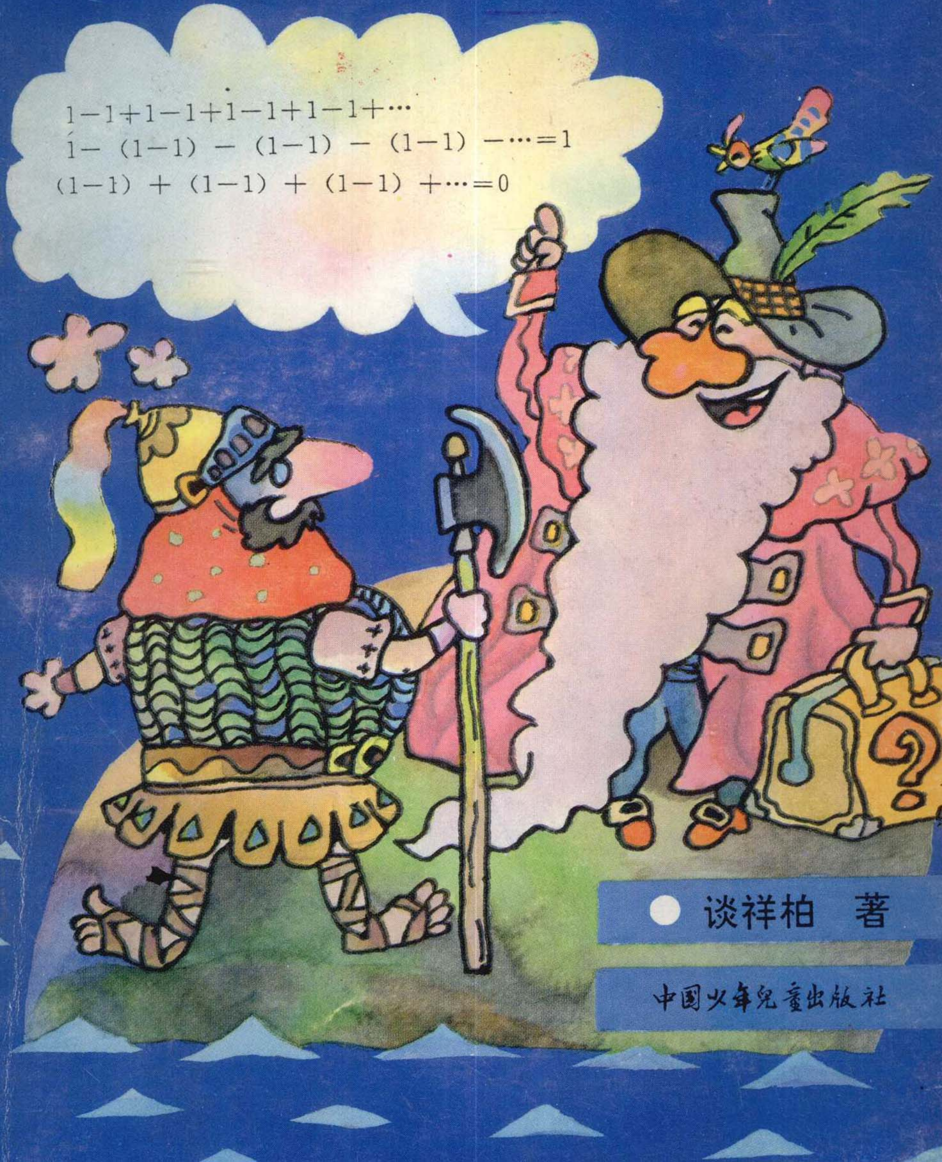
没有结局的数学故事



谈祥柏 著

中国少年儿童出版社

没有结局的数学故事

MEI YOU JIE JU DE SHU XUE GU SHI

谈祥柏 著

中国少年儿童出版社

（京）新登字084号

封面设计：
插　　图：毕树校
责任编辑：陈效师
美术编辑：林继勋

没有结局的数学故事
谈　祥　柏　著
*
中国少年儿童出版社出版　发行
北京景山学校印刷厂印刷
新华书店经销
*
787×1092　1/32　3印张　2插页　54千字
1992年9月北京第1版　1992年9月北京第1次印刷
印数1—1，100册　定价1.25元
凡有印装问题，可向承印厂调换

