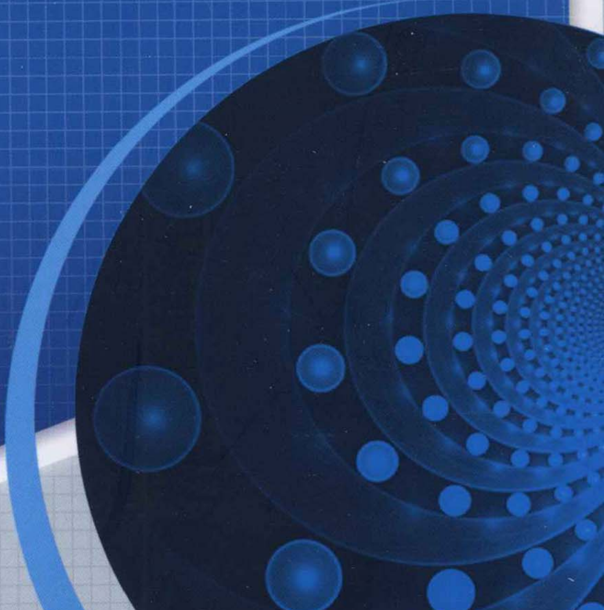
形式概念及其新进展

马 垣 曾子维 迟呈英 吴建胜 ◎ 著



科 学 出 版 社

形式概念及其新进展

马　垣　曾子维　迟呈英　吴建胜　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书全面介绍了形式概念及其最新进展，第1章是格理论数学知识的回顾，第2章到第11章是对基础理论的详尽总结，包括兼容子背景、同余关系、容差关系、块关系、子直接积、封闭关系、P积与P溶合、理想过滤胶合、背景的反约简、概念凸集、局部兼用、Tamari格、伪内涵、Duquenne-Guigues基、各种标尺等。第12章到第20章是对近几年形式概念最新成果的总结，包括概念代数、概念的非、概念代数的同余、双布尔代数、弱双布尔代数、弱双反格、拟序背景、弱聚类、一致性分析、一致背景、唯一反格、退化的多值依赖、紧致依赖、内涵亏值、形式背景的共形分解、形式概念中的分形几何、形式概念中的粒计算等。

本书可作为应用数学、计算机、自动化系统工程、管理科学等专业的高校师生教学参考书，也可供相关领域工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

形式概念及其新进展/马垣等著．—北京：科学出版社，2010

ISBN 978-7-03-029778-5

Ⅰ.①形… Ⅱ.①马… Ⅲ.①格-应用数学-研究 Ⅳ.①O153.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第250543号

责任编辑：任 静 王志欣 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：赵 博 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年1月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2011年1月第一次印刷 印张：21 1/2
印数：1—2 000 字数：420 000

定价：65.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

形式概念的理论是德国数学家 Wille 教授在 1982 年的论文中提出的。1999 年 Ganter 出版了学术著作 *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*（我们翻译了这部学术著作并于 2007 年由科学出版社出版），对形式概念理论的早期成果做了总结。

近年来，由于形式概念的理论在软件工程、数字图书馆、文献检索、Web 文档导航、类层次设计、数据挖掘知识发现等领域都有了重要的应用，因此在国际上越来越受关注。2003 年在德国达姆施塔特召开了第一届国际“形式概念分析”学术会议，2004 年在澳大利亚悉尼、2005 年在法国莱恩斯、2006 年在法国达累斯顿、2007 年在法国克勒蒙特、2008 年在加拿大蒙特利尔、2009 在德国达姆施塔特继续举行了第二届到第七届“形式概念分析”国际学术会议。会议论文丰富，气氛热烈，展现了强劲的发展势头。

形式概念理论在我国也越来越受关注，论文逐年迅速递增。众所周知，“概念”、“内涵”、“外延”、“父概念”、“子概念”等本来都是哲学中的词汇，Wille 教授 1979 年到 1982 年的研究首次对这些词汇给出了数学描述，并称其为“形式概念”，在这种数学描述中，“概念”、“内涵”、“外延”都有严格明确的数学定义，特别是对于这种数学描述，“父概念”、“子概念”的关系将是偏序关系，而且按这个偏序，任何一个概念集合都有上确界及下确界，因而按这个偏序，全部概念的集合将是一个“完全格”。这样由于有“格理论”的强大支持，所以形式概念理论的成果极其广泛、极其丰富。

