普通高等教育"十二五"规划教材

# 数学建模

SHU XUE JIAN MO

主编　母丽华　周永芳

$$f(\alpha_0)=S_1(\alpha_0)-S_2(\alpha_0)>0$$

$$f(\alpha_0+\pi)=S_1(\alpha_0+\pi)-S_2(\alpha_0+\pi)$$

$$=S_2(\alpha_0)-S_1(\alpha_0)<0$$

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

# 数 学 建 模

主　编　母丽华　周永芳
副主编　于存光　宋作忠　多　佳　赵国亮

科 学 出 版 社
北 京

## 内 容 简 介

本书结合黑龙江科技学院人才培养和专业课程建设的总体要求，既注重学生基本能力的训练，同时又结合学生的专业实际，介绍体现专业特点的数学模型及供不同专业进行选择，及注重培养学生的科技写作和讲演能力。全书共分九章，包括数学模型概论、初等模型、微分方程模型、概率统计模型、数学规划模型、数值分析模型、综合模型、选做模型、科技论文与学术讲演。在编写过程中，做到以知识为基础、以专业为核心、以能力为主线、以案例为载体。

本书可作为普通高等学校工科数学建模课程的教材和参考书，对于从事数学建模竞赛教学、培训和研究工作的教师有一定的参考价值，也可供有关的科技工作者参考。

**图书在版编目（CIP）数据**

数学建模 / 母丽华，周永芳主编. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-030106-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①母… ②周… Ⅲ. 数学模型—高等学校—教材
Ⅳ. O141. 4

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第013382号

责任编辑：相 [illegible] / 责任校对：朱光兰
责任印制：张[illegible] / 封面设计：陈四雄

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码100717
http://www.sciencep.com

明辉印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年2月第 一 版 开本：(787×1092) 1/16
2011年2月第一次印刷 印张：14 3/4
印数：1—5 000 字数：337 000

**定价：36.00元**

（如有印装质量问题，我社负责调换）

# 前　　言

数学建模是在二十世纪六七十年代进入西方国家一些大学的，我国的几所大学也在八十年代初将数学建模引入课堂。经过 20 多年的发展，现在绝大多数本科院校和许多专科学校都开设了各种形式的数学建模课程和讲座，出版了数十本教材。1992 年，我国开始举办全国大学生数学建模竞赛，更是极大的推动了数学建模教学及其课外活动在各院校的开展，为培养学生利用数学方法分析、解决实际问题，培养大学生创新的能力开辟了一条有效的途径。

黑龙江科技学院是 1996 年开始开设数学建模课程，同年开始参加全国大学生数学建模竞赛。经过 13 年的建设，我校的数学建模课程已经被评为校级精品课，所在团队也被评为校优秀教学团队，经过整个活动的训练，我们锻炼了一支优秀的教师队伍，编写了《数学建模》、《数学建模与数学实验》等教材，学生的能力也在参赛的过程中得到了提高，数学建模获奖证书也成为一些学生求职的重要砝码。

为了更好的开展数学建模竞赛活动，课题组的成员多次参加全国大学数学报告论坛，深入学生当中广泛征求意见，发现课程中有许多内容与中学有重复，教学体系亟待调整；教学内容陈旧，理论体系与教学模式单一；课程体系结构不尽合理，内容偏多偏深，不适应当前学时整体减少及高校扩招后学生的现状；教学内容脱离实际，忽视对学生应用意识和应用能力的培养。

针对上述教学中存在的问题，结合我校人才培养和专业课程建设的总体要求，我们课题组成员进行了多次研讨，明确课程建设要按照以知识为基础、专业为核心、能力为主线、案例为载体的总体要求，在课程顶层设计时注重体现四个结合：一是结合学生学习实际，针对二本、三本、精英学生设置不同方案和培养目标，二本做到基础理论扎实，实践能力强，三本理论够用，专业技能强；二是结合学生专业，介绍工程实际和工程背景，为学生后继课程的学习提供动力和基础；三是结合学生能力培养主线，培养学生发现、解决、创新、协作能力；四是结合教师教育技术。为此，在教材编写过程中，我们既注重学生基本能力的训练，同时又结合学生的专业实际，介绍体现专业特点的数学模型、体现素质能力的综合模型，教材结构安排如下：第 1 章数学模型概论（1 学时）；第 2 章初等模型（4 学时）；第 3 章微分方程模型（4 学时）；第 4 章概率统计模型（4 学时）；第 5 章数学规划模型（4 学时）；第 6 章数值分析模型（4 学时）；第 7 章综合模型（4 学时）；第 8 章选做模型（4 学时）；第 9 章科技论文与学术讲演(1 学时)，总计 30 学时。