从确信开始的人将以怀疑结束；但甘心从怀疑开始的人将以确信告终。

——培根

目　录

上　编

下　编

一　由一场怪梦引出的讨论

我们这本书的主人公名叫阿亮，他是一个15岁的中学生。阿亮的父亲张教授，在当地一所名牌大学教授数学。由于父亲的影响，阿亮从小就对数学极感兴趣。他不满足于老师在课堂上所传授的知识，总是喜欢别出心裁，经常提出一些发人深思的怪问题，和父亲或一些爱好数学的同伴共同探讨。因此，同学们常戏称他为“数学博士”。

奇怪的梦

一天晚上，阿亮做了一个奇怪的梦，他先梦见自己长大成人，成了一位著名的科学家，并发明了一种超光速飞船。然后，他自己乘坐这种飞船去旅行，遇见了一个襁褓中的婴儿，这个婴儿正是几十年前的阿亮本人。阿亮满怀欣喜地抱起了这个婴儿，但不小心一失手把婴儿给摔死了。婴儿一死，就不可能再长大变成后来的科学家，也就不会发明超光速飞船了。所以，阿亮也就根本无法遇见这个婴儿并把他摔死。然

如果婴儿不死，他就能成长为科学家，能发明超速飞船，能回到几十年前，抱起摇篮中的婴儿……

这个梦就这样循环往复，无休无止，搅得阿亮一夜没有睡好。清晨起床，他急忙找到父亲，把自己昨夜的梦讲给他听。

张教授听完阿亮的叙述，对他说："好吧，现在让我们来讨论一下这个问题。不过，在讨论前，我必须先向你介绍一些有关悖论的知识，你知道什么叫悖论吗？"

"当然知道啦！悖论就是与人的直觉和日常经验相矛盾的数学结论。"阿亮说。

张教授接着说："对。悖论共分为六个方面，即逻辑学悖论，关于时间的悖论，关于数的悖论，统计学悖论，概率论悖论，以及几何学悖论。它们主要有三种表现形式：一种是佯谬，有些论断看起来好像错了，而实际上却是对的；再一种是似是而非，有些看起来肯定是对的论断，实际上却是错的；还有一种就是看来好像无懈可击的一系列推理，却会导致逻辑上的互相矛盾。你昨天夜晚做的梦，就属于关于时间的悖论。它以第三种形式出现，看起来好像滴水不漏的一系列推理，其结果却造成了逻辑上的互相矛盾。"

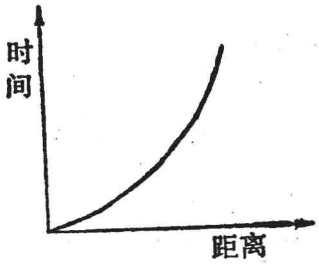
关于跑步者

"现在，让我们来看一个关于时间的悖论的典型

例子。”张教授继续说：“这个问题来源于古希腊。你知道，古希腊曾诞生了许许多多著名的哲学家和思想家。他们分为两派，一派以‘正统’自居，另一派则被贬称为‘诡辩家’。芝诺就是诡辩家中的一个代表人物。他提出的那些关于时间和运动的悖论，在当时的学术界引起了极大的骚动。余波千年不息，在整个数学发展史上曾起过很大作用。下面，就是著名的芝诺关于跑步者的悖论。

“跑步者是这样进行推理的：在我到达终点线之前，我必须先经过中点，然后再跑到余下路程的中点，也就是全程的四分之三处。而在跑完最后的四分之一这段路之前，也必须先跑到这段路的中点。因为这些一个一个的中点是没有止境的，所以我将永远无法到达终点。”

“接下来，让我们假定跑步者每跑一半路要一分钟，据此可以在坐标图上绘出一张时间-距离关系图。”说到这儿，张教授拿出纸笔画出了跑步者的时间-距离关系图（见下页图）。然后接着说：“从图中，我们可以清楚地看到，跑步者越来越接近终点，但永远也不能到达终点。你能看出其中的问题吗？”



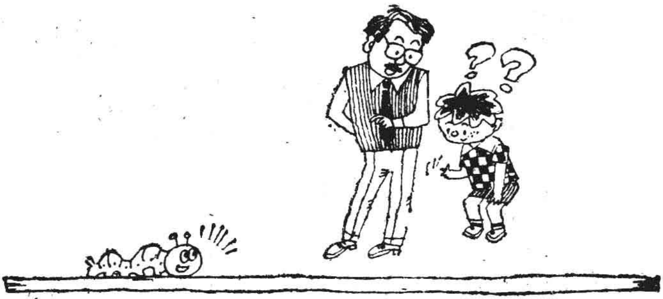
阿亮看了看爸爸绘出的时间-距离关系图，又认真地想了想，恍然大悟。他叫道："啊，爸爸，我知道答案了！跑步者每跑全程的一半要花一分钟时间。但是以后每跑一半到达余下路程的中点并不需要花费一分钟时间，而只是需要前一段时间的一半。这样，他仅仅需用两分钟时间就可以到达终点，只不过必须通过无穷多个中点而已。"