许涛老师、沈夏炯老师在《软件导刊》2008 年第 2 期的文章中指出，我国的形式概念研究现在还只限于建格算法、属性约简、规则提取、与粗集理论及其他理论的结合、应用这五个方面。也就是说，像 Ganter 的著作中 1999 年就已涉及的兼容子背景、同余关系、容差关系、块关系、子直接积、封闭关系、P 积、P 溶合、理想过滤胶合、背景的反约简、概念凸集、局部兼用等在我国的论文中还都没有见过。因此全面介绍形式概念理论各个方面成果的书在我国是非常需要的。

辽宁科技大学计算机科学与技术学院及软件学院从 1999 年开始一直做形式概念理论的研究工作及研究生的教学工作。在这些工作中涉及形式概念的全面理论，包括全面的前期理论及近几年国际上的最新成果，并从 2005 年开始撰写全面介绍形式概念理论的著作，经过 5 年的时间完成本书。本书全面介绍了形式概念及其最新进展，对基础理论和近几年的最新成果均进行了详尽总结。本书对所有

理论成果都给出了详细证明及丰富的实例，并形成了严格的逻辑体系。

辽宁科技大学的研究生董辉、宫玺、汤新铭、张浩、孟凡星、柏文波、胡志宇、王月行、龚卫明、张维、李栋国、李雪梅、苏宗超等为本书的出版也作了很多工作，这里深表感谢。本书的写作、出版受到了辽宁科技大学学术专著出版基金的资助，在此也深表感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正。

马　垣

2010年8月

目　录

第1章 基础理论

1.1 半序集

本节介绍本书用到的有关“偏序”的理论(Birkhoff,1967)。

1. 关系 若 M 与 N 是两个集合,则它们的笛卡儿积 $M\times N$ 的任何一个子集 $R\subseteq M\times N$,都称为是 M 与 N 之间的关系。当 $M=N$ 时称为是 M 上的关系。若 $a\in M,b\in N$ 有关系 R,即二元组 $(a,b)\in R$,则它可记作 aRb。

2. 偏序关系 集合 M 上的关系 R 称为偏序关系,当对所有 $x,y,z\in M$ 都有

(1) 自反性:xRx;

(2) 反对称性:xRy 且 yRx,则 $x=y$;

(3) 传递性:xRy 且 yRz,则 xRz。

偏序关系 R 常用 $\leqslant$ 来表示,当 $x\leqslant y$ 且 $x\neq y$ 时我们还记作 $x<y$。

3. 逆关系 设 R 是集合 M 上的关系,则 R 的逆关系记作 R^{-1},有

$$R^{-1}=\{(x,y)\mid(y,x)\in R\}$$

偏序关系 $\leqslant$ 的逆关系常记作 $\geqslant$。

4. 可比较元素 设集合 M 上有偏序关系 $\leqslant$,如果 $x,y\in M$ 且 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$ 成立,则称 x,y 是可比较的。若 M 中任两个元素都是可比较的,则称 $\leqslant$ 为全序或链。

5. 半序集 设 M 是一个集合,$\leqslant$ 是 M 上的偏序关系,则二元组 $(M,\leqslant)$ 称为半序集。当 $\leqslant$ 是全序时称为是全序集。$(M,\leqslant)$ 的对偶记作 $(M,\leqslant)^d$ 是半序集 $(M,\geqslant)$。

6. 上近邻和下近邻 设 $(M,\leqslant)$ 是一个半序集,$x,y\in M,x<y$,且没有 $z\in M$,使 $x<z<y$,则称 y 是 x 的上近邻,x 是 y 的下近邻,记作 $x\prec y$。

7. Hasse 图 设 $(M,\leqslant)$ 是一个半序集,图 (V,E) 称为 $(M,\leqslant)$ 的 Hasse 图。这里 $V=M,E=\{(x,y)\mid x\in V,y\in V,x\prec y\}$,并且 Hasse 图绘制时应保证当 $x\prec y$ 时 x 一定在 y 的下方。

8. 序理想 $(M,\leqslant)$ 是一个半序集,$N\subseteq M$,满足若 $x\in N,y\leqslant x$,则 $y\in N$,称 N 为 $(M,\leqslant)$ 的序理想。

9. 序过滤 $(M,\leqslant)$ 是一个半序集,$N\subseteq M$,满足若 $x\in N,y\geqslant x$,则 $y\in N$,称 N 为 $(M,\leqslant)$ 的序过滤。

10. 主理想　$(M,\leqslant)$ 是一个半序集，$x\in M$，x 的主理想记作 $(x]$，是集合 $(x]=\{y\in M\mid y\leqslant x\}$。

11. 主过滤　$(M,\leqslant)$ 是一个半序集，$x\in M$，x 的主过滤记作 $[x)$，是集合 $[x)=\{y\in M\mid y\geqslant x\}$。