本书在编写过程中，得到了黑龙江科技学院教务处的大力支持，理学院各位数学老师，特别是多年从事数学建模教学与竞赛辅导的老教师的鼎力帮助，同时，哈尔滨工程大学沈继红教授，哈尔滨理工大学陈东彦教授也为本书的编写提出了许多建设性的意见和建议，使我们这次教材编写更有针对性，既满足了我校大学生数学建模课程的教学基本要求，又为参加后续竞赛的学生提供了学习参考，是一本能满足不同专业学生需求的特色鲜明的教科书，在此，我代表参与编写教材的各位老师对大家一并表示感谢。

在使用的过程中，恳请大家多提宝贵意见。

编　者

2010 年 12 月

# 目　录

# 第 1 章　数学模型概论

本章主要介绍了数学建模的发展历史，数学建模活动开展的意义，国内、国际竞赛的规程，数学建模的主要步骤。

## 1.1　数学建模的起源

数学建模是在 20 世纪 60、70 年代进入一些西方国家大学的，我国的几所大学也在 80 年代初将数学建模引入课堂。经过 20 多年的发展，现在绝大多数本科院校和许多专科学校都开设了各种形式的数学建模课程和讲座，为培养学生利用数学方法分析、解决实际问题的能力开辟了一条有效的途径。

大学生数学建模竞赛最早是 1985 年在美国出现的，1989 年在几位从事数学建模教育的教师的组织和推动下，我国几所大学的学生开始参加美国的竞赛，而且积极性越来越高，近几年参赛校数、队数占到相当大的比例。可以说，数学建模竞赛是在美国诞生，在中国开花、结果的。

1992 年由中国工业与应用数学学会组织举办了我国 10 城市的大学生数学建模联赛，74 所院校的 314 队参加。教育部领导及时发现，并扶植、培育了这一新生事物，决定从 1994 年起由教育部高教司和中国工业与应用数学学会共同主办全国大学生数学建模竞赛，每年一届。十几年来这项竞赛的规模以平均年增长 25% 以上的速度发展。

2009 年全国有 33 个省（自治区、直辖市，包括香港和澳门特区）1137 所院校、15 046个队（其中，甲组 12 276 队、乙组 2770 队）、4 万 5 千多名来自各个专业的大学生参加竞赛，是历年来参赛人数最多的（其中，西藏和澳门是首次参赛）！

## 1.2　数学建模的意义

数学建模是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的数学手段。

数学建模就是用数学语言描述实际现象的过程。这里的实际现象既包涵具体的自然现象，比如自由落体现象，也包涵抽象的现象，比如顾客对某种商品所取的价值倾向。这里的描述不但包括外在形态、内在机制的描述，也包括预测、试验和解释实际现象等内容。

我们也可以这样直观地理解这个概念：数学建模是一个让纯粹数学家（指只懂数学而不懂数学在实际中的应用的数学家）变成物理学家、生物学家、经济学家甚至心理学家等的过程。

数学模型一般是实际事物的一种数学简化。它常常是以某种意义上接近实际事物的抽象形式存在的，但它和真实的事物有着本质的区别。要描述一个实际现象可以有很多

种方式，比如录音、录像、比喻、传言等。为了使描述更具科学性、逻辑性、客观性和可重复性，人们采用一种普遍认为比较严格的语言来描述各种现象，这种语言就是数学。使用数学语言描述的事物就称为数学模型。有时候我们需要做一些实验，但这些实验往往用抽象出来了的数学模型作为实际物体的代替而进行相应的实验，实验本身也是实际操作的一种理论替代。

