高等学校试用教材

高等数学

（物理专业用）

第三册　第二分册

四川大学数学系高等数学教研组编

高等教育出版社

高等学校试用教材

高 等 数 学

（物理专业用）

第三册 第二分册

四川大学数学系高等数学教研组编

高等教育出版社

本书主要讲常微分方程及其各种解法，一阶偏微分方程，和概率论初步，适合综合大学物理类专业使用，也可供其他相近的专业参考.

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复“高等教育出版社”。本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

学校试用教材

等 数 学

物理专业用)

三册 第二分册

四川大学数学系高等数学教研组编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
四川省金堂新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 6.5 字数 158000
1979年3月第1版 1988年2月第8次印刷
印数：243 011—258 540
ISBN 7-04-001204-9/O·354
定价 0.92 元

目　录

第十三章　微 分 方 程

在本书第一册第四章中介绍了微分方程的基本概念，常用的一阶方程（可分离变量的方程和一阶线性微分方程）和二阶方程（不显含变量或一阶导数的二阶方程和二阶常系数线性微分方程）的解法. 本章是第四章的深入和发展，介绍作为微分方程理论基础和应用基础的“解的存在与唯一性定理”，某些未解出导数的一阶方程的解法，高阶微分方程特别是高阶线性微分方程，微分方程组特别是线性微分方程组的基础知识，以及常微分方程在物理学中的某些应用，最后介绍了与常微分方程密切相关的一阶偏微分方程的基本知识.

第一节　一阶常微分方程

§13.1.1　一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ 解的存在与唯一性定理

在第四章中，我们已经学会解几种一阶微分方程，但是事先并不知道这些方程是否有解.

如果一个微分方程不属于能求解(或可积)的类型，那么能否事先断定它有适合初始条件的解存在？若其解存在，此解是否唯一？确切地说，已知一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 和初始条件 (x_0,y_0)，求其特解 $y=y(x)$，使 $y(x_0)=y_0$，或者说，求该方程过点 (x_0,y_0) 的积分曲线(或解). 由初值条件求特解称为该方程的初值问题，也称为哥西(Cauchy)问题或哥西初值问题，初始值 (x_0,y_0) 又称为

初始数据或初始条件.

1. 解的存在与唯一性定理 已知一阶微分方程

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

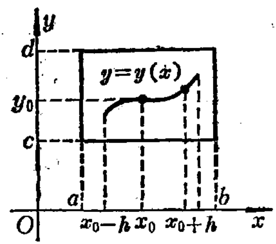
和初值条件

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

如果在以点 (x_0, y_0) 为中心的闭矩形区域(图 13.1)

$$R = \{a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

上, 二元函数 $f(x, y)$ 连续并且对 y 有有界偏导数, 则存在着这个方程的唯一解 $y = y(x)$, 它确定在 (a, b) 的某个子区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上, 而且当 $x = x_0$ 时 $y = y_0$.



(图 13.1)

换句话说, 对于矩形 R 内部取的任何初始数据, 存在着与之对应的唯一解, 只要 $f(x, y)$ 满足所设的各项条件. (这些条件也可以削弱一些而得到多种多样的形式, 例如, 偏导数 f'_y 在 R 上存在而且有界的条件可以削弱*成所谓李卜希兹 (Lipschitz) 条件: 对于 R 上任意两点 (x, y_1), (x, y_2) 有不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2| \tag{L}$$

成立, 其中 $N > 0$ 为一个定数).

因此, 有相当广泛的一类方程, 不必去解它, 就可判定它们有适合初始数据的唯一解, 例如, 对于方程 $y' = x + y^2$, 可以提出具有任意初始值 x_0, y_0 的哥西问题. 因为方程的右端 $f(x, y) = x + y^2$ 在 x, y 平面上任何闭矩形域上连续且有连续偏导数, 也就有关于 y 的有界偏导数, 所以这样的初值问题有解而且这样的解是唯

* 由微分学中值定理 $f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y(x, y^*)(y_1 - y_2)$, (其中 y^* 为介于 y_1, y_2 之间的某数) 又由 f'_y 的有界性立即推出 (L) 成立.

一的.

有许多种方法证明这个定理,这些证明方法中,有一种叫比卡(E. Picard)的逐次逼近法. 它对定理的证明过程本身就提供了求方程近似解的方法.

我们来介绍这一方法并证明这个定理. 取函数 $y_0(x)=y_0$ 作为解的零次近似. 将函数 $y_0(x)$代替方程(1)中的 y 得方程

$$y'=f(x,y_0(x)) \tag{3}$$

其初值条件同于初值条件(2). 我们取方程(3)的哥西问题的解作为方程(1)的解的一次近似 $y_1(x)$.

