国内名校骨干教师

2012

百题大过关

吃透百题闯三关 * 事半功倍定过关

中考数学

第三关

压轴题

曾大洋　林顺民◎主编

华东师范大学出版社

2012 百题大过关

中考数学

第三关 压轴题

主 编：曾大洋 林顺民

编写者：

曾大洋 林顺民 黄世民 杨进南

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考数学百题大过关.第三关.压轴题/曾大洋，林顺民主编.—上海:华东师范大学出版社，2011.2
(百题大过关)
ISBN 978-7-5617-8434-1

Ⅰ.①中…　Ⅱ.①曾…②林…　Ⅲ.①数学课—初中—习题—升学参考资料　Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 027387 号

中考数学百题大过关

第三关　压轴题

主　　编　曾大洋　林顺民
项目编辑　舒　刊
审读编辑　石　岩
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　宜兴德胜印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　11.75
字　　数　299 千字
版　　次　2011 年 5 月第一版
印　　次　2011 年 5 月第一次
印　　数　16000
书　　号　ISBN 978-7-5617-8434-1/G·4963
定　　价　22.00 元

出 版 人　朱杰人

丛书前言

图书市场上有关小升初及中、高考的复习用书不胜其多，不少书的训练题或失之偏少，或庞杂无度。同时选择几种作参考，往往重复不少，空白依旧甚多，费时费钱还未必能完全过关。怎样在有限的时间里得到充分而有效的训练？怎样使训练达到量与质的最完美匹配？依据对小学毕业班、初三和高三优秀教师的调研，总结出“百题过关”的复习理念。为此，我们邀请经验丰富的教师担任作者，每本书或每个考点精心设计一百道互不重复且具有一定梯度的训练题，以求用最快的速度，帮助学生完全过关。

丛书共 26 种，涵盖小升初及中、高考语文、数学、英语的全部题型。

丛书具有四大特点：

一、丰富性。丛书涉及的内容囊括了小升初及中、高考所有知识点，覆盖面广，内容丰富。

二、层次性。题目排列杜绝杂乱无章和随意性，一般分为三个层次：第一，精选历年来的相关考题；第二，难度稍小的训练题；第三，难度稍大的训练题。这样编排既能让读者了解近年来小升初及中、高考的命题特点及其走向，又能得到渐次加深的足够量的训练。

三、指导性。为了方便使用本丛书的老师和同学，对有一定难度的题目，丛书不仅提供参考答案，还力求作最为详尽的解说，目的在于让读者知其然，更知其所以然。同学们有了这套书，就等于请回了随时可以请教的老师。

四、权威性。丛书的编写者都是国内名校骨干教师，有些还是参加国家教育部“名师工程”的著名特级教师，在各地享有盛名。他们丰富的教学实践经验和深厚的理论修养，为本丛书在同类书中胜人一筹打下扎实基础。

愿这套高质量的丛书能帮助考生顺利闯过小升初及中、高考大关，也愿考生以小升初及中、高考为新起点，步入美好的未来。

华东师范大学出版社教辅分社

目录

专题一　实验操作类试题

命题特点与趋势

在近几年的中考压轴题中，数学实验操作类试题的命制往往是以几何图形为背景，通过折叠与翻转、剪切与拼图、平移与旋转构造出新图形，从图形的形状和位置的变化中去探求函数、方程、全等、相似、解直角三角形等知识间的内在联系. 实验操作类试题是近几年来中考数学试卷中出现的一种新题型，随着新课程改革的不断深入，实验操作类试题作为考查学生分析、解决问题能力以及创新意识的良好载体，已逐渐成为中考的热点题型之一.

解题要领

实验操作类试题的题干分为动手操作和问题探究两部分，需要通过操作、观察、猜想、证明、计算等数学活动来完成解题. 解决的过程要综合用到数形结合、函数与方程、运动变化、特殊与一般等数学思想，通过分类讨论、相似与全等、函数建模等方法实现问题的解决. 下面列举范题说明此类问题的解题策略.

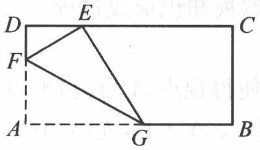
一、折叠与翻转

图形的折叠与翻转实际上就是全等变换，其实质就是轴对称. 折叠、翻转型试题通常以矩形、正方形、梯形、圆为载体. 其解题关键为：分清折叠前后哪些量变了、哪些量没有变，折叠后又有哪些条件可以利用.

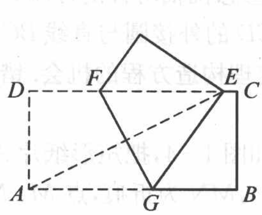
001　已知矩形纸片 $ABCD$，$AB=2$，$AD=1$，将纸片折叠，使顶点 A 与边 CD 上的点 E 重合.

(1) 如果折痕 FG 分别与 AD、AB 交于点 F、G（如图 1－1），$AF=\frac{2}{3}$，求 DE 的长；

(2) 如果折痕 FG 分别与 CD、AB 交于点 F、G（如图 1－2），$\triangle AED$ 的外接圆与直线 BC 相切，求折痕 FG 的长.