应用数学去解决各类实际问题时，建立数学模型是十分关键的一步，同时也是十分困难的一步。建立教学模型的过程，是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程。要通过调查、收集数据资料，观察和研究实际对象的固有特征和内在规律，抓住问题的主要矛盾，建立起反映实际问题的数量关系，然后利用数学的理论和方法去分析和解决问题。这就需要深厚扎实的数学基础，敏锐的洞察力和想象力，对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面。数学建模是联系数学与实际问题的桥梁，是数学在各个领域广泛应用的媒介，是数学科学技术转化的主要途径。数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到数学界和工程界的普遍重视，它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一。为了适应科学技术发展的需要和培养高质量、高层次科技人才，数学建模已经在大学教育中逐步开展，国内外越来越多的大学正在进行数学建模课程的教学和参加开放性的数学建模竞赛，将数学建模教学和竞赛作为高等院校的教学改革和培养高层次的科技人才的个重要方面。现在许多院校正在将数学建模与教学改革相结合，努力探索更有效的数学建模教学法和培养 21 世纪人才的新思路。与我国高校的其他数学类课程相比，数学建模具有难度大、涉及面广、形式灵活、对教师和学生要求高等特点。数学建模的教学本身是一个不断探索、不断创新、不断完善和提高的过程。为了改变过去以教师为中心、以课堂讲授与知识传授为主的传统教学模式，数学建模课程的指导思想是：以实验室为基础、以学生为中心、以问题为主线、以培养能力为目标来组织教学工作。通过教学使学生了解利用数学理论和方法去分析和解决问题的全过程，提高他们分析问题和解决问题的能力；提高他们学习数学的兴趣和应用数学的意识与能力，使他们在以后的工作中能经常性地想到用数学去解决问题；提高他们尽量利用计算机软件及当代高新科技成果的意识，能将数学、计算机有机地结合起来去解决实际问题。数学建模以学生为主，教师利用一些事先设计好问题启发，引导学生主动查阅文献资料和学习新知识，鼓励学生积极开展讨论和辩论，培养学生主动探索，努力进取的学风，培养学生从事科研工作的初步能力，培养学生团结协作的精神、形成一个生动活泼的环境和气氛。教学过程的重点是创造一个环境去诱导学生的学习欲望，培养他们的自学能力，增强他们的数学素质和创新能力，提高他们的数学素质，强调的是获取新知识的能力，是解决问题的过程，而不是知识与结果。接受参加数学建模竞赛赛前培训的同学大都需要学习诸如数理统计、最优化、图论、微分方程、计算方法、神经网络、层次分析法、模糊数学、数学软件包的使用等“短课程”（或讲座），用的学时不多，多数是启发性的讲一些基本的概念和方法，主要是靠同学们自己去学，充分调动同学们的积极性，充分发挥同学们的潜能。培训广泛地采用的讨论班方式，同学自己报告、讨论、辩论，教师主要起质疑、答疑、辅导的作用。竞赛要求一定要使用计算机及相应的软件，如 Mathematica、Matlab、Lingo、Spas、Maple 甚至排版软件等。

## 1.3　数学建模的过程

模型准备：了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息。用数学语言来描述问题。

模型假设：根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并用精确的语言提出一些恰当的假设。

模型建立：在假设的基础上，利用适当的数学工具（尽量用简单的数学工具）来刻划各变量之间的数学关系，建立相应的数学结构。

模型求解：利用获取的数据资料，对模型的所有参数做出计算（估计）。

模型分析：对所得的结果进行数学上的分析。

模型检验：将模型分析结果与实际情形进行比较，以此来验证模型的准确性、合理性和适用性。如果模型与实际较吻合，则要对计算结果给出其实际含义，并进行解释。如果模型与实际吻合较差，则应该修改假设，再次重复建模过程。

模型应用：应用方式因问题的性质和建模的目的而异。

## 1.4　大学生数学建模竞赛

### 1.4.1　全国大学生数学建模竞赛章程

1. 总则

全国大学生数学建模竞赛（以下简称竞赛）是教育部高等教育司和中国工业与应用数学学会共同主办的面向全国大学生的群众性科技活动，目的在于激励学生学习数学的积极性，提高学生建立数学模型和运用计算机技术解决实际问题的综合能力，鼓励广大学生踊跃参加课外科技活动，开拓知识面，培养创造精神及合作意识，推动大学数学教学体系、教学内容和方法的改革。

2. 竞赛内容

竞赛题目一般来源于工程技术和管理科学等方面经过适当简化加工的实际问题，不要求参赛者预先掌握深入的专门知识，只需要学过高等学校的数学课程。题目有较大的灵活性供参赛者发挥其创造能力。参赛者应根据题目要求，完成一篇包括模型的假设、建立和求解、计算方法的设计和计算机实现、结果的分析和检验、模型的改进等方面的论文（即答卷）。竞赛评奖以假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰程度为主要标准。

