21世纪高等教育规划教材

——学习指导与考研系列

Mathematical analysis

# 数学分析

## 学习巩固与提高

上册

◎ 孙玉泉　邢家省　李卫国　王永革　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪高等教育规划教材——学习指导与考研系列

# 数学分析学习巩固与提高

## （上 册）

孙玉泉 邢家省 李卫国 王永革 编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是为巩固和拓展《数学分析（上册）》学习而编写的，基本知识内容全面，问题具有代表性，难度适中，适用于理工科大学生的日常学习和复习巩固。本书列举了数学分析中的具有一定代表性的练习题，对典型的题目给出了详细解答或证明，并收集了一些补充、拓展类型的题目。通过反复练习和对照使用，有助于学生巩固已学的知识和理论，掌握解决基本问题的方法和手段，培养和提升分析问题、解决问题的能力，以期能熟练、灵活、创新地思考、解决更多的问题。

本书既可作为理工科大学生学习数学分析的自我训练和检测的辅导书，也可作为学业考试、参加数学竞赛、考研复习的参考书，亦可作为青年教师和数学爱好者的参考资料。

**图书在版编目（CIP）数据**

数学分析学习巩固与提高．上册/孙玉泉等编著．—北京：机械工业出版社，2011.2

21世纪高等教育规划教材——学习指导与考研系列

ISBN 978-7-111-32662-5

Ⅰ ①数… Ⅱ．①孙… Ⅲ ①数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第239682号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：张金奎　责任编辑：张金奎　孙志强

版式设计：张世琴　责任校对：姜　婷

封面设计：张　静　责任印制：乔　宇

三河市国英印务有限公司印刷

2011年3月第1版第1次印刷

169mm×239mm·14印张·272千字

标准书号：ISBN 978-7-111-32662-5

定价：24 00元

# 前　　言

数学分析（微积分）已有三百多年的历史，微积分的创立和发展是人类智慧的结晶，是对科学文明的一大贡献，是人类哲学认识上的重大突破，对科学技术的发展发挥了不可或缺的作用，现代科学技术的创新和发展仍然离不了它。

经过无数数学先哲、学者的研究、发展与广泛传播，数学分析成为了一个完整严密的知识体系，理论内容广泛，问题多种多样，方法众多，结论深刻，应用范围广阔。

数学分析是理工科大学的一门重要公共基础课，是理工科大学生必备的知识体系。这门课程的研究对象和理论、方法、知识等，对于相关专业课程的学习和开展科学研究，都是必备的基础知识。学习数学分析，能达到训练、培养高素质创新人才的目的。

数学分析几乎是理工科大学生进入大学后的第一门数学课程，出现了许多新问题、新理论和新方法，理论深度和知识增进梯度大，涉及知识面广。多数初学者在学习过程中往往会遇到一定的疑难，难以想到运用所学知识解题，难以发现并纠正错误之处，难以想到巧妙解法。学习数学分析课程，需要具备以往数学知识的扎实基础和对知识的灵活运用能力，需要牢固掌握数学分析的基本理论，并能运用于思考、解决理论和应用问题，不断提高能力。

本书专为帮助读者学习数学分析课程知识而编写，对有代表性的练习题目给出了解答，题型多样，覆盖面较全，给出了类型与数量众多的典型习题的解析，对其中一些典型习题给出了独立发现的好解法。学习数学分析课程知识最有效的方法就是上课听好课、课后复习及做习题进行练习。对本书内容，读者可通过反复多次地训练和对照使用，达到熟能生巧的目的，有助于理解概念和理论方法，掌握解决基本问题的方法和手段，提高解决问题的能力，以期能熟练灵活地解决更多的问题，取得较好的效果。

编者在本书编写过程中，受到郑志明教授和李尚志教授的学术精神和创新思想启发，并得到他们的指导和帮助。同事杨小远、薛玉梅、杨卓琴、刘明菊等提供了很大的帮助，她们对初稿内容的写作、组织和汇编付出了辛勤劳动，多次使用并提出了许多修改意见，在此基础上编者进行过多次调整和改写，特此向他们表示感谢。

数学分析的图书和题目浩如烟海，人们已积累了丰富的知识智慧体系，并不断发展更新。本书在编写过程中参考、引用了国内外众多图书中的许多资料和习题的解答，无法一一列举，在此一并致谢。

由于编者水平所限，书中不妥和错误之处在所难免，敬请读者发现并给予指正。

**编者**

**于北京航空航天大学**

# 目　录

# 第 1 章　数列极限的定义及性质

## 基本知识理论方法内容提要

本章的核心内容是数列极限的定义及性质.

