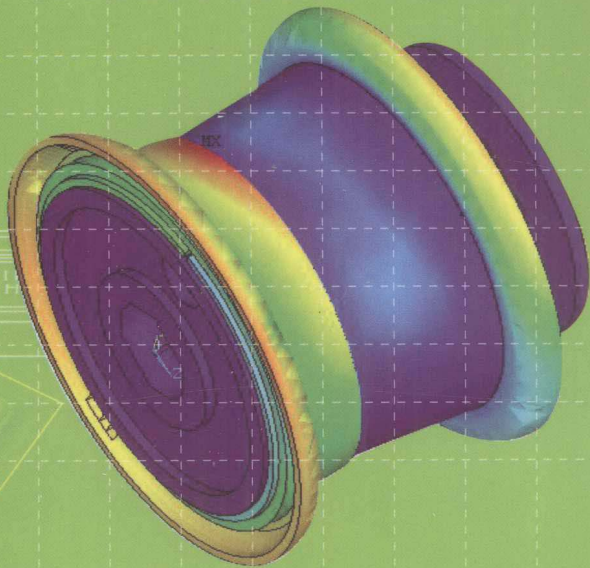
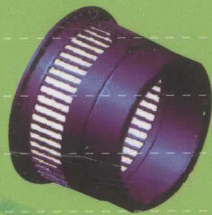


普通高等院校“十二五”规划教材



机械结构 有限元分析

—ANSYS与ANSYS Workbench工程应用



宋志安 于涛 李红

- ※ 全面、系统地讲解ANSYS 12.0结构分析的思路、操作方法和技巧。
- ※ 本书既有理论，又有ANSYS具体操作，能满足学生从面上理解有限元基本理论和满足上机实战需要。
- ※ 介绍ANSYS公司开发新一代的CAE应用及开发平台——ANSYS Workbench的工程应用。
- ※ 配套光盘汇集教学培训和企业一线的经典案例，同时包含教学课件。
- ※ 配套课件可与责任编辑免费索取：ding@ndip.cn



国防工业出版社
National Defense Industry Press



本书配有电子课件

普通高等院校“十二五”规划教材

机械结构有限元分析

——ANSYS 与 ANSYS Workbench 工程应用

宋志安 于 涛 李红艳
苏春建 秦升学 魏新村

编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书系统、全面地介绍了有限元法的基本概念、基础理论、基于 ANSYS 的有限元建模方法及其工程应用,使理论和实践应用有机地结合起来,让读者不仅对机械结构有限元分析有较为全面的了解,更重要的是学会如何使用有限元法应用于毕业设计和解决实际工程问题。本书能使本科生充分巩固材料力学理论、掌握有限元分析的原理和满足本科生上机需要,通过本书的学习可以为毕业设计和以后工作提供帮助。

ANSYS 是本书不可分割的一部分,全书按点(关键点、节点)、线(桁架、梁单元)、面(平面单元)、体(三维实体)内容展开,共分 9 章,第 1 章绪论、第 2 章 ANSYS 基本操作、第 3 章桁架、第 4 章梁的理论与实例、第 5 章平面问题和轴对称问题的有限元法、第 6 章薄板弯曲问题的有限元法、第 7 章空间轴对称问题、第 8 章三维实体和第 9 章 ANSYS WORKBENCH 简介应用。

本书面向高等院校机械工程的本科生和有限元分析的初学者,对于未接触过有限元的工程师来说,本书亦可作为深入理解有限元基本概念的入门教材。

图书在版编目(CIP)数据

机械结构有限元分析:ANSYS 与 ANSYS Workbench
工程应用/宋志安等编著. —北京:国防工业出版社,
2010.6

普通高等院校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-118-06861-0

I. ①机... II. ①宋... III. ①机械—结构分析:有
限元分析—应用程序,ANSYS—高等学校—教材 IV.
①TH112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 097384 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京市李史山胶印厂

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 18 $\frac{3}{4}$ 字数 430 千字

2010 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 35.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