3. 竞赛形式、规则和纪律

(1) 全国统一竞赛题目，采取通信竞赛方式，以相对集中的形式进行。

(2) 竞赛每年举办一次，一般在某个周末前后的三天内举行。

(3) 大学生以队为单位参赛，每队 3 人（须属于同一所学校），专业不限。竞赛分本科、专科两组进行，本科生参加本科组竞赛，专科生参加专科组竞赛（也可参加本科组竞赛），研究生不得参加。每队可设一名指导教师（或教师组），从事赛前辅导和参赛

的组织工作，但在竞赛期间必须回避参赛队员，不得进行指导或参与讨论，否则按违反纪律处理。

（4）竞赛期间参赛队员可以使用各种图书资料、计算机和软件，在国际互联网上浏览，但不得与队外任何人（包括在网上）讨论。

（5）竞赛开始后，赛题将公布在指定的网址供参赛队下载，参赛队在规定时间内完成答卷，并准时交卷。

（6）参赛院校应责成有关职能部门负责竞赛的组织和纪律监督工作，保证本校竞赛的规范性和公正性。

4. 组织形式

（1）竞赛由全国大学生数学建模竞赛组织委员会（以下简称全国组委会）主持，负责每年发动报名、拟定赛题、组织全国优秀答卷的复审和评奖、印制获奖证书、举办全国颁奖仪式等。

（2）竞赛分赛区组织进行。原则上一个省（自治区、直辖市）为一个赛区，每个赛区应至少有 6 所院校的 20 个队参加。邻近的省可以合并成立一个赛区。每个赛区建立组织委员会（以下简称赛区组委会），负责本赛区的宣传发动及报名、监督竞赛纪律和组织评阅答卷等工作。未成立赛区的各省院校的参赛队可直接向全国组委会报名参赛。

（3）设立组织工作优秀奖，表彰在竞赛组织工作中成绩优异或进步突出的赛区组委会，以参赛校数和队数、征题的数量和质量、无违纪现象、评阅工作的质量、结合本赛区具体情况创造性地开展工作以及与全国组委会的配合等为主要标准。

5. 评奖办法

（1）各赛区组委会聘请专家组成评阅委员会，评选本赛区的一等、二等奖（也可增设三等奖），获奖比例一般不超过三分之一，其余凡完成合格答卷者可获得成功参赛证书。

（2）各赛区组委会按全国组委会规定的数量将本赛区的优秀答卷送全国组委会。全国组委会聘请专家组成全国评阅委员会，按统一标准从各赛区送交的优秀答卷中评选出全国一等、二等奖。

（3）全国与各赛区的一、二等奖均颁发获奖证书。

（4）对违反竞赛规则的参赛队，一经发现，取消参赛资格，成绩无效。对所在院校要予以警告、通报，甚至取消该校下一年度参赛资格。对违反评奖工作规定的赛区，全国组委会不承认其评奖结果。

6. 异议期制度

（1）全国（或各赛区）获奖名单公布之日起的两个星期内，任何个人和单位可以提出异议，由全国组委会（或各赛区组委会）负责受理。

（2）受理异议的重点是违反竞赛章程的行为，包括竞赛期间教师参与、队员与他人讨论，不公正的评阅等。对于要求将答卷复评以提高获奖等级的申诉，原则上不予受理，特殊情况可先经各赛区组委会审核后，由各赛区组委会报全国组委会核查。

（3）异议须以书面形式提出。个人提出的异议，须写明本人的真实姓名、工作单位、通信地址（包括联系电话或电子邮件地址等），并有本人的亲笔签名；单位提出的异议，须写明联系人的姓名、通信地址（包括联系电话或电子邮件地址等），并加盖公

章。全国组委会及各赛区组委会对提出异议的个人或单位给予保密。

（4）与受理异议有关的学校管理部门，有责任协助全国组委会及各赛区组委会对异议进行调查，并提出处理意见。全国组委会或各赛区组委会应在异议期结束后两个月内向申诉人答复处理结果。

