面向21世纪全国高职高专数学规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

崔国生　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

面向21世纪全国高职高专数学规划教材

线 性 代 数

崔国生　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是高等职业教育工科类、管理类及经济类基础课“线性代数”教材。该书借鉴了国内外同类教材的最新研究成果，并融入了作者多年高等职业教育的教学经验，较好地体现了教育部高职、高专“数学课程教学基本要求”。

全书共分6章，内容包括：行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型，以及线性规划初步。不同学校、不同专业可以根据其教学要求自行选择教学内容。本书语言叙述通俗、简练，富有启发性；知识背景交代清楚，难点分散；关键之处均提醒读者注意或思考；每节后配有习题，章末配有学习指导和复习题；书末配有习题答案或提示。该书既便于教，又便于学，适合专科层次的读者学习使用，是高等职业教育一本较好的“线性代数”教材和教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/崔国生编著．一北京：北京大学出版社，2005.6
(面向21世纪全国高职高专数学规划教材)
ISBN 7-301-08449-8

I．线… II．崔… III．线性代数－高等学校：技术学校－教材 IV．0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第135339号

书　　名：线性代数
著作责任者：崔国生　编著
责 任 编 辑：温丹丹　沈欣
标 准 书 号：ISBN 7-301-08449-8/O·0630
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62765013
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京飞达印刷有限责任公司
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　10.75印张　232千字
2005年6月第1版　2005年6月第1次印刷
定　　价：16.00元

前　　言

本书是我们依照教育部制定的高职、高专“数学课程教学基本要求”，并借鉴国内外同类教材的最新研究成果，为高等职业教育工科类、管理类及经济类学生编写的《线性代数》课程教材。

在编写过程中，我们力求使教学内容体系及其呈现方式符合高等职业教育规律，体现高等职业教育特点，既便于教，又便于学。

本书内容包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型，以及线性规划初步 6 章，涵盖了专科线性代数教学大纲的基本要求。不同学校、不同专业可以根据教学要求自行选择教学内容，带“*”的内容可以选讲或不讲，不会影响后面的教学。将线性规划初步写入此书，目的是使读者能够加深对线性代数的理解，初步了解线性代数的应用，本章供学有余力的同学自学之用。

本书在结构体系、内容安排、习题选择等方面，遵循了“以应用为目的，以必需、够用为度”的高职、高专基础课程教学原则，适度淡化了理论体系和逻辑论证，将重点放在了基本概念阐述、基础理论解释，以及基本方法归纳上，力争使读者通过学习本书，不仅知道线性代数是什么，更知道线性代数能做什么，以便实现线性代数“基础+应用”的双重教育功能。

本书融入了作者多年高等职业教育的教学经验，语言叙述通俗、简练，富有启发性；知识背景交代清楚，难点分散；关键之处均提醒读者注意或思考，或总结出结论；为使读者及时理解所学概念，掌握基本方法，每节后均配有一定数量的习题，供读者练习使用，章末配有学习指导和复习题，以期增加读者知识的结构度，做到融会贯通；书末配有习题答案或提示，供读者参考。

沈阳工程学院刘严老师审阅了初稿，王娜、钱明辉老师演算了全部习题，并提出了修改意见，在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中必有不当乃至错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

2005 年 4 月于沈阳

目　　录

第 1 章　行 列 式

行列式是线性代数研究的主要对象之一．行列式理论不仅是我们后面所要学习的矩阵和线性方程组理论的研究工具，而且在工程技术中也有直接的应用．本章将介绍行列式的概念、主要性质和一般计算方法．

1.1　行列式的定义

1.1.1　二阶、三阶行列式

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题．

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x_1+b_1x_2=c_1, \\ a_2x_1+b_2x_2=c_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x_1,x_2 为未知数，$a_i,b_i(i=1,2)$ 为未知数的系数，$c_i(i=1,2)$ 为常数项．

用代入消元法从式(1.1)中消去 x_2，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x_1=b_2c_1-b_1c_2 .$$

当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，可得

$$x_1=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

同样地，从式(1.1)中消去 x_1，可得

$$x_2=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

不难发现，x_1，x_2 的结构非常相似，并且它们的分子、分母均为两个数乘积之差，为此，我们引入二阶行列式的概念．

定义 1.1　由 a_1，a_2，b_1，b_2 这 4 个数排成的如下式子

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

称为**二阶行列式**．它表示a_1b_2与a_2b_1之差，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 . \tag{1.2}$$

二阶行列式含有2行2列（横排的称为**行**，竖排的称为**列**）．组成行列式的数字或字母叫做行列式的**元素**．例如a_2就是定义1.1中二阶行列式的第2行第1列的元素．