有限元法(FEM)作为一种通用的数值计算方法,从20世纪50年代发展至今,以其理论基础坚实、通用性强等优点,被广泛应用于工程实际的数值计算。其应用范围已从最初的固体力学和结构分析领域扩展到流体力学、传热学、电磁学、声学等领域,从简单的静力分析发展到动态分析、非线性分析、多物理场耦合分析等复杂运算。尤其是随着计算机辅助技术的快速发展和各种成熟的有限元分析软件产品得到广泛应用,有限元法连同计算机辅助设计技术(CAD)和计算机辅助制造(CAM)已成为数字化设计与制造技术的核心,被公认为是提高产品及工程设计质量和效率的最有效工具。目前,已被普遍列为工科院校机械工程、工程力学、土木工程等众多专业的本科选修课程。本书涉猎的范围为机械结构静力的有限元分析。

有限元分析课程是本科、专科生在学完材料力学和毕业设计之前开设的课程,应保证学生学完该课程后能够对材料力学理论有更加深入的理解和在毕业设计中能运用有限元分析,因此所用教材要满足知识面宽广、实用和适合实战等要求。作者多年从事有限元分析课程的教学工作,对教材的选择一直比较困惑:有的教材全篇都是有限元理论,内容枯燥,很难调动学生学习积极性,同时也很难满足学生上机需要;有的教材是ANSYS实例教程,能满足学生上机需要,但没有有限元理论做铺垫,成了空中楼阁,必然造成知识结构上的先天不足,也很难达到良好的教学效果。作者根据日常应用ANSYS的工程实践和教学经验,参阅了大量论文、专著以及相关的网页资料,把MATLAB编制简单的m文件处理矩阵和图形可视化的优势应用于有限元基本理论和桁架,利用方便交互操作的ANSYS直观易读的主菜单进行了图示化操作等,并介绍了ANSYS Workbench的工程应用,完成了全书的编撰,书中有很多内容都是原创。

本书由宋志安博士、于涛博士和李红艳博士担任主编,苏春建博士、秦升学博士和魏新村教授担任副主编。本书系统、全面地介绍了有限元分析法的基本概念、基础理论、基于ANSYS的有限元建模方法及其工程应用,使理论和实践应用有机地结合起来,让读者不仅对机械结构有限元分析有较为全面的了解,更重要的是学会如何使用有限元法应用于毕业设计和解决实际工程问题。使用本书可以充分巩固学过材料力学理论和掌握有限元分析的原理,能满足上机需要,学生通过本书的学习可以为毕业设计和以后工作提供帮助。本书面向高等院校机械工程专业的大学生和有限元分析的初学者,对于未接触过有限元的工程师来说,本书亦可作为深入理解有限元基本概念

的入门教材。

第1章和第3章由宋志安博士和魏新村教授联合编写，第2章和第6章由于涛博士编写，第4章和第5章由秦升学博士编写，第7章和第8章由苏春建博士编写，第9章由李红艳博士编写。

全书由宋志安博士统稿，山东科技大学范云霄教授、山东交通职业学院魏新村教授和山东理工大学李红艳博士在百忙之中对全书进行了仔细审阅，并提出了许多宝贵意见，在此表示感谢！

由于作者水平有限，书中难免存在不妥和错误之处，敬请读者批评指正！作者信箱：songzhian2005@126.com。

作者

2010年6月于青岛

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 有限元法国内外发展概况	1
1.2 基于 MATLAB 的有限元法基本理论	2
1.2.1 变分法	2
1.2.2 Rayleigh-Ritz 方法	4
1.2.3 加权余量法	10
1.2.4 函数降阶与试探函数	16
1.3 有限元的特点	18
1.4 有限元法的应用	19
1.4.1 有限元法的应用范围	19
1.4.2 有限元法在产品开发中的应用	19
思考题	21
第 2 章 ANSYS 基本操作	22
2.1 ANSYS12.0 基本介绍	22
2.1.1 ANSYS12.0 运行环境的配置	22
2.1.2 ANSYS12.0 界面介绍	23
2.1.3 ANSYS 文件类型	25
2.1.4 ANSYS 工作方式	26
2.1.5 ANSYS 的基本分析步骤	27
2.2 建立模型	28
2.2.1 指定工作目录、作业名和分析标题	28
2.2.2 定义图形界面过滤参数	29
2.2.3 ANSYS 的单位制	29
2.2.4 定义单元类型	30
2.2.5 定义单元实常数	32
2.2.6 定义材料属性	34
2.2.7 创建几何模型	35
2.2.8 对实体模型划分网格	46
2.3 加载和求解	51
2.3.1 加载	51
2.3.2 求解	57