7. 经费

（1）参赛队所在学校向所在赛区组委会交纳参赛费。

（2）赛区组委会向全国组委会交纳一定数额的经费。

（3）各级教育管理部门的资助。

（4）社会各界的资助。

8. 解释与修改

本章程从 2008 年开始执行，其解释和修改权属于全国组委会。

### 1.4.2　国际大学生数学建模竞赛（又称美国大学生数学建模竞赛）

美国大学生数学建模竞赛与美国大学生交叉学科数学建模竞赛是美国国家科学基金、美国数学及其应用联合会、美国运筹学及管理科学研究所等单位资助，由美国数学及其应用联合会组织。从 1985 年开始举办，是当前世界上唯一的国际性学生数学建模竞赛。2009 年共有来自美国、澳大利亚、加拿大、中国、芬兰、印度尼西亚、爱尔兰、英格兰、新加坡、南非、德国、墨西哥、匈牙利、阿拉伯联合酋长国 14 个国家或地区的高校、研究单位的 2049 支队伍成功参赛（有 1 万多队参赛）。哈佛大学、杜克大学、麻省理工学院、耶鲁大学等世界老牌名校及国内清华大学、北京大学等众多名校都曾派队参赛。

## 本章小结

本章主要介绍了数学建模的发展历史，数学建模活动开展的意义，国内、国际竞赛的规程，数学建模的主要步骤。旨在使学生在学习之初了解该门课程的整个发展过程，具体参赛要求，为今后的学习提供动力和帮助。

# 第2章　初等模型

本章介绍的模型比较简单，我们只要具备高等数学和线性代数的基本知识即可。我们需要改变传统的看法，认为简单的理论只能解决简单的问题。事实上，客观实际问题解决的好与坏并不以所应用的知识的深浅为尺度，即使运用非常简单的数学理论与推理也可以解决大问题。需要强调的是，善于建立数学与实际问题的联系是至关重要的，从某种意义上讲，培养良好的数学思维能力往往比学习更多更深的知识更为重要，更为有用。

## 2.1　生活中的问题

生活中的很多问题用数学来研究，建立它们的数学模型，会使问题变得更易分析、解决。下面我们举几个问题进行分析讲解。

**例 2.1.1**　方桌问题。

在一块不平的地面上，能否找到一个适当的位置而将一张方桌的四脚同时着地？

下面将利用一个简单的数学模型给出一个肯定的回答。

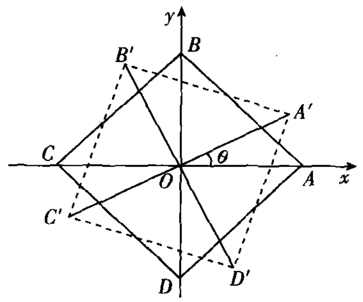


图 2.1.1　方桌转动示意图

首先，假设：

(1) 方桌的四个脚构成平面上的严格的正方形；

(2) 地面高度不会出现间断，亦即不会出现台阶式地面，即地面可视为数学上的连续曲面。

如图 2.1.1 所示，以正方形的中心为坐标原点，当方桌绕中心转动时，正方形对角线向量 $AC$ 与 $x$ 轴所成之角为 $\theta$。设 $A$、$C$ 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，$B$、$D$ 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$。不失一般性，设 $g(0)=0$。另外，方桌在任何时刻总有三只脚可以着地，即对任何 $\theta$，$f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 中总有一个为零。由假设条件 (2)，$f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 皆是 $\theta$ 的连续函数。这样，我们把方桌问题归结为数学问题：对连续函数 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$，$g(0)=0$，$f(0)\geqslant 0$，且对任意 $\theta$，皆有 $f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，证明：存在 $\theta_0$ 使得 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

**证明**

(1) 若 $f(0)=0$，则取 $\theta_0=0$ 即可证明结论。

(2) 若 $f(0)>0$，则将方桌旋转 $\frac{\pi}{2}$，这时，方桌的对角线互换，故 $f(\frac{\pi}{2})=0$，$g(\frac{\pi}{2})>0$，构造函数 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则易有 $h(0)>0$，$h(\frac{\pi}{2})<0$，显然，$h(\theta)$ 是连续函数。由连续函数的介值定理，存在 $\theta_0\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，使得 $h(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$，又由于 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，故有 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$，原问题得到解决。

这里只须引进一个变量 $\theta$ 及其一元函数 $f(\theta)$、$g(\theta)$，就可以把模型条件和结论用既简单又精确的数学语言表述出来，从而形成需要的模型。

这个模型的巧妙之处在于用一元变量 $\theta$ 表示桌子的位置，用 $\theta$ 的两个函数表示桌子四脚与地面的距离。另外我们指出，该模型中桌子四脚连线呈正方形的假设并不是必需的，如果将方桌改成长方形桌子，是否还有相同的结论？