方程(3)因其右端只是 x 的函数,容易积分而得出其哥西问题的解为

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_0(x))dx$$

再将方程

$$y'=f(x,y_1(x))$$

的适合初始条件(2)的解取作(1)的解的二次近似 $y_2(x)$:

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_1(x))dx$$

此法继续下去. 如果已求出方程(1)的第 k 次近似 $y_k(x)$, 则第 $k+1$ 次近似 $y_{k+1}(x)$可按公式

$$y_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_k(x))dx \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

求出.

下面来证明定理. 证明过程较长,但其基本思想是简单的,即证明以上近似序列 $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_k(x)$, $\cdots$(简记为 $\{y_k(x)\}$) 一致收敛, 而且其极限函数就是方程(1)的初值问题的解,然后证明这个解是唯一的.

在证明过程中要用到数学分析的一些结论, 读者已在本书前

两册中学过，现将它们(1°—6°)列举如下，以便在证明过程中引用.

1°. 设$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则$f(x,y)$在D上有界. 即是说，存在一个数$M>0$使得

$$|f(x,y)|\leqslant M$$

对D上一切点(x,y)成立.

2°. 设$g(x)$在区间$[x_0,x_1]$连续，则函数

$$h(x)=\int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

在$[x_0,x_1]$也连续.

3°. 设$f(t)$在区间$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$可积，则

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\right|\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}|f(t)|dt$$

如果$|f(t)|\leqslant M$，则

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\right|\leqslant M(\beta-\alpha)$$

4°. 关于一致收敛性的维尔斯脱拉斯(Weirstrass)M判别法：设$\{g_n(x)\}$是区间$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$上的函数序列. 如果在此区间上有$|g_n(x)|\leqslant M_n(n=1,2,\cdots)$而且$\sum\limits_{n=0}^{\infty}M_n$收敛，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n(x)$在区间$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$一致收敛于唯一的极限函数$g(x)$.

5°. 设$f(x,y)$关于变数y在闭区间$y_1\leqslant y\leqslant y_2$上连续. 当$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$时$y_1\leqslant y_k(x)\leqslant y_2(k=0,1,2\cdots)$而且$\{y_k(x)\}$一致收敛于函数$y(x)$，则序列$\{f(x,y_k(x))\}$在区间$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$上一致收敛于$f(x,y(x))$.

事实上，因$\{y_k(x)\}$在$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$上一致收敛于$y(x)$，故对任给正数$\delta>0$，存在一个与$x$无关的自然数$n_0>0$，使不等式

$$|y_k(x)-y(x)|<\delta$$

当$k>n_0$时在$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$上一致成立. 又$f(x,y)$关于$y$在闭区间

$[y_1, y_2]$连续；由此可知，对任给正数 $\varepsilon>0$，存在一个与 y 无关的正数 $\delta_0>0$，使不等式

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\varepsilon$$

当 $|y'-y''|<\delta_0$ 时在$[y_1, y_2]$上一致成立. 综合上述可知，对于任给正数 $\varepsilon>0$，存在一个与 x 无关的正整数 n_0，当 $k>n_0$ 时在区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上一致成立下述不等式

$$|f(x,y_k(x))-f(x,y(x))|<\varepsilon$$

这就表示函数序列$\{f(x,y_k(x))\}$在 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上一致收敛于函数 $f(x,y(x))$.

6°. 假设在区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 连续的函数序列$\{g_k(x)\}$一致收敛于函数 $g(x)$，则 $g(x)$在$[\alpha, \beta]$连续，而且

$$\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta g_k(x)\,dx=\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

证明 根据假设，$f(x,y)$在 R 上连续，因此由 1°，对 R 中一切点(x,y)有

$$|f(x,y)|\leqslant M$$

$|f(x,y)|$在 R 上的上界 M 可取无穷多个值，这里取$|f(x,y)|$在 R 上的最小上界(即上确界)M为佳. 令

$$h=\min\left(b-a, \frac{d-c}{M}\right) \tag{4}$$

1) 首先证明序列$\{y_k(x)\}$在区间$[x_0-h, x_0+h]$上满足不等式

$$|y_k(x)-y_0|\leqslant b\quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{5}$$

当 $k=0$ 时(5)显然成立. 假设(5)对于 $k=s-1$ 成立，则由归纳法假设及 1°，3° 和(4)有

$$|y_s(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^x f(x,y_{s-1}(x))\,dx\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^x \Big|f(x,y_{s-1}(x))\Big|dx\right|$$

$$\leqslant M\left|\int_{x_0}^x dx\right|=M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant b$$

因此，(5)已证明.