（图 1－1）



（图 1－2）

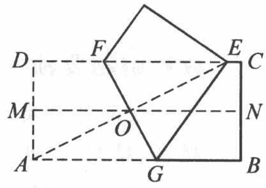
【命题意图】试题以矩形为载体，借助折叠变换考查轴对称的性质、勾股定理、直线与圆相切的性质等知识以及运用数形结合、化归思想分析问题、解决问题的能力.

【答题要旨】问题(1)为基本题,答题的关键是理解轴对称的性质;问题(2)为提高部分,解题的关键是利用中点构造中位线,利用勾股定理构造方程求出 DE. 因此,利用 $90°$的圆周角所对的弦是直径是问题(2)的突破口. 而当直线 BC 与圆相切时,圆心 O 到直线 BC 之距等于 $\triangle AED$ 的外接圆的半径长,利用这一特殊性质并运用勾股定理构造方程是解答本题的核心思想.

【满分解答】

解:(1) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $AD=1$, $AF=\frac{2}{3}$, $\angle D=90°$. 根据轴对称的性质,得 $EF=AF=\frac{2}{3}$, $\therefore DF=AD-AF=\frac{1}{3}$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中, $DE=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

(2) 如图 1-3,设 AE 与 FG 的交点为 O,根据轴对称的性质,得 $AO=EO$,取 AD 的中点 M,连结 MO,则 $MO=\frac{1}{2}DE$, $MO\parallel DC$,设 $DE=x$,则 $MO=\frac{1}{2}x$,在矩形 $ABCD$ 中, $\angle C=\angle D=90°$, $\therefore AE$为$\triangle AED$ 的外接圆的直径,O 为圆心.



(图 1-3)

延长 MO 交 BC 于点 N,则 $MN\parallel CD$, $\therefore \angle CNM=180°-\angle C=90°$. $\therefore ON\perp BC$,四边形 $MNCD$ 是矩形.

$\therefore MN=CD=AB=2$, $\therefore ON=MN-MO=2-\frac{1}{2}x$, $\because \triangle AED$ 的外接圆与 BC 相切, $\therefore ON$ 是$\triangle AED$ 的外接圆的半径, $\therefore OE=ON=2-\frac{1}{2}x$, $AE=2ON=4-x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中, $AD^2+DE^2=AE^2$, $\therefore 1^2+x^2=(4-x)^2$.

解这个方程,得 $x=\frac{15}{8}$, $\therefore DE=\frac{15}{8}$, $OE=2-\frac{1}{2}x=\frac{17}{16}$.

根据轴对称的性质,得 $AE\perp FG$, $\therefore \angle FOE=\angle D=90°$.

又$\because \angle FEO=\angle AED$, $\therefore \triangle FEO\backsim\triangle AED$, $\therefore \frac{FO}{AD}=\frac{OE}{DE}$, $\therefore FO=\frac{OE}{DE}\cdot AD$.

可得 $FO=\frac{17}{30}$, 又 $AB\parallel CD$, $\therefore \angle EFO=\angle AGO$, $\angle FEO=\angle GAO$, $\therefore \triangle FEO\cong\triangle GAO$, $\therefore FO=GO$, $\therefore FG=2FO=\frac{17}{15}$, $\therefore$ 折痕 FG 的长是$\frac{17}{15}$.

【易错分析】①忽视轴对称的性质,不懂利用 $OA=OE$ 和线段 AD 的中点构造三角形的中位线;②当$\triangle AED$ 的外接圆与直线 BC 相切时,ON 是$\triangle AED$ 的外接圆的半径被忽视,并导致错失利用勾股定理构造方程的机会. 错误的根源是忽视知识形成过程.

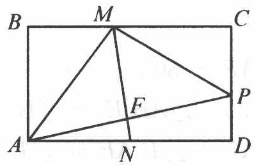
【变式训练】

001 已知:如图 1-4,把矩形纸片 $ABCD$ 折叠,使得顶点 A 与边 DC 上的动点 P 重合(P 不与点 D、C 重合),MN 为折痕,点 M、N 分别在边 BC、AD 上,连结 AP、MP、AM, AP 与 MN 相交于点 F. $\odot O$过点 M、C、P.

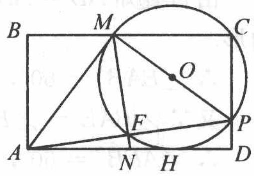
(1) 请你在图 1-4 中作出$\odot O$(不写作法,保留作图痕迹);

(2) $\frac{AF}{AN}$与$\frac{AP}{AD}$是否相等? 请你说明理由;

(3) 如图 1 - 5，随着点 P 的运动，若⊙O 与 AM 相切于点 M 时，⊙O 又与 AD 相切于点 H. 设 AB 为 4，请你通过计算求出此时⊙O 的直径 MP.



(图 1 - 4)



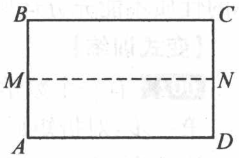
(图 1 - 5)

002 取一张矩形的纸片进行折叠，具体操作过程如下：

第一步：先把矩形 $ABCD$ 对折，折痕为 MN，如图 2 - 1；

第二步：再把 B 点叠在折痕线 MN 上，折痕为 AE，点 B 在 MN 上的对应点为 B'，得 Rt△$AB'E$，如图 2 - 2；

第三步：沿 EB' 线折叠得折痕 EF，如图 2 - 3.