要求深入理解极限定义的内涵，熟练掌握使用 $\varepsilon$-$N$ 语言证明数列极限的方法和技巧. 熟练掌握极限的四则运算法则和收敛数列的基本性质. 在证明过程中能够掌握并运用一些基本的不等式进行放缩.

**1. 几个基本不等式**

三角不等式，算术几何不等式，伯努利不等式，Cauchy 不等式.

**2. 数列极限的定义**

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

**3. 数列极限的四则运算**

设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}(c\cdot b_n)=c\cdot\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\qquad(\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0).$$

**4. 收敛数列的性质**

**唯一性**：若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其极限必唯一.

**有界性**：若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 必有界.

**保号性**：设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，若 $a>0$，则 $\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，有 $a_n>0$.

反之，若 $\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，有 $a_n\geqslant 0$，则 $a\geqslant 0$.

**保序性**：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，则 $\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，有 $a_n<b_n$.

若 $\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，有 $a_n\leqslant b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

**迫敛性**（夹逼定理）：设 $\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，有 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

**5. 子列的收敛性**

**定义**：若 $\{n_k\}$ 为 $\mathbf{N}^*$ 的无限子集，且 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，则 $\{a_{n_k}\}$ 称为数列$\{a_n\}$的子列.

关于子列的收敛性，有下面结论：

**定理 1**：收敛数列$\{a_n\}$的极限是 $a\Leftrightarrow\{a_n\}$的任何子列都收敛于 $a$.

**定理 2**：若数列$\{a_n\}$的一个子列发散或两个子列收敛于不同的极限，则$\{a_n\}$发散.

**6. 无穷小与无穷大**

（1）数列$\{a_n\}$是无穷小$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

（2）数列$\{a_n\}$是无穷大$\Leftrightarrow$数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是无穷小.

**典型例题解析**

# 第1节 几个基本的不等式

**例 1** 证明$\sqrt{2}$是无理数.

**证**：假设$\sqrt{2}$是有理数，则可记为$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$，$p$，$q$ 互素. 将该式两边平方得 $p^2=2q^2$，所以 $p^2$ 是偶数，因此 $p$ 也必须是偶数（因为奇数 $2k+1$ 平方后是 $4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$，仍旧是奇数）. 所以我们可以设 $p=2a$，代入上式得 $(2a)^2=2q^2$，即 $4a^2=2q^2$. 两边同时消掉 2，可得 $2a^2=q^2$，即 $q$ 也是偶数. 由于 $p$，$q$ 都是偶数，它们有一个公约数 2，这和我们最初假设 $p$，$q$ 互素矛盾.

**例 2** 设 $n$ 个分数$\dfrac{a_1}{b_1}$，…，$\dfrac{a_n}{b_n}$，其中 $b_1$，…，$b_n$都大于零，证明$\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}$介于这些分数的最大值和最小值之间.

**证**：不妨设$\dfrac{a_1}{b_1}$最小，$\dfrac{a_n}{b_n}$最大，则由$\dfrac{a_1}{b_1}\leqslant\dfrac{a_i}{b_i}$，$i=1$，2，…，$n$ 得

$$a_1b_i\leqslant a_ib_1,\quad i=1,2,3,\cdots,n$$

将这些不等式相加得 $a_1\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_1$，由 $b_1$，…，$b_n$都大于零得

$$\frac{a_1}{b_1}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}.$$

同理可得

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}\leqslant\frac{a_n}{b_n}.$$

**例 3**　柯西（Cauchy）不等式：设 $a_i$，$b_i$为任意的实数（$a_i$，$b_i\in\mathbf{R}$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$n$），则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right),$$

当且仅当 $b_i=ka_i$时等号成立（$k$ 为常数，$i=1$，$2$，$\cdots$，$n$）.

**证：** 构造二次函数

$$\begin{aligned}f(x)&=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2\\&=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+\\&\quad(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).\end{aligned}$$

因为$f(x)\geqslant0$ 恒成立，所以

$$\Delta=4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^n)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^n)\leqslant0,$$

即

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

当且仅当 $a_ix+b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，即$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=k$ 时等号成立.