2.4	后处理.....	61
2.4.1	读入结果数据.....	61
2.4.2	使用单元表.....	62
2.4.3	使用 POST1 查看计算结果.....	65
	思考题.....	69
第3章	桁架.....	70
3.1	一维桁架.....	70
3.1.1	一维桁架传统法求解理论.....	70
3.1.2	一维桁架传统法求解方法.....	72
3.1.3	基于 ANSYS 的有限元分析过程.....	74
3.2	二维桁架.....	78
3.2.1	二维桁架基础理论.....	78
3.2.2	二维桁架工程实例传统解法.....	81
3.2.3	传统解题方法.....	82
3.2.4	基于 MATLAB 的求解方法.....	84
3.2.4	基于 ANSYS 的求解方法.....	86
3.3	空间桁架.....	93
3.3.1	引言.....	93
3.3.2	三维桁架分析理论基础.....	93
3.3.3	编程思路.....	95
3.3.4	程序实现.....	99
3.3.5	结论.....	102
3.3.6	基于 ANSYS 的有限元分析方法.....	102
	思考题.....	106
第4章	梁理论与实例.....	108
4.1	梁理论.....	108
4.2	ANSYS 梁单元.....	109
4.3	位移函数推导梁单元的有限元格式.....	109
4.4	梁结构的静力学分析实例.....	111
4.4.1	均布载荷力下梁的挠度分析.....	111
4.4.2	桥式起重机大梁受到均布载荷和集中力作用下的分析.....	118
4.4.3	悬臂梁优化算例.....	129
	思考题.....	139
第5章	平面问题和轴对称问题的有限元法.....	141
5.1	平面问题基本知识.....	141
5.1.1	平面应力问题.....	141
5.1.2	平面应变问题.....	141
5.1.3	平面问题基本方程.....	142
5.1.4	平面问题的三角形单元求解.....	143

5.2	轴对称问题基本知识	145
5.2.1	轴对称问题的定义	145
5.2.2	基本变量和基本方程	146
5.3	板分析实例	148
5.3.1	问题的描述	148
5.3.2	ANSYS 操作步骤	148
5.4	轴对称圆筒分析实例	161
5.4.1	问题描述	161
5.4.2	ANSYS 操作步骤	162
	思考题	173
第6章	薄板弯曲问题的有限元法	174
6.1	薄板弯曲的基本方程	174
6.1.1	定义及假设	174
6.1.2	薄板弯曲的基本方程	175
6.2	矩形薄板单元分析	179
6.2.1	矩形薄板单元的位移函数	179
6.2.2	矩形薄板单元的刚度矩阵	182
6.2.3	矩形薄板单元的载荷移置	186
6.2.4	计算例题	187
6.3	三角形薄板单元分析	188
6.3.1	三角形薄板单元的位移函数	189
6.3.2	三角形薄板的单元刚度矩阵	192
6.3.3	三角形薄板单元的载荷移置	195
6.4	ANSYS 求解板壳问题	196
6.4.1	壳单元的定义与使用	196
6.4.2	带有加强筋平板的静力分析	197
	思考题	205
第7章	空间轴对称问题	206
7.1	离散化	206
7.2	单元的应变和应力	207
7.2.1	单元位移函数	207
7.2.2	几何方程	208
7.2.3	应力方程	209
7.3	单元刚度矩阵和等效节点载荷	210
7.3.1	单元刚度矩阵	210
7.3.2	等效节点载荷	210
第8章	三维实体	213
8.1	三维实体模型的定义	213
8.2	四节点四面体单元	213