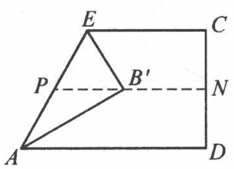


(图 2 - 1)

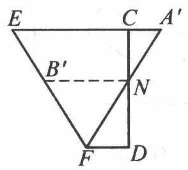
利用展开图 2 - 4 探究：

(1) △AEF 是什么三角形？证明你的结论；

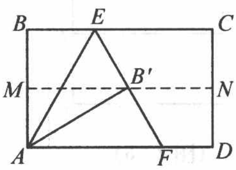
(2) 若矩形的边长为 a 和 b ($a<b$)，则 a 和 b 满足什么关系时上述折叠能折出(1)中那种三角形？



(图 2 - 2)



(图 2 - 3)



(图 2 - 4)

【命题意图】 试题源于教材，以同学熟悉的矩形为背景，借助折叠变换考查轴对称的性质，探究三角形的形状以及折出等边三角形时矩形的边长 a 和 b 应满足的条件. 试题层层推进，重点考查动手操作能力及分析问题、解决问题的能力，培养探究精神.

【答题要旨】 一般说来，折叠中，角、边都是不变的，所以轴对称图形也意味着大量等量关系，因此要利用这些来获得线段之间的比例关系. 问题(1)为基本题，但也是解答问题(2)的关键. 事实上，利用△AEF 是等边三角形，然后推出当 $AD \geqslant AF$ 时刚好能折出等边三角形是解答问题(3)的关键.

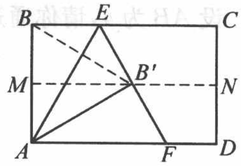
【满分解答】

解：(1) △AEF 是等边三角形.

证明：如图 2－5，连结 BB'.

$\because MN$ 垂直平分 AB，$\therefore B'B=B'A$.

由折叠知 $AB=AB'$，$\therefore AB=B'B=B'A$，$\therefore \triangle ABB'$ 为等边三角形.



（图 2－5）

$\therefore \angle BAB'=60°$，$\therefore \angle B'AF=30°$.

又 $\because \angle BAE=\angle B'AE=30°$，$\angle AB'E=\angle B=90°$.

$\therefore \angle AFB'=60°$，$\therefore \angle B'AF+\angle B'AE=\angle EAF=60°$.

$\therefore \angle AEF=60°$，$\therefore \angle AFB'=\angle EAF=\angle AEF=60°$.

$\therefore \triangle AEF$ 为等边三角形；

(2) 要在矩形纸片 $ABCD$ 上折出等边 $\triangle AEF$，则 $AD\geqslant AF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFB'$ 中，$AB=B'A=a$，$\angle B'AF=30°$.

$\therefore AF=\dfrac{a}{\cos 30°}$，$\therefore b\geqslant\dfrac{a}{\cos 30°}$，$\therefore a\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$.

$\therefore$ 当 $a\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$ 时，在矩形纸片上能折出这样的等边 $\triangle AEF$.

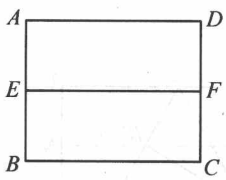
【易错分析】①不会利用 MN 为线段 AB 的垂直平分线的性质得到 $B'B=B'A$；②轴对称的性质不能充分运用；③对折叠的过程分析不透彻，找不到能折出等边三角形的条件.

【变式训练】

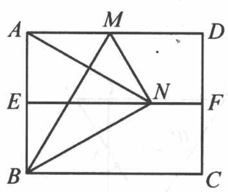
002 有一个数学活动，其具体操作过程是：

第一步：对折矩形纸片 $ABCD$，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF，把纸片展开（如图 2－6）；

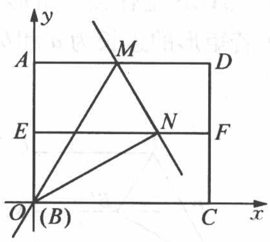
第二步：再一次折叠纸片，使点 A 落在直线 EF 上，并使折痕经过点 B，得到折痕 BM，同时得到线段 BN（如图 2－7）.



（图 2－6）



（图 2－7）



（图 2－8）

请解答以下问题：

(1) 如图 2－7，连结 AN，则 $\triangle ABN$ 是什么三角形？请证明你的结论；

(2) 设矩形 $ABCD$ 的边 $AB=2$，并建立如图 2－8 所示的直角坐标系. 求直线 MN 的函数解析式；

(3) 在(2)的基础上，设点 C 的坐标为 $(a,0)$，若直线 MN 与线段 CD 恰好有一个交点，请你求出符合条件的 a 的取值范围.

二、剪切与拼图

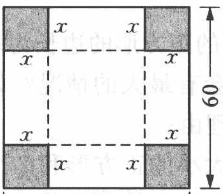
剪切与拼图型试题往往直接考查实际操作能力，就是在原来图形的基础上通过剪切后重新拼合成符合条件的新图形. 这类题大多联系生活实际，内容开放，需要进行多方面、多角度、多层次探索，能检验思维的灵活性、发散性和创新性.