12. 理想　$(M,\leqslant)$ 是一个半序集，$N\subseteq M$，满足：

(1) N 是序理想；

(2) N 中任两个元素都有公共上界；

则称 N 为理想。

13. 过滤　$(M,\leqslant)$ 是一个半序集，$N\subseteq M$，满足：

(1) N 是序过滤；

(2) N 中任两个元素都有公共下界；

则称 N 为过滤。

设 $(M,\leqslant)$ 是一个半序集，其所有序理想的集合记作 $\mathrm{OI}(M,\leqslant)$，序过滤的集合记作 $\mathrm{OF}(M,\leqslant)$，所有理想的集合记作 $I(M,\leqslant)$，所有过滤的集合记作 $F(M,\leqslant)$。

例 1.1　设 $M=\{a,b,c,d,e,f\}$，M 上的偏序如表 1.1 所示，其 Hasse 图如图 1.1所示。

表 1.1　一个偏序关系

$\leqslant$	a	b	c	d	e	f
a	×					
b		×				
c	×	×	×			
d	×			×		
e		×			×	
f	×	×		×	×	×

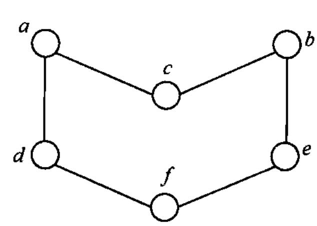


图 1.1　一个半序集的 Hasse 图

首先主理想与主过滤如下所示：

$(a]=\{a,c,d,f\}$，　$[a)=\{a\}$

$(b]=\{b,c,e,f\}$，　$[b)=\{b\}$

$(c]=\{c\}$，　$[c)=\{a,b,c\}$

$(d]=\{d,f\}$，　$[d)=\{a,d\}$

$(e]=\{e,f\}$，　$[e)=\{b,e\}$

$(f]=\{f\}$，　$[f)=\{a,b,d,e,f\}$

序理想如下所示：

$\{a,c,d,f\}$，$\{b,c,e,f\}$，$\{a,b,c,d,e,f\}$，$\{e,f\}$，$\{c\}$，$\{d,f\}$，$\{d,e,f\}$，$\{c,e,$

$f\}$, $\{c,d,f\}$, $\{c,d,e,f\}$, $\{c,f\}$, $\{b,d,e,f,c\}$, $\{a,c,d,f,e\}$, $\{f\}$, $\varnothing$

序过滤如下所示：

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,d\}$, $\{b,e\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,e\}$, $\{a,b,e\}$, $\{e,d,a,b\}$, $\{f,a,b,d,e\}$, $\{a,b,c,d,e,f\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\varnothing$

理想如下所示：

$\{a,c,d,f\}$, $\{b,c,e,f\}$, $\{e,f\}$, $\{c\}$, $\{d,f\}$, $\{c,e,f\}$, $\{c,d,f\}$, $\{c,f\}$

过滤如下所示：

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,d\}$, $\{b,e\}$, $\{a,b,d,e\}$, $\{f,a,b,d,e\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,b,e\}$

定理 1.1 主理想和主过滤按子集隶属关系为序，也分别是一个半序集。

例 1.2 例 1.1 中的主理想及主过滤的 Hasse 图分别如图 1.2 及图 1.3 所示。

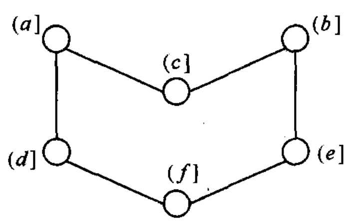


图 1.2 主理想的 Hasse 图

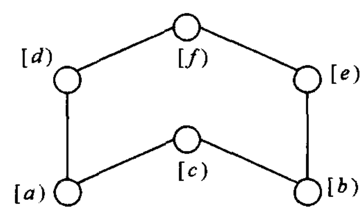


图 1.3 主过滤的 Hasse 图

14. 区间 $(M, \leqslant)$ 是一个半序集，$x, y \in M$，而且 $x \leqslant y$，则以 x, y 为端点的区间记作 $[x, y]$，是集合 $\{z \in M \mid x \leqslant z \leqslant y\}$。

15. 保序映射 设 $(M, \leqslant)$ 与 $(N, \leqslant)$ 是两个半序集，φ 是从 M 到 N 的映射，满足对所有 $x, y \in M$，只要 $x \leqslant y$，就有 $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$，则称 φ 是保序映射。