8.3	基于四节点四面体单元的三维固体力学问题的有限元分析.....	215
8.4	ANSYS 中的三维单元示例.....	220
8.4.1	热力学—实体单元.....	220
8.4.2	结构—实体单元.....	221
8.5	三维实体建模.....	222
8.5.1	模型生成.....	222
8.5.2	实体造型.....	224
8.6	ANSYS 与其他三维建模软件的接口.....	235
8.6.1	用 IGES 文件进行工作.....	235
8.6.2	IGES 输入过程.....	236
8.6.3	ANSYS 和 Pro/E 接口方法.....	236
8.6.4	ANSYS 和 Catia 接口方法.....	237
8.7	对实体单元划分网格的方法.....	237
8.7.1	如何对实体模型进行网格划分.....	237
8.7.2	定义单元类型.....	238
8.7.3	网格划分控制.....	238
8.8	工程实例——轮子的受力分析.....	241
8.8.1	问题的描述.....	241
8.8.2	GUI 操作方式.....	242
8.8.3	命令流方式.....	254
	思考题.....	257
第 9 章	ANSYS Workbench 简介及应用.....	258
9.1	参数化建模模块 DM.....	259
9.1.1	DM 模块启动.....	259
9.1.2	DM 中建立螺旋弹簧模型.....	261
9.1.3	简单几何体特征创建.....	263
9.2	分析工具模块 DesignSpace.....	266
9.2.1	DS 模块启动.....	266
9.2.2	螺旋弹簧的静力分析.....	267
9.2.3	螺旋弹簧的模态分析.....	279
9.3	优化设计模块 DX.....	281
9.3.1	DX 模块启动.....	283
9.3.2	螺旋弹簧的优化设计.....	283
	思考题.....	289
	参考文献.....	290

第 1 章 绪 论

1.1 有限元法国内外发展概况

有限元法是一种基于变分法(或变分里兹法)而发展起来的求解微分方程的数值计算方法,该方法以计算机为手段,采用分片近似、进而整体逼近的研究思想求解物理问题。简而言之,其基本思想就是里兹法加分片近似,可以归纳如下:

首先,将物体或解域离散为有限个互不重叠仅通过节点相互连接的子域(即单元),原始边界条件也被转化为节点上的边界条件,此过程称为离散化。

其次,在单元内,选择简单近似函数来分片逼近未知的求解函数,即分片近似。

最后,基于与原问题数学模型(基本方程和边界条件)等效的变分原理或加权残值法,建立有限元方程(即刚度方程),从而将微分方程转化为一组以变量或其导数的节点为未知量的代数方程组,进而借助矩阵和计算机求解代数方程组得到原问题的近似解。

在整个有限元分析过程中,离散化是分析的基础。有限元法离散化的思想可以追溯到 20 世纪 40 年代,1943 年, R.Courant 在求解扭转问题时,为了表征翘曲函数,首先将截面分解成若干三角形区域,在各个三角形区域设定一个线性的翘曲函数,求得扭转问题的近似解,这是对里兹法的推广,其实质就是有限元法分片近似、整体逼近的基本思想。与此同时,一些应用数学家和工程师由于各种原因也涉及过有限元的概念,但由于受到当时计算能力的限制,这些工作并没有引起人们的注意,被认为没有多大的价值,直到电子计算机出现并得到应用后,这一思想才引起关注。

有限元分析在 20 世纪 50 年代起源于航空工程中飞机结构的矩阵分析。结构矩阵分析法认为:整体结构可以看做是由有限个力学小单元互相连接而组成的集合体;每个单元的力学特性可以比喻为建筑中的砖瓦,装配在一起就能提供整体结构的力学特性。

有限元法第一次成功的尝试是 1956 年波音公司的 Turner Clough 等人在分析飞机结构时,将分片近似、整体逼近的思想和结构力学的矩阵位移法应用于弹性力学的平面问题,采用直接计算机求解,按照弹性力学的基本原理建立了分片小区域(即三角形单元)上的特性方程,首次采用计算机求解,给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。同时,德国斯图加特大学的 J.H.Argyris 发表了一组能量原理与矩阵分析的论文,并出版了《能量原理与结构分析》一书,它对弹性结构的基本原理进行了综合推广,是弹性结构分析的经典著作之一。1960 年, Clough 在题为“平面应力分析的有限元法”的论文中首次使用有限元法(the Finite Element Method)一词。此后这一名称得到了广泛承认,这一方法也被大量工程师开始用于处理结构分析、流体和热传导等复杂问题。

20 世纪 60~70 年代,是有限元迅速发展的时期,除力学界外,大量数学家也参加了这一工作。1963 年, J.F.Bessling、Melosh 和 Jones 等人证明了有限元是基于变分原理的