003 用一块边长为 60 cm 的正方形薄钢片制作一个长方体盒子：

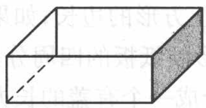
(1) 如果要做成一个没有盖的长方体盒子，可先在薄钢片的四个角上截去四个相同的小正方形(如图 3-1)，然后把四边折合起来(如图 3-2).

① 求做成的盒子底面积 $y(\text{cm}^2)$ 与截去小正方形边长 $x(\text{cm})$ 之间的函数关系式；

② 当做成的盒子的底面积为 900 cm^2 时，试求该盒子的容积.



(图 3-1)



(图 3-2)

(2) 如果要做成一个有盖的长方体盒子，其制作方案要求同时符合下列两个条件：

① 必须在薄钢片的四个角上各截去一个四边形(其余部分不能裁截)；

② 折合后薄钢片既无空隙又不重叠地围成各盒面.

请你画出符合上述制作方案的一种草图(不必说明画法与根据)；并求当表面积为 2800 cm^2时，该盒子的高.

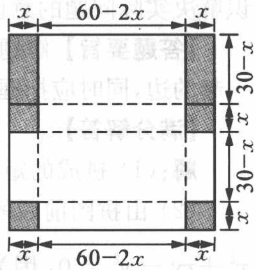
【命题意图】试题以身边的题材为背景，重点考查方程应用能力及动手操作能力. 试题立意新，构思巧妙，突出学数学、用数学的课改理念. 同时，试题有力地促进数学教学由重视解题训练转向重视理论联系实际.

【答题要旨】解题思路“实际问题——数学问题——求解”. 问题(1)的解题关键是用含 x 的代数式表示底面的边长，然后利用面积公式求出 y 与 x 的函数关系式；问题(2)是本题的难点，解题的关键是准确把握长方体盒子的对称性设元并列出方程. 经分析，问题(2)所截去的四个四边形中必有 2 个同样形状、同样大小的矩形和 2 个同样形状、同样大小的正方形，且当正方形的边长为 x 时，矩形的两边分别为 x 和 30，把握这个特征，于是问题轻松求解.

【满分解答】

解：(1) ①由题意得：盒子底面的边长为 $(60-2x)$，所以 $y=(60-2x)^2$. ②当 $y=900$ 时，即 $(60-2x)^2=900$，解得 $x_1=15$，$x_2=45$，但当 $x=45$ 时，$60-2x=-30$，所以 $x=45$ 不符合题意，舍去. 所以当 $y=900$ 时，小正方形边长为 $x=15$，此时盒子的容积 $=900\times15=13\,500(\text{cm}^3)$；

(2) 由题意得，截去的四个四边形的各边如图 3-3 所示.



(图 3-3)

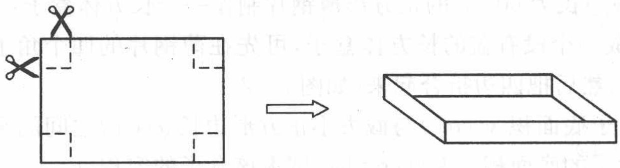
$\therefore 60^2-2x^2-2\times30x=2800$，整理得：$x^2+30x-400=0$，解得：$x_1=10$，$x_2=-40$ (不合题意，舍去). $\therefore x=10$.

答：当表面积为 2800 cm^2 时，该盒子的高为 10 cm.

【易错分析】 草图各边比例不规范，各边必要的标注欠缺；表面积概念不清，导致不能准确找到等量关系.

【变式训练】

003 探索研究：如图 3－4，把一张长 10 cm，宽 8 cm 的矩形硬纸板的四周各剪去一个同样大小的正方形，再折合成一个无盖的长方体盒子(纸板的厚度忽略不计).



(图 3－4)

(1) 要使长方体盒子的底面积为 48 cm^2，那么剪去的正方形的边长为多少？

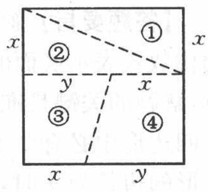
(2) 你感到折合而成的长方体盒子的侧面积会不会有最大的情况？如果有，请你求出最大值和此时剪去的正方形的边长；如果没有，请你说明理由；

(3) 如果把矩形硬纸板的四周分别剪去 2 个同样大小的正方形和 2 个同样形状、同样大小的矩形，然后折合成一个有盖的长方体盒子，当长方体的高等于所剪去的正方形的边长时，是否有侧面积最大的情况？如果有，请你求出最大值和此时剪去的正方形的边长；如果没有，请你说明理由.

004 如图 4－1，将正方形沿图中虚线(其中 $x<y$)剪成①②③④四块图形，用这四块图形恰能拼成一个矩形(非正方形).

(1) 请画出拼成矩形的简图；

(2) 求 $\frac{x}{y}$ 的值.



(图 4－1)

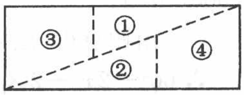
【命题意图】 试题源于教材中的课题学习，可发展同学应用数学知识解决实际问题的意识和能力.