16. 序嵌入 设 $(M, \leqslant)$ 与 $(N, \leqslant)$ 是两个半序集，φ 是从 M 到 N 的保序映射，φ 满足 $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$ 时，有 $x \leqslant y$，则称 φ 是序嵌入。

例 1.3 图 1.4 所示的映射 φ 是保序映射，不是序嵌入。因为 $(\varphi(x_2) = y_2) \geqslant (\varphi(x_3) = y_3)$，但 $x_2 \geqslant x_3$ 不成立。

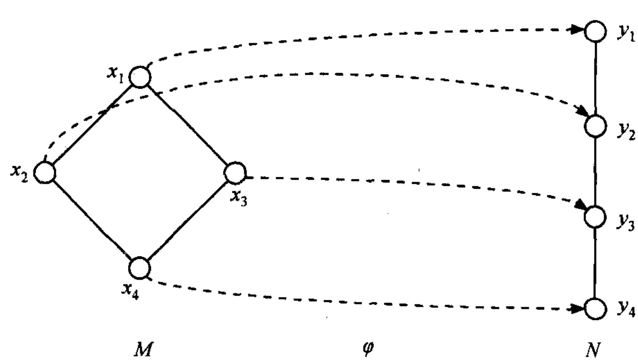


图 1.4 一个不是序嵌入的保序映射

17. 序同构　设 $(M, \leqslant)$ 与 $(N, \leqslant)$ 是两个半序集，φ 是从 M 到 N 的序嵌入，而且还是双射，则称 φ 是 M 与 N 的序同构。

18. 直接积　设 $(M, \leqslant)$ 与 $(N, \leqslant)$ 是两个半序集，它们的直接积记作 $(M, \leqslant)\times(N, \leqslant)$，是半序集 $(M\times N, \leqslant)$。

这里 $(x_1, x_2)\leqslant(y_1, y_2)$ 等价于 $x_1\leqslant y_1$，且 $x_2\leqslant y_2$。

19. 基本和　设 $(M_1, \leqslant)$ 与 $(M_2, \leqslant)$ 是两个半序集，它们的基本和记作 $(M_1, \leqslant)+(M_2, \leqslant)$ 是半序集 $(\dot{M}_1\cup\dot{M}_2, \leqslant)$。

这里 $\dot{M}_t=\{t\}\times M_t, t=1,2$。而 $(s,x)\leqslant(t,y)$ 等价于 $s=t$ 且 $x\leqslant y$。

例 1.4　图 1.5 所示为两个半序集的直接积。图 1.6 所示为两个半序集的基本和。

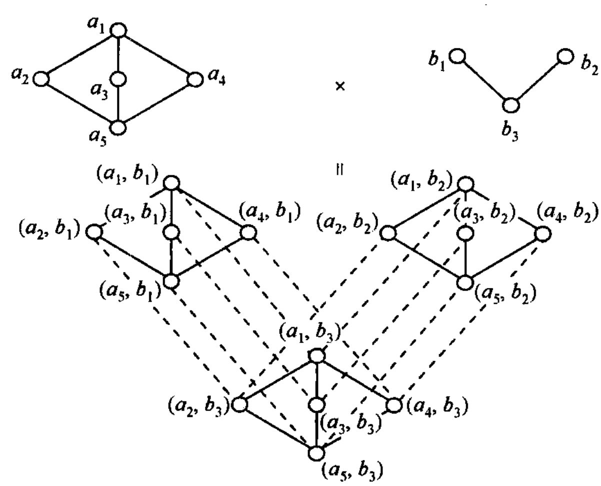


图 1.5　两个半序集的直接积

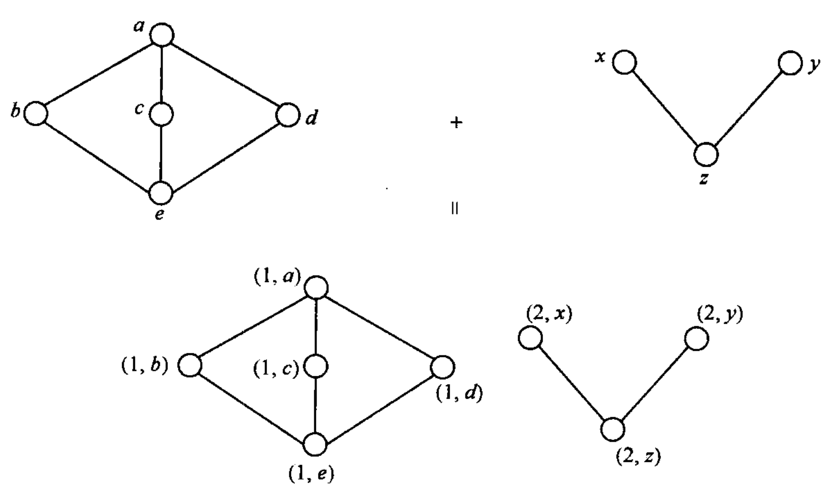


图 1.6　两个半序集的基本和

1.2 格

本节介绍本书用到的有关"格"的理论(Davey et al. ,1990)