里兹法的另一种形式，有限元计算格式可用变分原理建立，它可以处理很复杂的连续介质问题，是一种普遍方法。20世纪60年代后期，J.T.Oden等学者进一步研究了加权残值法与有限元法之间的关系，利用加权残值法也可以确定有限元单元特性，建立有限元法的计算格式，并指出有限元法所利用的主要是 Galerkin 加权残值法，它可以用于泛函无法构造或泛函根本不存在的问题，如很多流体力学问题，从而进一步扩大了有限元法的应用领域。在此期间，O.C.Zienkiewicz、卞学璜、董平等人进一步推动了有限元的发展，分别提出了等参单元、杂交单元的概念。1967年，O.C.Zienkiewicz 和 Y.K.Cheung(张佑启)出版了第一本有关有限元分析的专著《连续体和结构的有限元法》，此书是有限元法的名著，后更名为《有限单元法》；1972年，J.T.Oden 出版了第一本处理非线性连续介质问题的专著《非线性连续体的有限元法》。从此，有限元法就以坚实的理论和完美的计算格式屹立于数值计算方法之林，被认为是一种完美无缺和无所不能的方法。

近几十年，有限元法得到了迅速发展，已出现多种新型单元(先后有等参元、高次元、不协调元、拟协调元、杂交元、样条元、边界元、罚单元，还有半解析的有限条等不同单元)和求解方法(如半带宽与变带宽消去法、超矩阵法、波前法、子结构法、子空间迭代法等)。自动网格划分和自适应分析技术的采用也大大加强了有限元法的解题能力。有限元法的通用性及其在科学研究和工程分析中的作用和重要地位，众多著名公司更是投入巨资来开发有限元分析软件，推导了有限元分析软件的巨大发展，使有限元法的工程应用得到了迅速普及。目前在市场上得到认可的国际知名的有限元分析通用软件有 ANSYS、MSC/NATRAN、MSC/MARC、ADINA、ABAQUS、ALGOR、COSMOS 等，还有一些适用特殊行业的专用软件，如 DEFORM、AUTOFORM、LS-DYNA 等。

我国的力学工作者为有限元方法的初期发展也做出了许多贡献，其中比较著名的有陈伯屏(结构矩阵方法)、钱令希(余能原理)、钱伟长(广义变分原理)、胡海昌(广义变分原理)、冯康(有限单元理论)、唐立民(协调单元)等，近几十年，我国在有限元应用及软件开发方面也做了大量工作，取得了一定的成绩，只是和国外的成熟产品相比还存在较大的差距。

1.2 基于 MATLAB 的有限元法基本理论

有限元法起源于弹性力学问题的求解，本节将通过弹性力学问题来介绍有限元法的基本理论。弹性力学是研究弹性体在约束和外载荷(或温度)作用下应力和变形分布规律的一门学科。其具体描述就是从静力学、几何学和物理学三方面进行分析，建立描述弹性体变形状态、应力状态的弹性力学的基本方程。基本方程主要有平衡微分方程、集合方程和物理方程。

1.2.1 变分法

假设函数 F 是一个位移、速度及加速度的函数，可写成 $F = F(x, \dot{x}, \ddot{x})$ 形式，若要对总能量函数 $\Pi = \int_V F(x, \dot{x}, \ddot{x}) dV$ 找出最小值，依照变分法可以得到下式：

$$\frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = 0 \quad (1-1)$$

1. 弹簧—质量系统

弹簧—质量振动系统如图 1-1 所示。

对于一个弹簧振动系统，根据汉密尔顿定理(Hamilton Principle),总能量(或称为拉格朗日算子) L 为动能 V 和势能 U 之和，写成

$$L=V+U \quad (1-2)$$

式中： V 为动能； U 为势能。

$$V = \int_V \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dV \quad (1-3a)$$