【答题要旨】 解题关键是观察图 4－1 中的 4 块图形各边之间的对应关系，找出能拼接在一起的边，同时应把握拼图变换过程中“面积不变”这一特征，找出 x、y 之间的等量关系.

【满分解答】

解：(1) 拼成的矩形如图 4－2 所示；

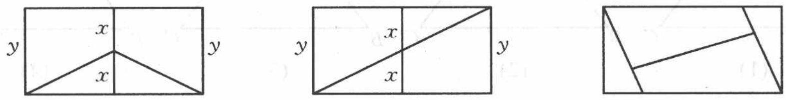
(2) 由拼图前后的面积相等得：$[(x+y)+y]y=(x+y)^2$，即 $x^2+xy-y^2=0$，因为 $y\neq0$，所以 $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}-1=0$，解得：$\frac{x}{y}=$



(图 4－2)

$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$(舍去).

【易错分析】拼图的三种典型错误(如图 4－3)



(图 4－3)

出现以上错误的原因是对拼图的基本常识没有掌握,不能把握拼图变换过程中“面积不变”这一特征.

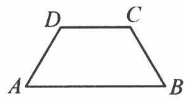
【变式训练】

004 如图 4－4,四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,$AB \parallel DC$,由 4 个这样的等腰梯形可以拼出图 4－5 所示的平行四边形.

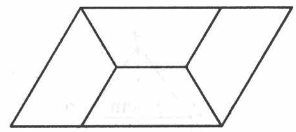
(1) 求四边形 $ABCD$ 四个内角的度数;

(2) 试探究四边形 $ABCD$ 四条边之间存在的等量关系,并说明理由;

(3) 现有图 4－4 中的等腰梯形若干个,利用它们你能拼出一个菱形吗?若能,请你画出大致示意图.

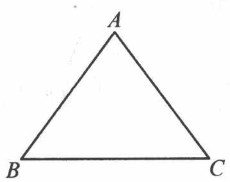


(图 4－4)

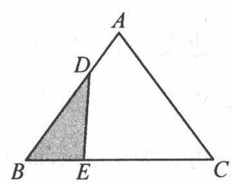


(图 4－5)

005 如图 5－1,△ABC 是一块等腰三角形的废铁料,已知 BC 的长为 60 cm,BC 边上的高为 40 cm,用它截一块一条边长为 30 cm 的矩形(要求:使矩形的一边与△ABC 的 BC 或 AB 边重合,而矩形的另两个顶点分别在△ABC 的另两边上).

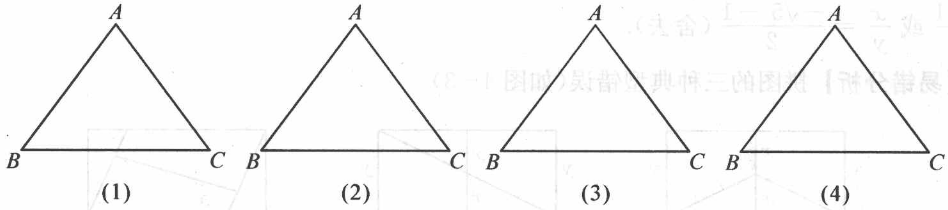


(图 5－1)



(图 5－2)

(1) 问一共有几种不同的截法?请在样图中分别画出所有截法的示意图,并标明 30 cm 的那条边;



(图 5－3)

(2) 试求出：以上你所画的各种截法中，所截得矩形的另一边长；

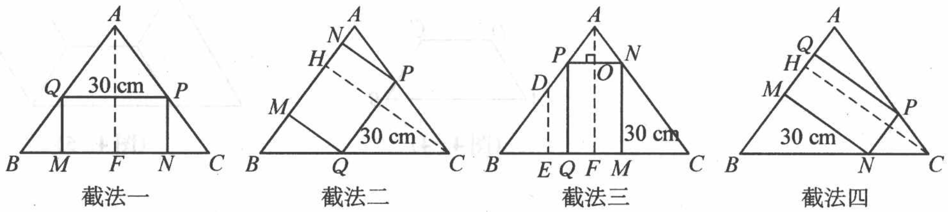
(3) 如果铁片受到损坏，如图 5－2，量得 EC 的长为 41 cm，AD 的长为 15 cm，问：你还能截得符合要求的矩形吗？如果能，请求出它的面积；如果不能，请说明理由.

【命题意图】 此题不仅考查了以相似三角形为中心的知识拓展，而且开放性的设计更加深刻地考查了化归转化、分类讨论等数学思想方法及数学建模能力，极富操作性和思考性.

【答题要旨】 试题的解题关键是构造相似三角形并利用相似三角形的性质解决相关问题；试题的得分关键是运用分类思想对相关问题进行必要的讨论.

【满分解答】

解：(1) 因为矩形的一条边长是 30 cm，而另一条边长是不确定的，因而这样矩形的截法有不同的四种，如图 5－4 所示；



(图 5－4)

(2) 先对△ABC 作一个剖析：

① 在△ABC 中，$AB = AC$，$BC = 60$ cm，作 $AF \perp BC$ 于 F，则有 $BF = CF = 30$ cm，$AF = 40$ cm，易知：$AB = AC = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$(cm)；

② 再作 $CH \perp AB$ 于 H，由 $AF \cdot BC = CH \cdot AB$，得 $CH = 48$ cm.