1. 上界与下界 设$(M, \leqslant)$是一个半序集，$A \subseteq M$，若对A中所有元素a都有$x \leqslant a (x \in M)$，则称x是A的一个下界；若对A中所有元素a都有$a \leqslant y (y \in M)$，则称y是A的一个上界。若A的所有下界的集合有最大元素，则称其为A的下确界；若A的所有上界的集合有最小元素，则称其为A的上确界，并分别记作$\inf A$及$\wedge A$或$\sup A$及$\vee A$。当A只有两个元素x, y时，也记作$x \wedge y$及$x \vee y$。

例 1.5 图1.7所示的半序集，若$A = \{c, d, e\}$，则A的上界有a, b, c，A的下界有e, g，显然A有上确界c，有下确界e。若$A = \{a, b, c\}$，则A没有上界，当然也没有上确界。

图1.8所示的半序集，若$A = \{c, d\}$，则A有上界a, b，但集合$\{a, b\}$没有最小元素，所以A也没有上确界。

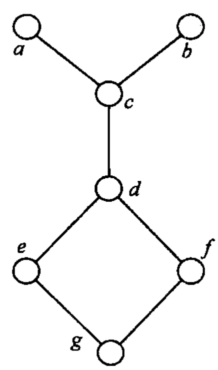


图1.7 一个半序集

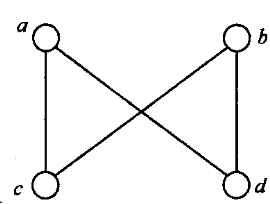


图1.8 一个半序集

2. 格 设$(M, \leqslant)$是一个半序集，若M中的任何两个元素都有上确界及下确界，则称$(M, \leqslant)$是一个格。若M中的任何一个子集都有上确界与下确界，则称$(M, \leqslant)$是一个完全格。显然当M中包含有限个元素时，格一定是完全格。

3. 格的最大元素及最小元素 若$(M, \leqslant)$是完全格，则M中必有最大元素，我们称这个元素为单位元，记作1_M；而且还一定有最小元素，我们称这个元素为零元，记作0_M。

4. $\varnothing$的上确界及$\varnothing$的下确界 $\varnothing$也是M的子集，因为M中的所有元素都是它的上界，也都是它的下界，所以$\varnothing$的上确界为0_M，即$\vee \varnothing = 0_M$；同理，$\varnothing$的下确界为1_M，即$\wedge \varnothing = 1_M$。

5. 子格及完全子格 若$(M, \leqslant)$是一个格，$M_1 \subseteq M$，且$(M_1, \leqslant)$也是一个

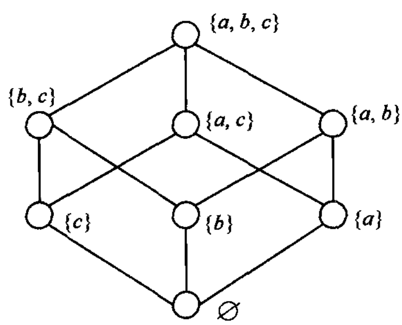


图 1.9　一个格的 Hasse

格，则称 $(M_1, \leqslant)$ 为 $(M, \leqslant)$ 的子格。若其包含 $(M, \leqslant)$ 的最大元素 1_M 及最小元素 0_M，则称 $(M_1, \leqslant)$ 为完全子格。

例 1.6　设 S 是一个集合，则 $(2^S, \subseteq)$ 是一个完全格。$S=\{a,b,c\}$ 时的 Hasse 图如图 1.9 所示。若 $\mathbb{R}$ 是所有实数的集合，则 $(\mathbb{R}, \leqslant)$ 是格。因为 $x,y\in\mathbb{R}$，则 $x\wedge y=\min(x,y)$ 以及 $x\vee y=\max(x,y)$，但 $(\mathbb{R}, \leqslant)$ 不是完全格，因为 $\{x \mid x\in\mathbb{R}, x>0\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的子集，但它没有上确界。

6. 上确界不可约及下确界不可约　设 $(S, \leqslant)$ 是一个完全格，$v\in S$，令 $v_*=\bigvee\{x\in S \mid x<v\}$，$v^*=\bigwedge\{x\in S \mid x>v\}$，$v\neq v_*$ 时，称 v 为上确界不可约；$v\neq v^*$ 时，称 v 为下确界不可约。