通常用大写字母$\boldsymbol{D}$表示行列式．

有了上面二阶行列式的定义，则式(1.1)的解就可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} .$$

如果把式(1.1)未知数的系数组成的行列式$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$叫做**系数行列式**，把将$\boldsymbol{D}$的第$j$列换成常数项列所得到的行列式记作$\boldsymbol{D}_j\ (j=1,2)$，则$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$．于是，当$\boldsymbol{D} \neq 0$时，方程组(1.1)的解可以简单地表示为

$$x_j = \frac{\boldsymbol{D}_j}{\boldsymbol{D}} \quad (j=1,2). \tag{1.3}$$

例1 计算下列二阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$； （2）$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$．

解

（1）$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$；

（2）$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = a\times(-1) - 0\times 2 = -a$ ．

例2 用二阶行列式解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$$

解　计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{vmatrix}=7，\quad D_1=\begin{vmatrix}3 & -1\\5 & 3\end{vmatrix}=14，\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 5\end{vmatrix}=7，$$

由 $D\neq 0$，得方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2，\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{7}{7}=1.$$

与二阶行列式的定义类似，我们可以定义三阶行列式.

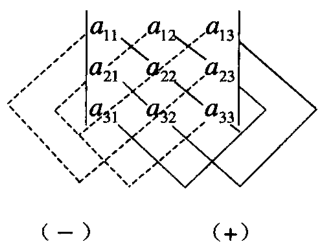
定义 1.2　由 9 个元素排成的 3 行 3 列的式子

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

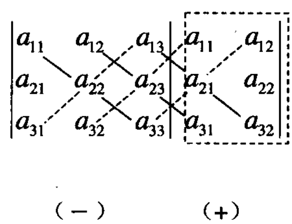
称为**三阶行列式**. 规定三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.4}$$

观察式(1.4)可以发现，三阶行列式共含 6 项，每项均为选自不同行、不同列的 3 个元素的乘积，再冠以正负号. 其规律遵循如图 1-1 所示的对角线法则（图 1-1 之(a)和(b)刻画的是同一规律）: 图中每条实线（共 3 条）所连结的 3 个数的乘积前面加正号，每条虚线（共 3 条）所连结的 3 个数的乘积前面加负号，然后相加就是三阶行列式的值.



(a)



(b)

图 1-1

例 3　用对角线法则计算行列式 $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\-1 & 0 & 4\\5 & -2 & -3\end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\times0\times(-3)+1\times4\times5+3\times(-1)\times(-2)$

$$-3\times0\times5-1\times(-1)\times(-3)-2\times4\times(-2)$$
$$=39 .$$

1.1.2 n 阶行列式

1. 余子式和代数余子式

对角线法则只适用于计算二阶与三阶行列式．为了研究4阶以及更高阶数的行列式，我们来考察二阶行列式与三阶行列式的关系．

由式(1.2)和式(1.4)可以得出，三阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \tag{1.5}$$

即三阶行列式等于它第一行的每个元素分别乘以一个二阶行列式再作代数和．

为了进一步了解这3个二阶行列式与原来三阶行列式的关系，我们引入余子式和代数余子式的概念．

在三阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，把元素 a_{ij} ($i=1,2,3$; $j=1,2,3$)所在第 i 行和第 j 列划去后，剩下的元素保持原来相对位置不变构成的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 $\boldsymbol{M}_{ij}$.

例如，对于上面的三阶行列式 $\boldsymbol{D}$ ，元素 a_{11} 的余子式是划去 $\boldsymbol{D}$ 的第一行和第一列，剩下的元素所构成的二阶行列式，即 $\boldsymbol{M}_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ；元素 a_{13} 的余子式是划去 $\boldsymbol{D}$ 的第一行和第三列，剩下的元素所构成的二阶行列式，即 $\boldsymbol{M}_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

若记 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$ ，则 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的**代数余子式**． $\boldsymbol{D}$ 的元素 a_{12} 的代数余子式为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

例 4　求如下行列式 $\boldsymbol{D}$ 的元素 a_{11}，a_{23}，a_{32} 的代数余子式，其中

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 3\\ 4 & 5 & -1\end{vmatrix}.$$

解　元素 a_{11} 的代数余子式 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-16$，

元素 a_{23} 的代数余子式 $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-5$，

元素 a_{32} 的代数余子式 $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-7$.

应用余子式和代数余子式的概念，式(1.5)可以写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=a_{11}\boldsymbol{M}_{11}-a_{12}\boldsymbol{M}_{12}+a_{13}\boldsymbol{M}_{13}\\ &=a_{11}\boldsymbol{A}_{11}+a_{12}\boldsymbol{A}_{12}+a_{13}\boldsymbol{A}_{13}\end{aligned}\tag{1.6}$$

由式(1.6)可以看出，三阶行列式的值等于其第一行所有元素与它们各自的代数余子式乘积之和.