**例 4**　算术平均—几何平均不等式：已知 $a_i\geqslant0$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$n$，$n\in\mathbf{N}$，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$时取等号.

**证：** 用归纳法.

当 $n=2$ 时，由$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geqslant0$，可得$\dfrac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}$成立. 设当 $n=k-1$ 时，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}\geqslant\sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}.$$

设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k$，$A=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$，显然有 $a_1+a_k-A\geqslant0$.

根据归纳假设

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}+(a_1+a_k-A)}{k-1}\geqslant\sqrt[k-1]{a_2a_3\cdots a_{k-1}(a_1+a_k-A)},$$

而

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}+(a_1+a_k-A)}{k-1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k-A}{k-1}=A,$$

因此

$$A\geqslant\sqrt[k-1]{a_2a_3\cdots a_{k-1}(a_1+a_k-A)},$$

$$A^{k-1}\geqslant a_2a_3\cdots a_{k-1}(a_1+a_k-A),$$
$$A^k\geqslant a_2a_3\cdots a_{k-1}(a_1+a_k-A)A.$$

因为 $$(a_1+a_k-A)A-a_1a_k=(A-a_1)(a_k-A)\geqslant 0,$$
当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_k$，$A=a_1=a_k$取等号.

由此可得 $(a_1+a_k-A)A\geqslant a_1a_k$，所以得
$$A^k\geqslant a_1a_2\cdots a_k.$$

**例 5** 伯努利（Bernoulli）不等式：$\forall x>-1$，有不等式
$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,\quad n\in\mathbf{N}.$$
当 $x\neq 0$，且 $n\geqslant 2$ 时，不等式严格成立.

**证：**（方法一）可以使用归纳法证明.

（方法二）根据上例结论，由 $1+x>0$，知
$$(1+x)^n+n-1=(1+x)^n+1+1+\cdots+1>n\sqrt[n]{(1+x)^n}=n(1+x),$$
得
$$(1+x)^n>1+nx.$$
当且仅当 $n=1$ 或 $x=0$ 时等号成立.

**注：**上述不等式在今后的学习中会经常使用，所以不仅要会证明，更重要的是要能够灵活地使用它们.

## 第 2 节　数列极限的定义

**例 1** 判断下列对 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的表述是否正确.

（1）对无穷多个 $\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，总有 $|a_n-a|<\varepsilon$；

（2）对任意给定的 $\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，总有 $|a_n-a|<\lambda\varepsilon$（$\lambda$ 为常数）；

（3）对每一个正整数 $k$，只有有限个 $a_n$位于区间$\left(a-\dfrac{1}{k},\ a+\dfrac{1}{k}\right)$之外.

**解：**该题主要考查我们对数列极限概念的理解，定义中的任意不等价于无穷多，任意比无穷多包含的范围更广，因此（1）的说法是错误的．定义中的 $\varepsilon$ 用来描述数列中的数 $a_n$和其极限 $a$ 靠近的程度，只要能表示任意小就可以．因为常数乘以 $\varepsilon$ 还是任意小，当 $k$ 任意大时，$\dfrac{1}{k}$就会任意小，因此（2），（3）正确.

用定义验证数列的极限实际上就是验证 $|a_n-a|$随 $n$ 的增大而能达到任意小，即对给定的 $\varepsilon>0$，通过求解$|a_n-a|<\varepsilon$ 来确定 $N$，使得当 $n>N$ 时不等式成立．但是很多时候不等式难以求解，我们注意到定义中强调的是 $N$ 的存在性，

因此我们可以放大寻找的范围，即将不等式放大为一个易于求解的不等式 $|a_n - a| < |f(n)|$，然后求解 $|f(n)| < \varepsilon$. 显然当新不等式成立时原不等式肯定成立. 因此，适当放大不等式是我们使用定义证明数列极限的一个重要技巧.