$$U = \int_V -\frac{1}{2} kx^2 dV \quad (1-3b)$$

将拉格朗日算子 L 带入式(1-1)的 F 位置，得

$$\frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0 \quad (1-4)$$

将式(1-2)和式(1-3)代入式(1-4)，得

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1-5)$$

式(1-5)就是牛顿第二定律 $F=ma$ 的形式。

由此可知：变分法可将能量的积分方程式转换成系统的控制方程式(Governing Equation)，以微分方程的形式表示。

2. 弹性梁

弹性梁静力分析系统如图 1-2 所示。在一个弹性梁静力分析的系统中，拉格朗日算子

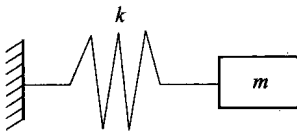


图 1-1 弹簧质量振动系统

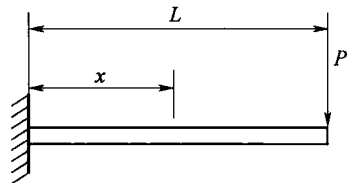


图 1-2 弹性梁静力分析系统

L 的动能为零，而势能 U 为应变能 S 减去外力所做的功 W ，即

$$U = S - W = \int_V \left(\frac{1}{2} EI (v')^2 - pv \right) dV \quad (1-6)$$

将势能 U 替代式(1-1)中的 F ，得

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial U}{\partial v'} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial v'} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right) = 0 \quad (1-7)$$

将式(1-6)代入式(1-7), 可得微分方程:

$$EIv'''' - p = 0 \quad (1-8)$$

式(1-8)即弹性梁的微分方程式。

1.2.2 Rayleigh-Ritz 方法

在 Rayleigh-Ritz 方法中, 首先假设一组符合于边界条件的试探函数(Trial Solution Function), 并将其函数代入能量方程式, 再对函数的各系数作微分并令其为零, 找出能量方程式的最小值, 最后解出试探函数的各系数。

1. 以三角函数为试探函数

首先假设一组符合边界条件的试探三角函数如下:

$$f_i = \sin(ix/(2L)) \quad (1-9)$$

由于是观察边界条件所得, 因此试探函数并不是位移解, 也不是完整解。弹性梁的挠度可表示为试探函数的线性组合, 其中 c_i 为 i 项函数的系数, 如下式表示。

$$v = c_i f_i \quad i=1 \sim n \quad (1-10)$$

由于

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2} EI (v'')^2 - pv \right) dV \quad (1-11a)$$

$$= \int_V \left(\frac{1}{2} EI c_i^2 \sin^2(ix/(2L)) - p c_i \sin(ix/(2L)) \right) dV \quad (1-11b)$$

最后再对势能 U 取最小值, 也即对函数的系数 c_i 取偏微分, 并令其为 0, 即

$$\frac{\partial U}{\partial c_i} = 0 \quad (1-12)$$

假定 $P=-100$, $L=10\text{m}$, $E=3e11$, 梁截面是正方形其宽度为 $h=5e-2\text{m}$, 根据上述数据编制 MATLAB 程序如下:

```
clear
syms x L EI
w='c1'*sin(pi*x/(2*L))+c2'*sin(3*pi*x/(2*L))+c3'*sin(5*pi*x/(2*L))+c4'*sin(7
*pi*x/(2*L));
kk=int(EI/2*(diff(w,x,2))^2-'P'*w,0,L);
[c1,c2,c3,c4]=solve(diff(kk,'c1'),diff(kk,'c2'),diff(kk,'c3'),diff(kk,'c4'),'c1,
c2,c3,c4')
```

```
[c1,c2,c3,c4]
```

根据运行结果得出的 [c1, c2, c3, c4] 接着进行下列编程:

```
P=-100;L=10;E=3e11;h=5e-3;
```

```

I=h^4/12
EI=E*I;
x=0:L;
c1=64*P*L^4/EI/pi^5
c2=64/243*P*L^4/EI/pi^5
c3=64/3125*P*L^4/EI/pi^5
c4=64/16807*P*L^4/EI/pi^5
w=c1*sin(pi*x/(2*L))+c2*sin(3*pi*x/(2*L))+c3*sin(5*pi*x/(2*L))+c4*sin(7*pi*x/
(2*L))
w=1e-4*w
plot(x,w,'k','linewidth',2)
grid
xlabel('L')
ylabel('w')
y=P*L^3/(3*EI)
[y w(10)]