式(1.6)称为三阶行列式按第一行展开式.

我们已经定义了二阶、三阶行列式．通过分析又发现，三阶行列式可以转化为二阶行列式来计算，即三阶行列式可以通过二阶行列式来定义．按照这一规律，我们可用三阶行列式去定义 4 阶行列式，以此类推，便能够定义 n 阶行列式.

2.　n 阶行列式

由 $n\times n=n^2$ 个元素 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,n;\ \ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行 n 列如下的式子

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**.

n 阶行列式的代数余子式的定义与三阶行列式代数余子式的定义相同．例如上面的 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 的元素 a_{11} 的代数余子式为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

n阶行列式的代数余子式是$n-1$阶行列式.

对于n阶行列式，规定：

$$D=\begin{cases} a_{11} & 当n=1时, \\ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{k1} & 当n\geqslant 2时, \end{cases} \tag{1.7}$$

式(1.7)称为n阶行列式按第一行展开式.

例5 主对角线以上（下）的元素都为零的行列式称为**下（上）三角形行列式**. 试求下三角形行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的值.

解 将此n阶行列式依次按第一行展开得：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}\ a_{22}\cdots(-1)^{1+1}a_{nn}=a_{11}\ a_{22}\cdots a_{nn}$$

即下三角行列式的值等于其主对角线上的元素之积.

例6 应用n阶行列式定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 将行列式按第一行展开，得

$$D=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&-1&1\\-1&2&0\\5&1&1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&-1&1\\4&2&0\\2&1&1\end{vmatrix}$$

$$+(-2)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&0&1\\4&-1&0\\2&5&1\end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3&0&-1\\4&-1&2\\2&5&1\end{vmatrix}=-70$$

习题 1.1

1．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix}-1&2\\3&-4\end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix}\sqrt{2}-1&1\\1&\sqrt{2}+1\end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix}x-1&x^3\\1&x^2+x+1\end{vmatrix}$；　（4）$\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&5&1\\-2&6&3\end{vmatrix}$．

2．解下列方程：

（1）$\begin{vmatrix}x^2&4&9\\x&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=0$；　（2）$\begin{vmatrix}1&x&0&0\\0&0&0&2\\0&0&x&0\\0&3&4&5\end{vmatrix}=1$．

3．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\4&0&0&0\end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix}0&0&0&a_{14}\\0&0&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$．

1.2 行列式的性质与计算

有了n阶行列式的定义，在理论上，我们便可以计算任意阶的行列式．但对于 4 阶以

上的行列式，用定义计算往往是相当繁琐的，特别是某些含有字母的行列式，直接用定义计算往往是无法进行的．为此，我们来研究行列式的性质，以便用行列式的性质简化行列式的运算．

设n阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将$\boldsymbol{D}$的各行改写为同序号的列（即将第i行改写为第i列）后，得到新的行列式

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为D的**转置行列式**．

性质 1 行列式与它的转置行列式的值相等，即$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$．

例如二阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=\boldsymbol{D}.$$

可以验证三阶行列式也满足此性质．

性质 1 虽然没有起到简化行列式计算的作用，但它却揭示了一个重要的事实：在行列式中，行与列的“地位”是等同的——由于转置不改变行列式的值，而原来行列式的行，在转置行列式中则为列，因此行列式关于行成立的性质关于列也成立．

性质 2 交换行列式的任意两行（列），行列式的值仅改变正负号．

例如二阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

将第 1 行与第 2 行交换得

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -D .$$

通常情况下，我们用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_i 表示行列式的第 i 列；交换 i , j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ ，交换 i , j 两列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$ ，并把它们写在等号的上面或下面，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

推论　若行列式某两行（列）相同，则该行列式的值等于零.

事实上，把行列式中相同的这两行（列）互换，则有 $D=-D$ ，故 $D=0$.

性质 3　若行列式的某行（列）有公因子，则公因子可以提到行列式外.

以三阶行列式为例：

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 1　若行列式中某一行（列）中所有元素为零，则行列式的值等于零.

事实上，把元素全为零这一行的公因子“0”提到行列式外，则得行列式的值等于零.

推论 2　若行列式有两行（列）元素对应成比例，则行列式的值等于零，即

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第}i\text{行}) \\ \\ (\text{第}j\text{行}) \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = 0.$$

证明　将行列式第 j 行元素的公因子 k 提到行列式外，则行列式的第 i 行与第 j 行相同，由性质 2 的推论得行列式的值为零.

性质 3 的等价说法是：用数 k 乘以行列式 D ，等于用数 k 乘以 D 的某一行（列）所有元素.

性质 4　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则此行列式等于相应的两个行列式之和.