**例 2.1.2**　分蛋糕问题。

妹妹过生日，妈妈做了一块边界形状任意的蛋糕。哥哥也想吃，妹妹指着蛋糕上的一点对哥哥说，你能过这一点切一刀，使得切下的两块蛋糕面积相等，就把其中的一块送给你。哥哥利用刚刚学过的高等数学知识解决了这个问题，你知道他用的是什么办法吗？

问题归结为如下一道几何证明题。

已知平面上一条没有交叉点的封闭曲线（无论什么形状，见图 2.1.2），$P$ 是曲线所围图形上任一点。求证：一定存在一条过 $P$ 点的直线，将这图形的面积二等分。

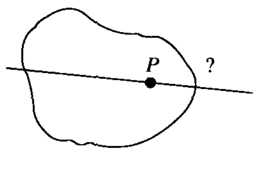


图 2.1.2　封闭曲线

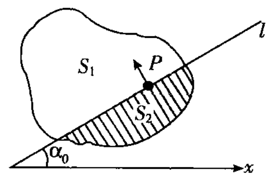


图 2.1.3　$\alpha_0$时 $S_1>S_2$

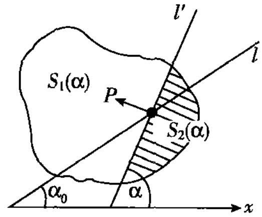


图 2.1.4　旋转成 $\alpha$ 角

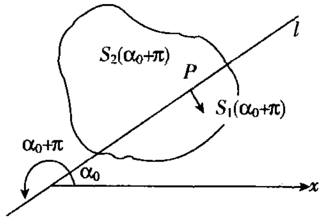


图 2.1.5　旋转 180°后

**证明**

(1) 过 $P$ 点任作一直线 $l$，将曲线所围图形分为两部分，其面积分别记为 $S_1$，$S_2$。若 $S_1=S_2$（此种情况很难办到），则 $l$ 即为所求；若 $S_1\neq S_2$，则不妨设 $S_1>S_2$（此时 $l$ 与 $x$ 轴正向的夹角记为 $\alpha_0$，见图 2.1.3），下面对此种情况进行证明。

(2) 以 $P$ 点为旋转中心，将 $l$ 按逆时针方向旋转，面积 $S_1$，$S_2$就连续地依赖于角 $\alpha$

变化，记为 $S_1(\alpha)$，$S_2(\alpha)$，并设 $f(\alpha)=S_1(\alpha)-S_2(\alpha)$，如图 2.1.4 所示。

（3）函数 $f(\alpha)$ 在 $[\alpha_0, \alpha_0+\pi]$ 上连续，且在端点异号：

$$f(\alpha_0)=S_1(\alpha_0)-S_2(\alpha_0)>0$$

$$\begin{aligned} f(\alpha_0+\pi)&=S_1(\alpha_0+\pi)-S_2(\alpha_0+\pi)\\ &=S_2(\alpha_0)-S_1(\alpha_0)<0 \end{aligned}$$

（旋转 180°后的情况见图 2.1.5）根据零点定理，必存在一点 $\xi\in(\alpha_0, \alpha_0+\pi)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $S_1(\xi)-S_2(\xi)=0$，或 $S_1(\xi)=S_2(\xi)$。过 $P$ 作直线，使之与 $x$ 轴正向的夹角成 $\xi$，该直线即为所求。

实际上哥哥只证明了这样的直线一定存在，究竟如何找到 $\xi$ 角还有待研究，留给读者去思考。

**例 2.1.3** 出租车收费问题。

某城市出租汽车收费情况如下：起价 10 元（4 km 以内）。行程不足 15 km，大于等于 4 km 部分，每公里车费 1.6 元；行程大于等于 15 km 部分，每公里车费 2.4 元。计程器每 0.5 km 计一次价。例如：当行驶路程 $x$(km) 满足 $12\leqslant x<12.5$ 时，按 12.5 km计价；当 $12.5\leqslant x<13$ 时，按 13 km 计价。例如：等候时间 $t$(min) 满足 $2.5\leqslant t<5$时，按 2.5 min 计价收费 0.8 元；当 $5\leqslant t<25$ 时，按 5 min 计价。请回答下列问题。