```

运行上述程序，可以得到位置 x 从 0 到 10m 的挠度曲线如图 1-3 所示。

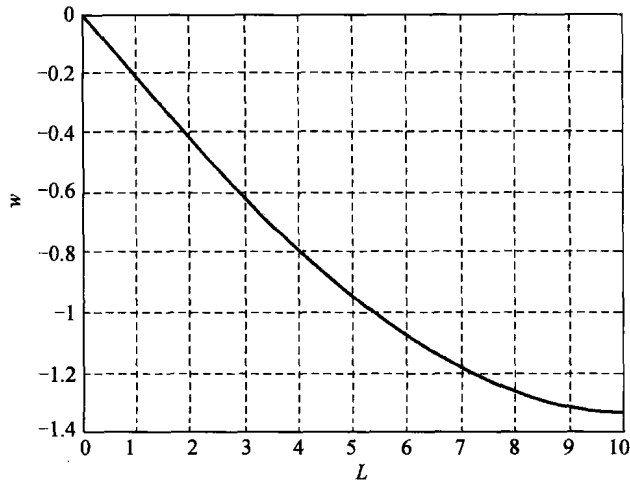


图 1-3 位置与挠度值的关系曲线(1)

由于 $w(10)=-1.3174$,根据理论公式: $w=P*L^3/3*EI=-0.2133$, 虽然曲线的趋势是正确的, 然而在数值上还有相当的差距。事实上若将梁由现行的单一单元改为两个单元, 再重新计算其值, 即可发现计算误差迅速降低到 1%之内。

2. 以幂级数(Power Series)为试探函数

首先假设一组符合于边界条件的试探幂级数如下:

$$f_i = x^i \quad (1-13)$$

由于是观察边界条件所得, 因此试探函数并不是唯一解, 也不是完整解。

弹性梁的挠度可表示为试探函数的线性组合,其中 c_i 为 i 项函数的系数,如下式所示。

$$v = c_i f_i, i = 0 \sim n \quad (1-14)$$

将上述两式代入势能方程式,得

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2} EI (v'')^2 - p v \right) dV = \int_V \left(\frac{1}{2} EI ((c_i x')'')^2 - p c_i x' \right) dV \quad (1-15)$$

最后再对势能 U 取最小值,也即对函数的系数 c_i 取偏微分,并令其为 0:

$$\frac{\partial U}{\partial c_i} = 0 \quad (1-16)$$

由此可得最小势能下的系数,将各系数代回式(1-13)和式(1-14)式,即可得到挠度值的方程式。

由于悬臂梁要求固定的边界条件,约束点上的位移与斜率都是 0,式(1-13)幂级数中的 i 为 0 或 1,由原点位移值 $x=0$ 可知: x 的零次项与一次项系数为 0,因此可假设试探函数从二次项开始。

假定 $P=-100$, $L=10\text{m}$, $E=3\text{e}11$,梁截面是正方形其宽度为 $h=5\text{e}-2\text{m}$,根据上述数据编制 MATLAB 程序如下:

```
clear
syms x EI L
w='c1'*x^2+'c2'*x^3+'c3'*x^4+'c4'*x^5
kk=int(EI/2*(diff(w,x,2))^2-'P'*w,0,L)
[c1,c2,c3,c4]=solve(diff(kk,'c1'),diff(kk,'c2'),diff(kk,'c3'),diff(kk,'c4'),'c1,
c2,c3,c4')
```

根据运行结果得出的[c1,c2,c3,c4]接着进行下列编程:

```
P=-100;L=10;EI=1.56e5;x=0:L;
c1=1/4*L^2*P/EI
c2=-1/6*L*P/EI
c3=1/24*P/EI
c4=0
w=c1*x.^2+c2*x.^3+c3*x.^4+c4*x.^5
plot(x,w,'k')
grid
xlabel('L')
ylabel('w')
y=P*L^3/(3*EI)
[y w(11)]
```

运行上述程序,可以得到位置 x 从 0 到 10m 的挠度曲线如图 1-4 所示,由曲线可以看出:当 $x=10\text{m}$ 时,其挠度值为 -0.8013m ,而其理论值为 -0.2137 ,虽然曲线的趋势是正确的,然而在数值上还有差距。事实上若将梁由现行的单一单元改为两个单元,再重新计算其值,即可发现计算误差迅速下降。

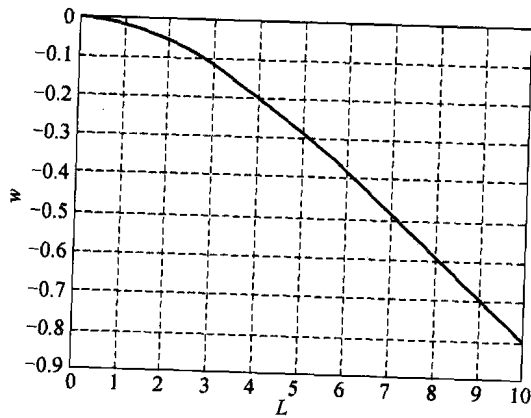


图 1-4 位置与挠度值的关系(2)