**例 2**　用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{3\sqrt{n}-1}=\dfrac{1}{3}$.

**证**：$\forall \varepsilon>0$，要使 $|a_n - a| = \left|\dfrac{\sqrt{n}+1}{3\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$，由

$$|a_n - a| = \left|\frac{\sqrt{n}+1}{3\sqrt{n}-1}-\frac{1}{3}\right| = \frac{4}{6\sqrt{n}+3(\sqrt{n}-1)} < \frac{4}{6\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

知，只需 $n>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$ 即可，所以当 $\forall n>N$ 时，有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{3\sqrt{n}-1}=\frac{1}{3}.$$

**例 3**　用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$.

**证**：因为

$$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}\right| = \frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}$$

$$< \frac{5n-10}{3(3n^2+2n-16)} = \frac{5(n-2)}{3(3n+8)(n-2)} = \frac{5}{3(3n+8)} < \frac{1}{n} < \varepsilon(n\geqslant 2),$$

所以 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N=\max\left\{2,\ \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}\in \mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}.$$

**例 4**　用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0$，其中 $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots 1, 2n!!=2n(2n-2)\cdots 2$.

**证**：因为

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{1\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{5}}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{\sqrt{2n-1}\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

从而 $x_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. 所以 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right|<\frac{1}{\sqrt{N}}\leqslant\varepsilon.$$

**例 5** 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

**证**：由二项式定理，有

$$2^n=(1+1)^n=1+\frac{n}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\cdots+1.$$

应用上式将 $\left|\frac{n}{2^n}-0\right|$ 放大，即将 $2^n$ 用上式中的某一项取代，将其缩小，从而将 $\frac{n}{2^n}$ 放大，然后再解不等式求出 $N$ 即可.

对于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$，用不等式 $2^n>n$，只需 $\left|\frac{1}{2^n}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

对于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$，用不等式 $2^n>\frac{n(n-1)}{2!}$，有 $\frac{n}{2^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2!}}=\frac{2!}{n-1}$，即可得.

## 第 3 节　收敛数列的性质

**例 1** 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\neq0$.

**证**：取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，$\forall N\in\mathbf{N}^*$，$\exists n_0>N$，使

$$\left|\frac{n_0}{n_0+1}\right|=\frac{n_0}{n_0+1}\geqslant\frac{n_0}{n_0+n_0}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\neq0.$$

**例 2** 证明数列 $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ 发散.

**证**：由于它的奇数子列 $\left\{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}\right\}=\{(-1)^{k-1}\}$ 发散，所以该数列发散.

**例 3** 讨论下列问题.

（1）若数列$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，$\{a_n+b_n\}$的敛散性如何？

（2）若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都发散，$\{a_n+b_n\}$和$\{a_nb_n\}$的敛散性如何？

（3）若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，$\{b_n\}$发散，$\{a_nb_n\}$的敛散性如何？

（4）若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=0$，$\{b_n\}$发散，$\{a_nb_n\}$的敛散性如何？

（5）若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=0$，$\{b_n\}$有界，$\{a_nb_n\}$的敛散性如何？

（6）若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，是否可以断言$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$？

**解**：本题主要考查我们对数列极限的四则运算的理解，注意四则运算成立的条件是两个数列均有极限，而且做分母的数列极限不能为零，而且这个条件是充分的.

（1）该数列必定发散．否则，设$\{a_n+b_n\}$收敛，则由$b_n=(a_n+b_n)-a_n$知$\{b_n\}$也收敛，这与已知矛盾.

（2）敛散性不能确定，观察反例即可.

对数列$\{a_n+b_n\}$：若$a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n+1}$，则$a_n+b_n=0$，数列$\{a_n+b_n\}$收敛；

若$a_n=b_n=n$，则$a_n+b_n=2n$，数列$\{a_n+b_n\}$发散.

对数列$\{a_nb_n\}$：若$a_n=b_n=(-1)^n$，则$a_nb_n=1$，数列$\{a_nb_n\}$收敛；

若$a_n=b_n=n$，则$a_nb_n=n^2$，数列$\{a_nb_n\}$发散.

（3）该数列必定发散.

假设数列$\{a_nb_n\}$收敛，则$\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nb_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，这与$\{b_n\}$发散矛盾.

（4）敛散性不能确定，观察反例即可.

若$a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=(-1)^n$，则$a_nb_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$，数列$\{a_nb_n\}$收敛；

若$a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=n^2$，则$a_nb_n=n$，数列$\{a_nb_n\}$发散.

（5）该数列必定收敛于 0.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当$n>N$时，有$|a_n|<\varepsilon$；

$\{b_n\}$有界$\Rightarrow\exists M>0$，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，有$|b_n|\leqslant M$.

因此，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当$n>N$时，有$|a_nb_n|\leqslant M|a_n|<M\varepsilon$.

（6）不能确定.