在截法一中，设 $PN = x$ cm，由 $PQ \parallel BC$ 得：$\dfrac{40 - x}{40} = \dfrac{30}{60}$，解得 $x = 20$ cm，即所截得的矩形 $MNPQ$ 的另一边长为 20 cm，即 $PN = 20$ cm.

在截法二中，设 $PN = y$ cm，由 $PQ \parallel AB$ 得：$\dfrac{48 - y}{48} = \dfrac{30}{50}$，解得 $y = 19.2$ cm，即所截得的矩形 $MNPQ$ 的另一边长为 19.2 cm，即 $PN = 19.2$ cm.

在截法三中，设 $PN = z$ cm，由 $PN \parallel BC$ 得：$\dfrac{z}{60} = \dfrac{40 - 30}{40}$，解得 $z = 15$ cm，即所截得的矩形 $MNPQ$ 的另一边长为 15 cm，即 $PN = 15$ cm.

在截法四中，设 $PN = k$ cm，由 $PN \parallel AB$ 得：$\dfrac{k}{50} = \dfrac{48 - 30}{48}$，解得 $k = 18.75$ cm，即所截得的矩形 $MNPQ$ 的另一边长为 18.75 cm，即 $PN = 18.75$ cm；

(3) 若铁片受损，使得 $AD = 15$ cm，$EC = 41$ cm；但仍有第三种截法可以截得符合要求的

矩形；

① 在原截法一中，$\because CM = 45$ cm，$EC = 41$ cm，$\therefore CM > EC$，因而无法截取；

② 在原截法二中：由相似性质 $\frac{AP}{50} = \frac{19.2}{48}$，求得 $AP = 20$，再由勾股定理求得 $AN = \sqrt{20^2 - 19.2^2} = 5.6$，$AM = AN + MN = 35.6 > AD$，因而无法截取；

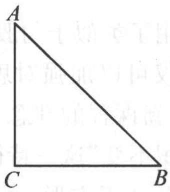
③ 在原截法四中：作 $CH \perp AB$ 于 H，$BH = \sqrt{60^2 - 48^2} = 36$，由 $\frac{BM}{36} = \frac{30}{48}$，求得 $BM = 22.5$，而 $BD = 50 - 15 = 35$，$\therefore BM < BD$，因而无法截取；

④ 在原截法三中，作 $AF \perp BC$ 于 F，交 PN 于 O，$\because PN = 15$ cm，根据对称性：$OP = ON = FQ = FM = \frac{15}{2}$ cm，在 $\text{Rt}\triangle AOP$ 中，$\therefore AP = \sqrt{10^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{25}{2}$ cm，因而 $AP = 12.5$ cm $< AD = 15$ cm，且有 $CQ = CF + FQ = 37.5$ cm $< CE = 41$ cm，故截法三仍可以截得符合要求的矩形 $MNPQ$，其面积为 $30 \times 15 = 450$ cm^2.

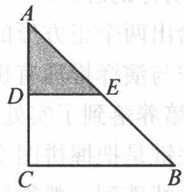
【易错分析】 问题(1)中截法一、三容易理解和猜想，而截法二、四的构图是建立在 $\angle BAC$ 是锐角的前提下，不易理解；问题(3)运用分类讨论时书写格式不规范或不完整，不能抓住问题的实质作答，错误的原因是用简单的模仿代替必要的理解.

【变式训练】

005′ 在一服装厂里有大量形状为等腰直角三角形的边角布料(如图 5－5). 找出其中的一种，测得 $\angle C = 90°$，$AC = BC = 40$ cm，今要从这种三角形中剪出一种扇形，做成不同形状的玩具，使扇形的边缘半径恰好都在 $\triangle ABC$ 的边上，且扇形的弧与 $\triangle ABC$ 的其他边相切.

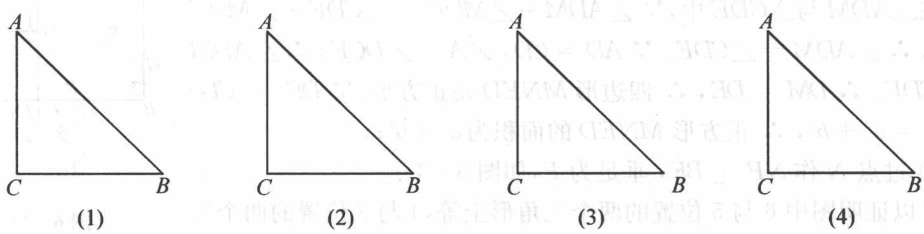


(图 5－5)



(图 5－6)

(1) 请在图 5－7 中设计出所有符合题意的方案示意图，并求出扇形的半径(只要求画出图形，并直接写出扇形半径)



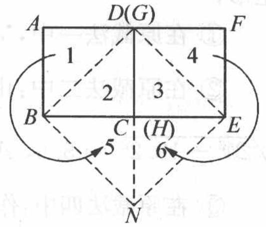
(图 5－7)

(2) 如果边角布料受到损坏，如图 5－6 所示，测得 $DE \parallel BC$，AD 的长为 20 cm，问：你还能截得符合要求的扇形吗？如果能，请求出它的面积；如果不能，请简要说明理由.