例 1.7　图 1.9 中的 $\{a,b\}$ 下确界不可约，因为 $v^*=\{a,b,c\}\neq\{a,b\}$，但 $\{a,b\}$ 不是上确界不可约，因为 $v_*=\bigvee\{\{a\},\{b\},\varnothing\}=\{a,b\}$。

定理 1.2　上确界不可约等价于只有一个下近邻；下确界不可约等价于只有一个上近邻。

7. 上确界稠密及下确界稠密　设 $(S, \leqslant)$ 是一个完全格，$X\subseteq S$，如果 S 中的每个元素都是 X 某个子集的上确界，则称 X 在 S 中上确界稠密；如果 S 中的每个元素都是 X 某个子集的下确界，则称 X 在 S 中下确界稠密。

8. $M(S)$ 及 $J(S)$　设 $(S, \leqslant)$ 是一个完全格，则 S 中所有下确界不可约元素的集合记作 $M(S)$，所有上确界不可约元素的集合记作 $J(S)$，而且可知 $M(S)$ 在 S 中下确界稠密，$J(S)$ 在 S 中上确界稠密。

例 1.8　图 1.10 是五个元素的所有可能的格及其中的上确界不可约元素。可以看出它们是上确界稠密的，图 1.11 是这些格中的下确界不可约元素。

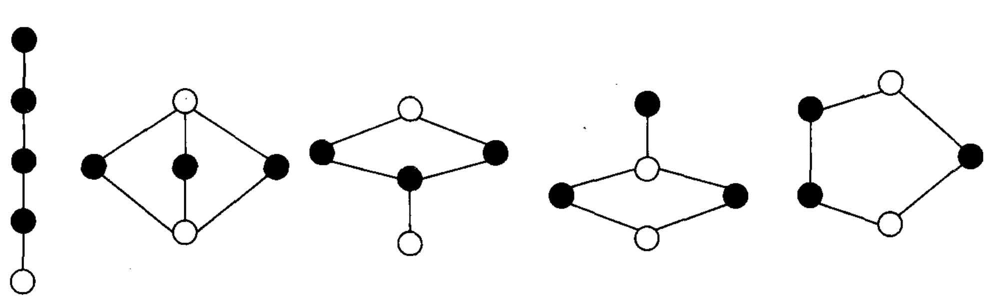


图 1.10　上确界不可约元素

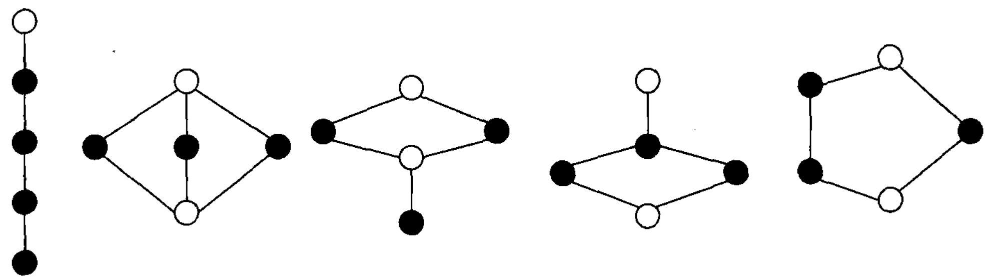


图 1.11　下确界不可约元素

定理 1.3　设 $(M, \leqslant)$ 是一个半序集，则 $(M, \leqslant)$ 的所有序理想（序过滤）按子集隶属关系是格。而主理想（主过滤）是序理想（序过滤）的子集，并且在其中上确界稠密（下确界稠密）。

例 1.9　图 1.1 的半序集序理想的 Hasse 图如图 1.12 所示，其主理想如其中的实心点所示，容易看出它们在序理想中上确界稠密。序过滤如图 1.13 所示，其主过滤如其中的实心点所示，容易看出它们是序过滤中的下确界不可约元素，它们在序过滤中下确界稠密。

