\partial z}$$

$$N_z = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{k} = \frac{f}{T}\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla T$$

11．500—1000毫巴等压面的厚度记作h，设运动是准地

转的，则有

$$-\boldsymbol{V}_{g5}\cdot\nabla h=-\boldsymbol{V}_{g7}\cdot\nabla h$$

12．45°N处，700毫巴、500毫巴等压面都是向东倾斜的（如图所示），A，B两点间隔200公里，两等压面之间的厚度在A处为2840位势米，B处为2800位势米。试决定E点700毫巴和500毫巴等压面上地转风方向和700—500毫巴等压面间的热成风方向与大小。

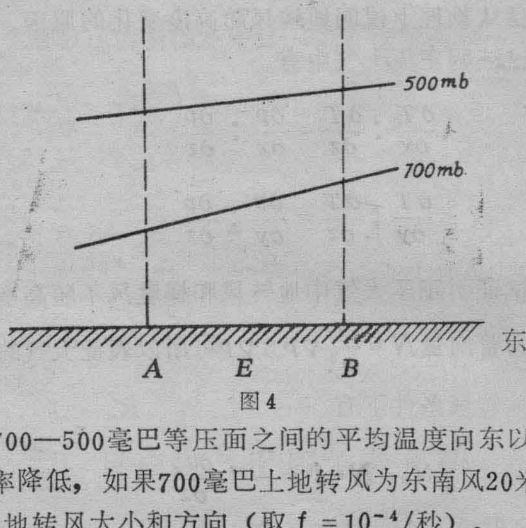

图4

13．700—500毫巴等压面之间的平均温度向东以3°c/100公里的变率降低，如果700毫巴上地转风为东南风20米/秒，求500毫巴上地转风大小和方向（取$f=10^{-4}$/秒）。

14．求上题中700—500毫巴气层中平均温度平流。

15．某天南京上空高空风观测记录如下

850毫巴	西南风	8米/秒
700毫巴	西　风	12米/秒
500毫巴	西南西风	12米/秒

400毫巴　　西南风　　16米/秒

试分析各层的冷暖平流以及大气层结稳定度随时间变化的趋势。

16．设α是等高线与等温线之间的交角，证明

$$\frac{\partial V_g}{\partial p}=\frac{1}{f}\frac{R}{p}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_p\cos\alpha$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p}=-\frac{1}{f}\frac{R}{p}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_p\sin\alpha$$

17．试证明等压面上地转温度平流可以表示为

$$A_T=-\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla_p T=\frac{fp}{R}\left(\boldsymbol{V}_g\times\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial p}\right)\cdot\boldsymbol{k}$$

18．试证明

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_g}{\partial p}=\frac{R}{fp}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p}}\nabla_p\theta\times\boldsymbol{k}$$

19．假设起始高度水平温度梯度与水平气压梯度的方向相反，大小分别为$|\nabla T|_0$，$|\nabla p|_0$，且平均温度和平均温度梯度的大小、方向不随高度改变，证明地转风方向开始转向的高度为

$$z=z_0+\frac{RT_0}{gp_0}(|\nabla p|_0/|\nabla T|_0)$$

T_0，p_0分别为起始高度z_0上的温度和气压。

20．设

$$u=U$$

$$v = v_0 \sin \frac{2\pi}{L}(x - ct)$$

其中U，v_0，L，c均为常值，试求$t=0$时通过坐标原点的流线和$t=0$时位于坐标原点空气质点的轨迹，比较两者之间的关系。

21．假定风场是定常的，45°N某处地转风的大小是梯度风的90%，设梯度风为20米/秒，试求等压线的曲率半径。

22．假定风场是定常的，离反气旋中心500公里处（纬度为45°N），可能出现的最大梯度风风速是多少，与此相应的地转风速是多少（反气旋是园对称的）。

23．一园形低压系统，保持形状不变以15米/秒的速度向东移动，地转风速也为15米/秒，试求离低压中心500公里正东，正南，正西，正北四点上空气质点的轨迹曲率半径，并求出该四点的梯度风风速。

24．试讨论地转风、热成风、梯度风的实际意义。

25．有一定常的水平涡旋（气旋），当$r<R$时，空气以常值角速度ω旋转，当$r \geqslant R$时，空气的速度V与r成反比，设运动满足梯度风方程，风场又是连续的，试求通过涡旋中心高度为z_0的等压面方程。

26．一龙卷以常值角速度ω旋转，设离中心距离r_0处地面气压为p_0，温度为T（均为常值），证明龙卷中心的地面气压为

$$p = p_0 exp - \frac{\omega^2 r_0^2}{2RT}$$

如果$T=288K$，离中心100米处气压为1000毫巴，风速为100