006

操作示例：

对于边长为a的两个正方形$ABCD$和$EFGH$，按图6-1所示的方式摆放，在沿虚线BD、EG剪开后，可以按图中所示的移动方式拼接为图6-1中的四边形$BNED$.



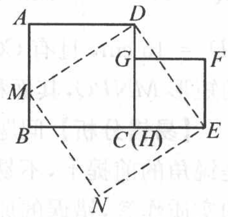
(图6-1)

从拼接的过程中容易得到结论：

①四边形$BNED$是正方形；②$S_{正方形ABCD}+S_{正方形EFGH}=S_{正方形BNED}$.

实践与探究：

(1) 对于边长分别为a、b $(a>b)$的两个正方形$ABCD$和$EFGH$，按图6-2所示的方式摆放，连结DE，过点D作$DM\perp DE$，交AB于点M，过点M作$MN\perp DM$，过点E作$EN\perp DE$，MN与EN相交于点N.



(图6-2)

① 证明四边形$MNED$是正方形，并用含a、b的代数式表示正方形$MNED$的面积；

② 在图6-2中，将正方形$ABCD$和正方形$EFGH$沿虚线剪开后，能够拼接为正方形$MNED$，请简略说明你的拼接方法(类比图6-1，用数字表示对应的图形).

(2) 对于n(n是大于2的自然数)个任意的正方形，能否通过若干次拼接，将其拼接成为一个正方形？请简要说明你的理由.

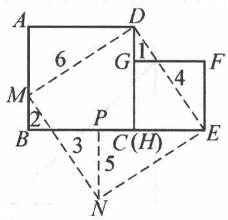
【命题意图】试题给出两个正方形的组合图形，采用了类似于勾股定理探究时使用的图形割补拼接法，将动手操作与演绎推理有机结合. 该题不仅可以加强对思维能力的培养，而且使创新教育和实践能力的培养落到了实处，充分地体现了新课程的理念.

【答题要旨】解题关键是把握拼图变换过程中"面积不变"这一特征，围绕着构造全等三角形进行割补拼接，最后从特殊到一般得到结论：任意的两个正方形，按照一定的条件通过若干次拼接，均能拼接成为一个正方形.

【满分解答】

解：(1) ① 证明：由作图的过程可知四边形$MNED$是矩形.

在$\triangle ADM$与$\triangle CDE$中，$\because \angle ADM+\angle MDC=\angle CDE+\angle MDC=90^\circ$，$\therefore \angle ADM=\angle CDE$. $\because AD=CD$，$\angle A=\angle DCE$，$\therefore \triangle ADM\cong\triangle CDE$. $\therefore DM=DE$，$\therefore$ 四边形$MNED$是正方形. $\because DE^2=CD^2+CE^2=a^2+b^2$，$\therefore$ 正方形$MNED$的面积为a^2+b^2；



(图6-3)

② 过点N作$NP\perp BE$，垂足为P，如图6-3.

可以证明图中6与5位置的两个三角形全等，4与3位置的两个三角形全等，2与1位置的两个三角形也全等. 所以将6放到5的位置，4放到3的位置，2放到1的位置，恰好拼接为正方形$MNED$；

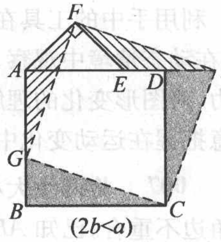
(2) 答：能.

理由是：由上述的拼接过程可以看出：对于任意的两个正方形都可以拼接为一个正方形，而拼接出的这个正方形可以与第三个正方形再拼接为一个正方形……依此类推. 由此可知：对于n个任意的正方形，可以通过$(n-1)$次拼接，得到一个正方形.

【易错分析】错误的原因是对割补拼接拼图的基本常识没有掌握，不能构造全等三角形进行割补拼接，演绎推理能力有待提高.

【变式训练】

006 在图 6-4 至图 6-8 中，正方形 $ABCD$ 的边长为 a，等腰直角三角形 FAE 的斜边 $AE=2b$，且边 AD 和 AE 在同一直线上.



$(2b<a)$

（图 6-4）

操作示例：

当 $2b<a$ 时，如图 6-4，在 BA 上选取点 G，使 $BG=b$，连结 FG 和 CG，裁掉 $\triangle FAG$ 和 $\triangle CGB$ 并分别拼接到 $\triangle FEH$ 和 $\triangle CHD$ 的位置构成四边形 $FGCH$.

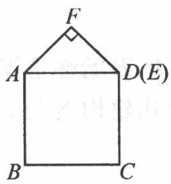
思考发现：

小明在操作后发现：从剪拼方法易知 EH 与 AD 在同一直线上，且 $\triangle FAG\cong\triangle FEH$，$\therefore AG=EH$. 过点 F 作 $FM\perp AE$ 于点 M（图略），则 $AM=ME=b$，$\therefore MD=a-b$，又 $EH=AG=a-b$，$\therefore MD=EH$，则 $DH=ME=BG$，故将 $\triangle CGB$ 拼接到 $\triangle CHD$ 的位置时，点 G 与点 H 重合. 这样，对于剪拼得到的四边形 $FGCH$（如图 6-4），利用 SAS 公理可判断 $\triangle HFM\cong\triangle CHD$，易得 $FH=HC=GC=FG$，$\angle FHC=90°$. 进而根据正方形的判定方法，可以判断出四边形 $FGCH$ 是正方形.