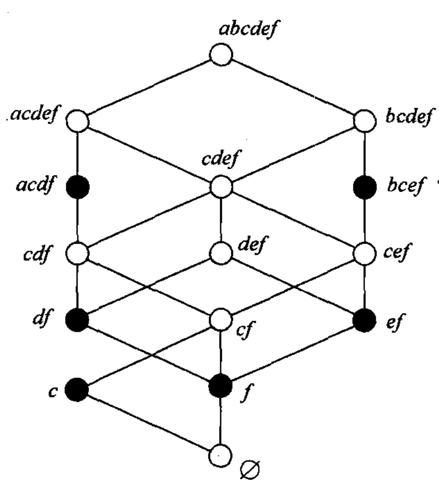


图 1.12　序理想及主理想

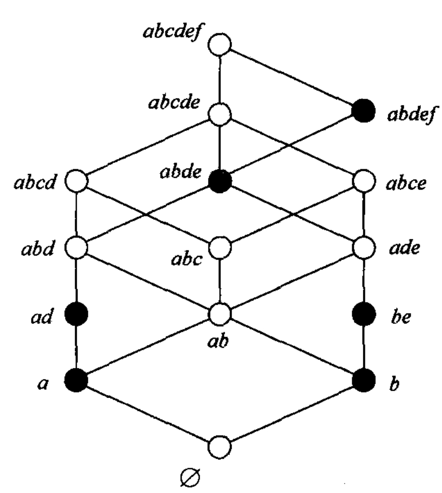


图 1.13　序过滤及主过滤

9. $\vee$ 射、$\wedge$ 射及同态　设 $(S, \leqslant)$ 及 $(R, \leqslant)$ 是两个完全格，φ 是从 S 到 R 的映射，对于每个 $X \subseteq S$，令 $\varphi(X) = \{\varphi(x) \mid x \in X\}$。若 $\varphi(\wedge X) = \wedge \varphi(X)$，则称 φ 为保下确界映射或分别称为 $\vee$ 射及 $\wedge$ 射。若既是 $\vee$ 射又是 $\wedge$ 射，则称为同态。

1.3 闭包系统

本节介绍本书用到的有关“闭包系统”的理论。

1. 闭包系统 设 S 是一个集合，R 是 S 的子集的集合，即 $R\subseteq 2^S$，若 R 满足

(1) $S\in R$；

(2) $P\subseteq R$ 则 $\bigcap P$ 属于 R；

则称 R 是一个闭包系统。

例 1.10 一个群的所有子群的集合是闭包系统；一个集合 S 上的所有等价关系的集合是闭包系统；再如，$S=\{a,b,c,d,e,f\}$ 按表 1.1 定义的偏序关系 $\leqslant$，则半序集 $(S,\leqslant)$ 的全部序理想的集合(见图 1.12)：$\{\{a,b,c,d,e,f\},\{a,c,d,e,f\},\{b,c,d,e,f\},\{c,d,e,f\},\{g,c,d,f\},\{b,c,e,f\},\{c,d,f\},\{d,e,f\},\{c,e,f\},\{d,f\},\{c,f\},\{e,f\},\{f\},\{c\},\varnothing\}$ 是闭包系统。

2. 闭包算子 设 S 是一个集合，φ 是从 2^S 到 2^S 的映射，满足

(1) 单调性：$X\subseteq Y$，则 $\varphi(X)\subseteq\varphi(Y)$；

(2) 扩展性：$X\subseteq\varphi(X)$；

(3) 等幂性：$\varphi(\varphi(X))=\varphi(X)$；

则称 φ 是 S 上的一个闭包算子。

3. 闭包系统诱导的闭包算子 若 R 是 S 上的一个闭包系统，令从 2^S 到 2^S 的映射 φ 为 $\varphi(X)=\bigcap\{T\in R\mid X\subseteq T\}$(注意到这里 R 是 S 上的闭包系统，因而是 S 的子集的集合，所以这里是 $T\in R$，而不是 $T\subseteq R$)，则 φ 是 S 上的一个闭包算子，并称其为由 R 诱导的闭包算子。

证明 (1) 若 $X\subseteq Y$，则 $\{T\in R\mid X\subseteq T\}\supseteq\{T\in R\mid Y\subseteq T\}$，于是 $\bigcap\{T\in R\mid X\subseteq T\}\subseteq\bigcap\{T\in R\mid Y\subseteq T\}$，即 $\varphi(X)\subseteq\varphi(Y)$。

(2) 因为 $\{T\in R\mid X\in T\}$ 中的每个元素都是 X 的超集，所以 $\bigcap\{T\in R\mid X\subseteq T\}$ 是 X 的超集。

(3) 因为 $\{T\in R\mid X\subseteq T\}$ 中每个元素都属于 R，而 R 是闭包系统，所以 $\bigcap\{T\in R\mid X\subseteq T\}$ 是 R 中的元素，记为 Y，则 $\varphi(\varphi(X))=\varphi(Y)=\bigcap\{T\in R\mid Y\subseteq T\}$，因为 $Y\in R$，所以 $Y\in\{T\in R\mid Y\subseteq T\}$，于是 $\bigcap\{T\in R\mid X\subseteq T\}=Y$。