（1）假设：行程都是整数公里，停车时间都是 2.5 min 的整数倍，请建立车费与行程的数学模型。

（2）若行驶 12 km，停车等候 5 min，应付多少车费？

（3）若行驶 23.7 km，停车等候 7 min，应付多少车费？

**解**

（1）设：车费 $y$ 元，行程车费 $y_1$，停车费 $y_2$，行程 $x\in z^+(km)$，停车时间 $t\in z^+$，$T=\left[\frac{t}{2.5}\right]$，建立数学模型

$$y_1=\begin{cases}10, & 0<x<4\\ 10+(x-4)\times1.6, & 4\leqslant x<15\\ 10+(x-15)\times2.4+1.6\times(15-4), & 15\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

$$=\begin{cases}10, & 0<x<4\\ 3.6+1.6x, & 4\leqslant x<15\\ 2.4x-8.4, & 15\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

$y_2=0.8T=0.8\left[\frac{t}{2.5}\right]$（取整数）

数学模型为 $y=y_1+y_2=\begin{cases}10, & 0<x<4\\ 3.6+1.6x, & 4\leqslant x<15\\ 2.4x-8.4, & 15\leqslant x<+\infty\end{cases}+0.8\left[\frac{t}{2.5}\right]$

（2）当 $x=12$ 时，$T=\left[\frac{5}{2.5}\right]=2$

所以

$$y_1=3.6+1.6\times12=22.8,\ y_2=0.8\times2=1.6$$

故 $y=22.8+1.6=24.4$（元）。

（3）当 $x=23.7$ 时，按 $x=24$ 计价，$t=7$，$T=\left[\frac{7}{2.5}\right]=[2.8]=2$，按 $T=2$ 计价。

所以

$$y_1=2.4\times24-8.4=49.2,\ y_2=0.8\times2=1.6$$

故 $y=49.2+1.6=50.8$（元）。

外币兑换、税收、银行利率等问题大体可归为上述同一类数学问题。

**例 2.1.4** 蚂蚁逃跑问题。

一块长方形的金属板，四个顶点的坐标分别是（1，1），（5，1），（1，3），（5，3）。在坐标原点处有一个火焰，它使金属板受热，假定板上任意一点处的温度与该点到原点的距离成反比。在点（3，2）处有一只蚂蚁，问这只蚂蚁应沿什么方向爬行才能最快到达较凉快的地点？

**解** 板上任一点（$x$，$y$）处的温度

$$T(x,\ y)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$k$ 是一个比例常数。温度变化最剧烈的方向是梯度所指方向。计算

$$\mathrm{grad}T=-\frac{kx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{i}-\frac{ky}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{j}$$

所以

$$\mathrm{grad}T(3,\ 2)=-\frac{3k}{13^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{i}-\frac{2k}{13^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{j}$$

它的单位矢量 $\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$ 所指的方向是由热变冷变化最剧烈的方向（其反方向则是由冷变热）。蚂蚁虽然不懂梯度，但凭它的镜觉细胞的反馈信号，它将沿这个方向逃跑。

## 2.2 极限问题中的初等模型

极限问题是高等数学中最基础最重要的问题之一。本节介绍与极限知识相关的初等模型。

**例 2.2.1** 产品利润中的极限问题。

已知生产 $x$ 对汽车挡泥板的成本是 $C(x)=10+\sqrt{1+x^2}$（美元），每对的售价为 5 美元。于是销售 $x$ 对的收入为 $R(x)=5x$。（1）出售 $x+1$ 对比出售 $x$ 对所产生的利润增长额为 $I(x)=[R(x+1)-C(x+1)]-[R(x)-C(x)]$。当生产稳定、产量很大时，这个增长额为 $\lim\limits_{x\to+\infty}I(x)$，试求这个极限值；（2）生产了 $x$ 对挡泥板时，每对的平均成本为 $\frac{C(x)}{x}$，同样产品产量很大时，每对的成本大致是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{C(x)}{x}$，试求这个极限值。

**解**

（1）$I(x)=\{5(x+1)-[10+\sqrt{1+(1+x)^2}]\}-\{5x-[10+\sqrt{(1+x)^2}]\}$

$=5+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+(1+x)^2}$。

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$，实质上是求

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+(1+x)^2}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-\left[1+(1+x)^2\right]}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(1+x)^2}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(1+x)^2}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}}=-1
\end{aligned}
$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)=5-1=4$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{C(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10+\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{10}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=1$