假如蠕虫不死

"我再给你举一个例子，"张教授接着说，"有一条蠕虫呆在一条橡皮绳的一端，橡皮绳的原长度是1公里。蠕虫以每秒1厘米的稳定速度沿橡皮绳爬行。1秒钟之后，橡皮绳就像橡皮筋一样被拉长为2公里。再过1秒钟，橡皮绳又被拉长为3公里。如此下去，请你回答我，蠕虫最后究竟会不会爬到终点？"

父亲的话音刚落，阿亮便不假思索地回答道："当然不会。蠕虫1秒钟才爬一厘米，而橡皮绳1秒钟要长1公里，这样下去，它怎么可能到达终点呢？"

"这次你可回答错了。不过，这并不能怪你。根



据直觉，一百个人中会有九十九个人认为蠕虫绝不会爬到终点。但是精确的数学计算告诉我们，事实上，蠕虫能够爬到终点。”张教授接着解释道：“这个问题的关键在于橡皮绳的拉长是均匀的。也就是说，蠕虫不仅仅以每秒1厘米的速度往前爬行，它还随着橡皮绳的拉伸而向前挪移。在第一秒末，蠕虫爬行了一厘米，也就是橡皮绳长度的1/100000；而在第二秒末，它又在长度为2公里的橡皮绳上爬了它的长度的1/200000；在第三秒末，它又爬了3公里长的橡皮绳的1/300000。如此继续下去，蠕虫的爬行长度表示为整条橡皮绳的分数就是下式：

$$\frac{1}{100000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\right)。$$

“上式中，括弧里的数是一个调和级数。你可以想像到，调和级数的和可以要多大有多大（无穷大）。譬如，我们要使这个和等于100000，那么上式中蠕虫

爬行的长度表示为整条橡皮绳的分数就等于 1，即：

$$\frac{1}{100000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{100000}(100000)$$

$$=1。$$

也就是说蠕虫爬完了整根橡皮绳，已经到达终点。通过计算机的精密计算，我们还可求得所需的时间近似等于e^{100000}。尽管这个数字比已知的宇宙年龄还要大得多，但它毕竟是一个有限的数字。这就证明了，蠕虫总能在有限的时间内到达终点，爬完全程。”

说到这里，教授顿了顿，又笑着补充了一句：“当然，我们要先假定这条蠕虫是精力无限和长生不死的。否则，走不了多久它就见上帝去了，那就不可能爬完全程。”

阿亮也被爸爸的幽默解释逗笑了。他插嘴说：“等一等。爸爸，我有一个问题，刚才你说到蠕虫爬完全程所需的时间是e^{100000}。我知道这个e就是自然对数的底，它的值是2.718…。但是在前面你还讲到了调和级数，这个名词我不太清楚，你是否能简单些告诉我，调和级数是怎么回事？”

“哟，我忘记了。级数的内容应该是在大学里学的，现在你确实还没有接触到。那么，让我简单地向你介绍一下吧。”张教授一面说，一面拿出一本《高

等数学》，像在课堂上一样，开始为阿亮讲课。

“级数的定义是这样的：假定我们给出了一个序列u_1，u_2，$u_3\cdots$，u_n，$\cdots$，则下面的式子

$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$（或简写为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$）就叫做无穷级数，或简称级数。而调和级数是这样一个特殊级数，它的表达式为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots。$$

我们将其中的$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$括在一起，有

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}。$$

再将$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$括在一起，又有

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}。$$

再依次将其后的 8 个、16个、…分数括在一起，它们每个括号内分数之和都大于$\frac{1}{2}$，由此可见

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots。$$

所以，只要n取得充分大，调和级数可以比任何给定的数都大。它说明这个长生不死、精力无限的蠕虫，只要给它足够的时间，它总可能爬完全程。”