3. 以形函数(Shape Function)为试探函数

首先假设一组符合于边界条件的试探形函数如下:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{(L-x)^2(L+2x)}{L^3}; & f_2 &= \frac{(3L-2x)x^2}{L^3} \\
 f_3 &= \frac{(L-x)^2x}{L^2}; & f_4 &= \frac{(-L+x)x^2}{L^2}
 \end{aligned} \tag{1-17}$$

形函数 f_1 代表左侧节点的位移函数, f_2 代表右侧节点的位移函数, f_3 代表左侧节点的斜率函数, f_4 代表右侧节点的斜率函数。对式(1-17)四个形函数编写 MATLAB 程序如下:

```

clear
l=10;
x=0:l;
subplot(221)
f=(1-x).^2.*(1+2.*x)/l^3;
plot(x,f,'k','linewidth',1)
grid
xlabel('L(m)')
ylabel('f_1(m)')
subplot(222)
f=(3*l-2.*x).*x.^2/l^3;
plot(x,f,'k','linewidth',1)
grid
xlabel('L(m)')
ylabel('f_2(m)')
subplot(223)
f=(1-x).^2.*x/l^2;
plot(x,f,'k','linewidth',1)
grid
xlabel('L(m)')

```



```

ylabel('f_3(m)')
subplot(224)
f=x.^2.*(-1+x)/1^2;
plot(x,f,'k','linewidth',1)
grid
xlabel('L(m)')
ylabel('f_4(m)')

```

运行上述程序，得到如图 1-5 所示的形函数曲线。

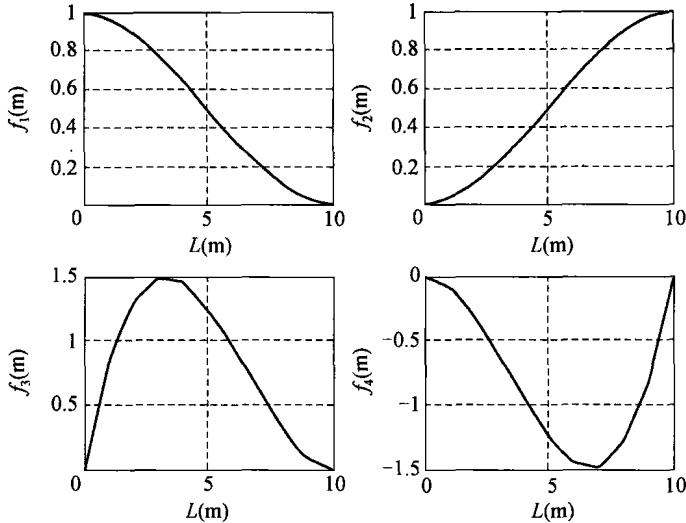


图 1-5 形函数曲线

弹性梁的挠度可表示为函数的线性组合，其中 c_i 为 i 函数的系数，如式(1-14)所示。事实上， c_1 代表左侧的节点的位移、 c_2 代表右侧的节点的位移、 c_3 代表左侧的节点的斜率、 c_4 代表右侧的节点的斜率。形函数 f_i 为空间的函数，而节点位移 c_i 为非空间的函数，但可为时间的函数。在动力系统中，位移函数 v 对空间的微分仅对形函数 f_i 作用，而位移函数 v 对时间的微分仅对节点位移 c_i 作用。

$$v = c_i f_i, i = 0 \sim n \quad (1-18)$$

由势能表达式

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2} EI (v'')^2 - p v \right) dV = \int_V \left(\frac{1}{2} EI (c_i f_i'')^2 - p c_i f \right) dV \quad (1-19)$$

最后再对势能 U 取最小值，也即对函数的系数 c_i 取偏微分，并令其为 0：

$$\frac{\partial U}{\partial c_i} = 0 \quad (1-20)$$

由此可得最小势能下的系数 c_i ，将各系数代回式(1-17)和式(1-18)，即可得到挠度值的方程式。

由于悬臂梁要求固定的边界条件，梁左侧约束点上的位移与斜率都是 0，式(1-17)形