**例 2.2.2** 细菌繁殖问题。

由实验可知，某种细菌繁殖的速度 $V$ 在培养基充足等条件满足时，与当时已有的数量 $A_0$ 成正比，即 $V=kA_0$（$k>0$ 为比例常数）。

(1) 建立细菌繁殖的数学模型。

(2) 假设一种细菌的个数按指数方式增长，表 2.2.1 是收集到的近似数据。

**表 2.2.1 细菌繁殖近似数据**

| 天数 | 细菌个数 |
|---|---|
| 5 | 936 |
| 10 | 2190 |

求：开始时细菌个数可能是多少？若继续以现在的速度增长下去，假定细菌无死亡，60 天后细菌的个数大概是多少？

**解**

(1) 建立数学模型。为了计算出 $t$ 时细菌的个数，我们将时间间隔 $[0, t]$ 分成 $n$ 等分。由于细菌的繁殖是连续变化的，在很短的一段时间内数量的变化很小，繁殖速度可近似看作不变，因此，在第一段时间 $\left[0, \frac{t}{n}\right]$ 内，细菌繁殖的数量为 $kA_0\frac{t}{n}$，第一段时间末细菌的数量为 $A_0\left(1+k\frac{t}{n}\right)$；同样，第二段时间末细菌的数量为 $A_0\left(1+k\frac{t}{n}\right)^2$……依此类推，到最后一段时间末细菌的数量为 $A_0\left(1+k\frac{t}{n}\right)^n$。

显然，这是一个近似值，因为我们假设了在每一小段时间 $\left[\frac{i-1}{n}t, \frac{i}{n}t\right]$（$i=1, 2, 3, \cdots, n$）内细菌繁殖的速度不变（同时还假设了各小段时间内只繁殖一次）。由此可知，当时间间隔分得越细（即 $n$ 越大）时，这个值越接近精确值，如果对时间间隔无限细分（即 $n\to\infty$），则可求得其精确值。所以，经过时间 $t$ 后细菌的总数是

$$\lim_{n\to\infty}A_0\left(1+k\frac{t}{n}\right)^n=A_0\lim_{n\to\infty}\left(1+k\frac{t}{n}\right)^n\left(令\frac{kt}{n}=\frac{1}{x},\ n\to\infty,\ x\to+\infty\right)$$

$$=A_0\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{kt}$$
$$=A_0e^{kt}$$

设细菌的总数为 $y$，所以所求的数学模型为 $y=A_0e^{kt}$。

(2) 细菌繁殖服从生长函数 $y=A_0e^{kt}$。由题目所给数据得

$$\left.\begin{aligned}936&=A_0e^{5k}\\2190&=A_0e^{10k}\end{aligned}\right\}$$

解此方程组，得 $A_0=400$，$k=0.17$。即开始时细菌个数为 400，按此速度增长下去，则 60 天后细菌个数为

$$y(60)=400e^{60\times0.17}\approx10761200(\text{个})$$

这里仅用两组数据确定 $A_0$，$k$，必定有误差，因此为了得到较为准确的值，应该多收集一些数据，然后用最小二乘法确定之。

## 2.3　最值问题中的初等模型

**例 2.3.1**　海报设计问题。

现在要求设计一张单栏的竖向张贴的海报，它的印刷面积 $128\text{dm}^2$，上下空白各 2dm，两边空白各 1dm，如何确定海报尺寸可使四周空白面积为最小？

**解**

这个问题可用求一元函数最小值的一般方法解决。

设印刷面积由从上到下长 $x$dm，从左到右宽 $y$dm 构成，则 $xy=128$，从而 $y=\frac{128}{x}$。于是，四周空白面积为

$$s=2x+4y+4\times2=2x+\frac{4\times128}{x}+8,\ 0<x<+\infty$$

两边同时对 $x$ 求导，得 $s'=2-\frac{512}{x^2}$。由 $s'=0$，得 $x=16$，此时 $y=8$。

又因为

$$s''=\frac{1024}{x^3}>0,\ 0<x<+\infty$$

所以，当海报印刷部分为从上到下长 16dm，从左到右宽 8dm 时，可使四周空白面积为最小。

若海报改为左右两栏，横向张贴，印刷面积增加到 $180\text{dm}^2$，要求四周留下空白宽 2dm，还要留 1dm 宽的竖直中缝，如何设计它的尺寸可使总空白面积最小？能否用其他方法求解？

**例 2.3.2**　工人上班效率问题。

对某工厂的上午班工人的工作效率的研究表明，一个中等水平的工人早上 8：00 开始工作，在 $t$ 小时之后，生产出 $Q(t)=-t^3+9t^2+12t$ 个晶体管收音机。问：在早上几点钟这个工人工作效率最高？

**解**

求这个工人几点钟工作效率最高，就是问早上几点钟这个工人的生产率取到最大