4. 闭包算子诱导的闭包系统 若 φ 是集合 S 上的闭包算子，则 $\{\varphi(X)\mid X\subseteq S\}$ 是 S 上的闭包系统。

证明 设 $T\subseteq\{\varphi(X)\mid X\subseteq S\}$，则由 φ 的扩展性知 $\bigcap T\subseteq\varphi(\bigcap T)$，另一方面，对任一个 $Y\in T$，显然有 $\bigcap T\subseteq Y$，于是由 φ 的单调性有

$$\varphi(\bigcap T)\subseteq\varphi(Y)\tag{1.1}$$

再由 $Y\in T\subseteq\{\varphi(X)\mid X\subseteq S\}$，所以存在 X_0，使 $Y=\varphi(X_0)$，于是 $\varphi(Y)=\varphi\varphi(X_0)=Y$，将此代入式(1.1)，得 $\varphi(\bigcap T)\subseteq Y$。由于 Y 是 T 的任一元素，所以 $\varphi(\bigcap T)\subseteq\bigcap T$。

由 $\bigcap T\subseteq\varphi(\bigcap T)$ 及 $\varphi(\bigcap T)\subseteq\bigcap T$，知 $\bigcap T=\varphi(\bigcap T)$。

然而 $\bigcap T\subseteq S$，所以 $\varphi(\bigcap T)\in\{\varphi(X)\mid X\subseteq S\}$，$\bigcap T=\varphi(\bigcap T)\in\{\varphi(x)\mid X\subseteq S\}$，所以 $\{\varphi(X)\mid X\subseteq S\}$ 是闭包系统。

5. 闭包系统诱导的完全格 若 R 是 S 的一个闭包系统，则 $(R,\subseteq)$ 是一个完全格，若 $X\subseteq R$，则 $\bigvee X=\varphi(\bigcup X)$，$\bigwedge X=\bigcap X(=\varphi(\bigcap X))$，这里 φ 是由 R 诱导的闭包算子。

证明 X 中的每个元素 A 都有 $\bigcap X\subseteq A$，所以 $\bigcap X$ 是 X 的下界。另外，若 B 是 X 的下界，则 B 是 X 中每个元素 A 的子集，所以对所有 $b\in B$ 都有 $b\in A$，所以 $b\in\bigcap X$，$\bigcap X\supseteq B$，$\bigcap X$ 是 X 的下确界。考虑集合 $\{A\in R\mid\bigcup X\subseteq A\}$，显然这是 R 中 X 的上界集合。这样 $\bigcap\{A\in R\mid\bigcup X\subseteq A\}$ 将是 R 中 X 上界的最小的元素(注意到 R 是闭包系统，所以 $\bigcap\{A\in R\mid\bigcup X\subseteq A\}\in R$)，所以由诱导的闭包算子的定义知：$\varphi(\bigcup X)=\bigcap\{A\in R\mid\bigcup X\subseteq A\}$ 是 X 的上确界。这样由 R 的任何子集都有上确界及下确界可知 $(R,\subseteq)$ 是一个完全格。

6. 完全分配格与模格 设 $(S,\leqslant)$ 是一个完全格，若对所有 $a,b,c\in S$ 都有

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$
$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

则称 $(S,\leqslant)$ 为分配格。

如果 T_1,T_2 是两个索引集，我们有

$$\bigwedge\{\bigvee\{a_{t_1,t_2}\mid t_1\in T_1\}\mid t_2\in T_2\}=\bigvee\{\bigwedge\{a_{t_1,\varphi(t_1)}\mid t_1\in T_1\}\mid\varphi:T_1\to T_2\}$$

则称 $(S,\leqslant)$ 为完全分配格。

如果 $a\leqslant c\Rightarrow a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c$，则称 $(S,\leqslant)$ 为模格。

1.4 伽罗瓦连接

本节介绍本书用到的有关“伽罗瓦连接”的理论(Barbut et al.,1970)。

1. 伽罗瓦连接 设 $(P,\leqslant)$，$(Q,\leqslant)$ 是两个半序集，$\varphi:P\to Q$，$\psi:Q\to P$ 是两个映射，满足：

(1) $p_1\leqslant p_2\Rightarrow\varphi(p_1)\geqslant\varphi(p_2)$，$q_1\leqslant q_2\Rightarrow\psi(q_1)\geqslant\psi(q_2)$；

(2) $p\leqslant\psi(\varphi(p))$，$q\leqslant\varphi(\psi(q))$；

则称这一对映射为这两个半序集之间的伽罗瓦连接。