“想不到我还学了点高等数学。”阿亮高兴地说：“这个蠕虫和橡皮绳的问题是太奇妙了。看来，这是一个典型的似是而非的悖论。根据常识得出的结论竟会和根据精确计算得出的结果截然相反。明天去学校，我一定把这个问题讲给同学们听听，看看是否有人能做出正确的解答。”

解　梦

父亲兴致勃勃地说道：“下面说说你昨晚的梦。你的推理一步也没错，人类是否能制造出超光速飞船，在科学上还是一个有争议的问题，即使将来能造出超光速飞船，即使将来能实现超光速旅行，我们所追溯上去的，也只不过是昔日的景象而已。对于这些昔日的景象，观察者是不能与之发生相互作用或用外力将其加以改变的。你绝对不会抱起婴儿时的自己！懂了吗？”张教授结束了自己的解释。

“懂了一点儿，爸爸。不过我还要好好想想，消化消化。”阿亮答道，“悖论真是太有意思了，下次如果有机会，您再为我讲一讲其他方面的悖论，好么？”

“当然好啦。”爸爸笑了。

二　到底谁第一

阿亮有一个慈祥的妈妈，她在某家大公司做统计师。这天下班回家，她对自己的丈夫说："今天，我碰见一桩怪事情，百思不得其解，特来请教你这位大数学家，希望你能给出一个合理的解答。"

张教授问："什么怪事？你先说出来让我听听看。"

出差费问题

阿亮的妈妈说："你知道，我们公司属下有两个分厂。今天，为了比较各厂每项指标的经济效益，公司经理召集了两位厂长开会，专门检查了两厂上报交通费占全部出差费的比例。在上半年度，第一分厂交通费占全部出差费的比例是44%，第二分厂则只占40%；在下半年度，第一分厂交通费占全部出差费的比例是84%，第二分厂则只占80%。看了以上的统计数字，经理非常不满。他认为，对全年而言，第一分厂交通费占全部出差费的比例肯定也大于第二分厂。

于是，他就批评了第一分厂的那位厂长。”

“这有什么可奇怪的呢？很正常嘛。”张教授插嘴道。

“你接着听呀，问题在后面呢。”阿亮的妈妈说，“第一分厂的厂长挨了批评后很不服气，他要求大家把具体数字摊出来评理，经理同意了这一要求。但谁能想得到，经理一看报表，竟惊讶得说不出话来啦。原来，全年的统计数字表明，第二分厂交通费占全部出差费的比例实际上比第一分厂要高！你看，这里的两张表格，就是两个分厂全年出差费与交通费的实际数字表。”

说到这儿，阿亮的妈妈拿出来两张表格摊在写字台上。表格上分别印着：

第一分厂：

	上半年度	下半年度	全 年
出差费	50	50	100
交通费	22	42	64
所占份额	22/50	42/50	64/100
百分比	44%	84%	64%

第二分厂：

	上半年度	下半年度	全 年
出差费	30	70	100
交通费	12	56	68
所占份额	12/30	56/70	68/100
百分比	40%	80%	68%

张教授仔细地研究着这两张表格。过了一会儿，他抬起头来说道："这是一个有趣的问题。实际上，它属于统计学悖论。请稍等一会儿，咱们的阿亮近来对悖论颇感兴趣，我去把他叫来一道听听吧。"

爸爸把阿亮叫到书房中，妈妈把刚才说过的内容又对阿亮讲了一遍，然后，把两张表格摊到阿亮面前。

张教授开口道："这个问题初看似乎不可思议，照理说，既然第一分厂上半年度与下半年度的百分比都高于第二分厂，那么全年百分比理应也是第一分厂高，但是实际上，怎么会变成第二分厂高了呢？其实，说穿了很简单，这里，问题的关键在于算术平均与加权平均是有区别的。阿亮，你在学校中已经学到过什么叫加权平均了吧？"

"学过了，爸爸。加权平均又称为加权平均值，在计算若干个数量的平均值时，考虑到每个数量在总量中所占的地位不同，可以分别给予它们不同的权数。按不同权数计算的各个数量的平均值，就是加权平均值。比如，设x_1、x_2、…、x_n为n个数量，f_1，f_2，…，f_n顺序为x_1，x_2，…，x_n的权数，则称

$$\frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_n}$$

为x_1、x_2、…、x_n的加权平均值。"

"对！"张教授接着说道，"在上面提到的问题中，对于第一分厂来说，上半年度与下半年度的母数都相同，这个母数是指上半年度或下半年度的出差费总数，它们在全年出差费总数之中所占的份额即为它