当$a\neq 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=1$；

当 $a=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$的值不能确定，观察反例即可.

若 $a_n=\dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$；若 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-1$.

**1. 利用四则运算求极限**

**例 4** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2+1}{2n^3+5}$.

**解：** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2+1}{2n^3+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{2+\dfrac{5}{n^3}}=\dfrac{3}{2}$.

**例 5** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}$，其中 $a>0$.

**解：** 当 $a=1$ 时，原极限值为$\dfrac{1}{2}$；

当 $a>1$ 时，由$\dfrac{1}{a}<1$ 知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{a}\right)^n}=1$；

当 $a<1$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ 知，原极限值为 0.

**例 6** 若 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p})=0$.

**证：** 由于 $a_0=-(a_1+\cdots+a_p)$，则

$$\begin{aligned}&a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}\\&=a_1(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+a_2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})+\cdots+a_p(\sqrt{n+p}-\sqrt{n})\\&=\frac{a_1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}+\frac{2a_2}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}+\cdots+\frac{pa_p}{(\sqrt{n+p}+\sqrt{n})},\end{aligned}$$

所以 原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_2}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}+\cdots+$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{pa_p}{(\sqrt{n+p}+\sqrt{n})}=0.$$

**例 7** 指出下面证明中的错误并改正.

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\sin n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$.

**解：**（1） 因为数列极限的加法运算只限于对有限个数列的和，数列

$\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$是表示 $n$ 个$\frac{1}{n}$的和，当 $n\to\infty$ 时，是无限多个$\frac{1}{n}$的和，所以不能应用数列极限的加法运算法则．正确的作法如下：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在，不能应用数列乘法的运算法则，将极限写成 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$．正确的做法如下：

由于 $|\sin x|\leqslant 1$ 为有界量，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=0$，$0\leqslant\left|\frac{\sqrt{n}}{n+1}\cdot\sin n\right|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{n+1}$，根据夹逼定理有

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sin n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)=0.$$

**例 8**　证明：若 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

**证**：已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r<1$，且 $a_n>0$．$\exists q\in(r,1)$，由极限保号性，$\exists N>0$，$\forall n\geqslant N$，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q \text{ 或 } a_{n+1}<qa_n. \qquad (*)$$

于是 $0<a_{n+1}<qa_n<q^2a_{n-1}<\cdots<q^{n-N+1}a_N$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-N+1}=0$，由夹逼定理有

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0\text{，所以}\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

**注**：这道题对保号性定理的应用，是间接的而不是直接的，式（$*$）的证明可由数列极限保号性定理的证明过程中得到.

**2. 利用夹逼定理求极限**

**例 9**　求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right]$.

**证**：因为

$$\frac{n^2(1+2+\cdots+n)}{(n^2+n)^2}<n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right]<\frac{n^2(1+2+\cdots+n)}{(n^2+1)^2},$$

将 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$代入上式，整理得

$$\frac{n}{2(n+1)}<n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right]<\frac{n^3(n+1)}{2(n^2+1)^2},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3(n+1)}{2(n^2+1)^2}=\dfrac{1}{2}$，由夹逼定理，有

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right]=\frac{1}{2}.$$

**例 10** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

**解**：当 $n>2$ 时，$n!<\underbrace{1!+2!+\cdots+(n-2)!}_{n-2}+(n-1)!+n!$

$$<(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!<2(n-1)!+n!,$$

因此$1<\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}<1+\dfrac{2}{n}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=1$.

**3. 充分利用已知数列的极限求极限**

**例 11** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=b^2$.

**证**：由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，根据收敛数列的有界性可知$\{b_n\}$有界，即 $\exists M>0$，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，有 $|b_n|\leqslant M$.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，有 $|b_n-b|<\varepsilon/(M+|b|)$.

所以对上述 $\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，有

$$|b_n^2-b^2|=|b_n+b||b_n-b|\leqslant(M+|b|)|b_n-b|<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=b^2$.

**例 12** 设 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

**证**：利用：调和平均$\leqslant$几何平均$\leqslant$算术平均，分两种情况考虑.

当 $a=0$ 时，由于 $$0<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

则根据夹逼定理有

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a=0,$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a=0.$$

当 $a\neq0$ 时，由于$\dfrac{n}{1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_n}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[1\Big/\left(\frac{1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_n}{n}\right)\right]=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

利用该结论可以方便地证明：