实践探究：

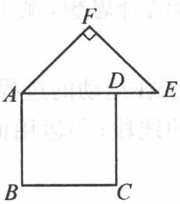
(1) 正方形 $FGCH$ 的面积是________；（用含 a，b 的式子表示）

(2) 类比图 6-4 的剪拼方法，请你就图 6-5 至图 6-7 的三种情形分别画出剪拼成一个新正方形的示意图.



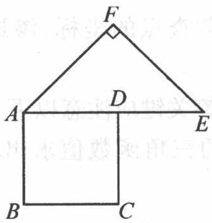
$(2b=a)$

（图 6-5）



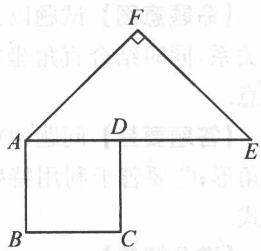
$(a<2b<2a)$

（图 6-6）



$(b=a)$

（图 6-7）



$(b>a)$

（图 6-8）

联想拓展：

小明通过探究后发现：当 $b\leqslant a$ 时，此类图形都能剪拼成正方形，且所选取的点 G 的位置在 BA 方向上随着 b 的增大不断上移. 当 $b>a$ 时，如图 6-8 的图形能否剪拼成一个正方形？若能，请你在图中画出剪拼的示意图；若不能，简要说明理由.

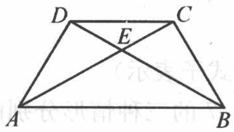
三、平移与旋转

利用手中的工具在给定的图形中进行平移与旋转操作，通过操作创设某一规则的动态情境，在动态情境中观察、分析、猜想、探索结论并进行论证. 平移与旋转问题重点考查动手操作能力、对图形变化的理解能力和空间想象能力. 其解题关键为：无论是平移还是旋转，解题时应注意把握在运动变化中哪些量在变化，哪些量不变.

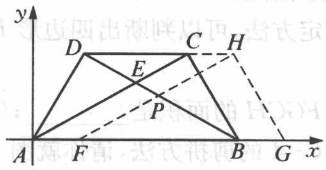
007 将两块大小一样含 30° 角的直角三角板，叠放在一起，使得它们的斜边 AB 重合，直角边不重合，已知 $AB=8$，$BC=AD=4$，AC 与 BD 相交于点 E，连结 CD.

(1) 填空：如图 7-1，$AC=$________，$BD=$________；四边形 $ABCD$ 是______梯形.

(2) 如图 7-2，若以 AB 所在直线为 x 轴，过点 A 垂直于 AB 的直线为 y 轴建立如图 7-2 的平面直角坐标系，保持 $\triangle ABD$ 不动，将 $\triangle ABC$ 向 x 轴的正方向平移到 $\triangle FGH$ 的位置，FH 与 BD 相交于点 P，设 $AF=t$，$\triangle FBP$ 的面积为 S，求 S 与 t 之间的函数关系式，并写出 t 的取值范围.



(图 7-1)



(图 7-2)

【命题意图】 试题以三角板按照指定的条件运动为背景，探究运动过程中某些几何量之间的关系，同时结合直角坐标系考查点的坐标，渗透数形结合思想，赋予传统的探究性问题以新意.

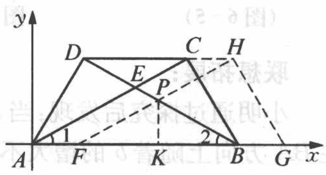
【答题要旨】 问题(2)的解答关键应注意以下三点：①在运动的过程中，$\triangle PFB$ 始终是等腰三角形；②要善于利用特殊角的三角函数值求出相关的线段；③运用面积公式建构 S 与 t 的等式.

【满分解答】

解：(1) $4\sqrt{3}$，$4\sqrt{3}$，等腰；

(2) 如图 7-3，由题意知，$FP\parallel AE$，$\therefore \angle 1=\angle PFB$，又 $\because \angle 1=\angle 2=30^\circ$，$\therefore \angle PFB=\angle 2=30^\circ$，$\therefore FP=BP$.

过点 P 作 $PK\perp FB$ 于点 K，则 $FK=BK=\dfrac{1}{2}FB$.



(图 7-3)

$\because AF=t$，$AB=8$，$\therefore FB=8-t$，$BK=\dfrac{1}{2}(8-t)$.

在 Rt$\triangle BPK$ 中，$PK=BK\cdot\tan\angle 2=\dfrac{1}{2}(8-t)\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(8-t)$.

$\therefore$ $\triangle FBP$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot FB\cdot PK=\dfrac{1}{2}\cdot(8-t)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}(8-t)$.

$\therefore$ S 与 t 之间的函数关系式为：

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{12}(t-8)^2$，或 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{12}t^2-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}t+\dfrac{16}{3}\sqrt{3}$.