由(5)可知，当$|x-x_0|\leqslant h$时x,y平面上的点$(x,y_k(x))$一定属于闭区域R，因而$f(x,y_k(x))$是x的连续函数. 由此利用数学归纳法及性质2°容易证明各$y_k(x)$在区间$[x_0-h, x_0+h]$上连续.

2）其次，用数学归纳法可以证明

$$|y_k(x)-y_{k-1}(x)|\leqslant MN^{k-1}\frac{|x-x_0|^k}{k!}\leqslant\frac{MN^{k-1}h^k}{k!}\quad (k=1,2,\cdots)\quad (6)$$

其中N为李卜希兹常数(由于$f(x,y)$在R上有有界偏导数，因此$f(x,y)$必满足李卜希兹条件(L))

如果$k=1$，我们得

$$|y_1(x)-y_0(x)|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))dx\right|\leqslant M\left|\int_{x_0}^{x} dx\right|$$
$$=M|x-x_0|\leqslant Mh$$

因此(6)对于$k=1$成立.

今设(6)对于$k=s$成立，并证明(6)对$k=s+1$也成立. 当$k=s$时(6)成为

$$|y_s(x)-y_{s-1}(x)|\leqslant MN^{s-1}\frac{|x-x_0|^s}{s!}\leqslant\frac{MN^{s-1}h^s}{s!}$$

因此，由不等式(L)及性质3°有

$$\begin{aligned}|y_{s+1}(x)-y_s(x)|&=\left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_s(x))\,dx-\int_{x_0}^{x} f(x,y_{s-1}(x))\,dx\right|\\&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} |f(x,y_s(x))-f(x,y_{s-1}(x))|\,dx\right|\\&\leqslant N\left|\int_{x_0}^{x} |y_s(x)-y_{s-1}(x)|\,dx\right|\\&\leqslant\frac{MN^s}{s!}\left|\int_{x_0}^{x} |x-x_0|^s\,dx\right|\\&=\frac{MN^s|x-x_0|^{s+1}}{(s+1)!}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{MN^s h^{s+1}}{(s+1)!}$$

3) 下面证明函数序列$\{y_k(x)\}$在区间$[x_0-h, x_0+h]$上一致收敛于它的极限函数 $y(x)$.

我们有

$$y_k(x)-y_0 = y_k(x)-y_{k-1}(x)+y_{k-1}(x)-y_{k-2}(x)+\cdots+y_1(x)-y_0$$

$$=\sum_{m=1}^{k}[y_m(x)-y_{m-1}(x)] \tag{7}$$

由(7)有

$$\sum_{m=1}^{\infty}|y_m(x)-y_{m-1}(x)| \leqslant \frac{M}{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(Nh)^m}{m!} = \frac{M}{N}(e^{Nh}-1)$$

根据 4° 可知级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}[y_m(x)-y_{m-1}(x)]$$

在区间$[x_0-h, x_0+h]$上一致收敛于唯一的极限函数 $\tilde{y}(x)$. 但是

$$\tilde{y}(x) = \lim_{k\to\infty}\sum_{m=1}^{k}[y_m(x)-y_{m-1}(x)]$$

$$=\lim_{k\to\infty}[y_k(x)-y_0]$$

$$=\lim_{k\to\infty}y_k(x)-y_0$$

或者

$$\lim_{k\to\infty}y_k(x)=y(x), \quad y(x)=\tilde{y}(x)+y_0$$

这就证明了，函数序列$\{y_k(x)\}$在区间$[x_0-h, x_0+h]$上一致收敛于极限函数 $y(x)$.

4) 现在来证明 $y(x)$在$|x-x_0|\leqslant h$时是微分方程(1)的解. 因 $f(x,y)$是连续函数，又$\{y_k(x)\}$一致收敛于 $y(x)$，所以

$$\lim_{k\to\infty} f(x, y_k(x)) = f(x, y(x))$$

在$|x-x_0|\leqslant h$时成立，而且这种收敛是一致收敛.

由等式

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_k(x))dx \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

令$k\to\infty$取极限，根据6°可得

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{k\to\infty} y_{k+1}(x) = y_0 + \lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(x, y_k(x))dx \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{k\to\infty} f(x, y_k(x))dx \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \qquad (|x-x_0|\leqslant h) \end{aligned}$$

将

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \tag{8}$$

两端对x求导数可得

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx = f(x, y(x)) \quad (|x-x_0|\leqslant h)$$

而且

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x, y(x))dx = y_0$$

即是说，在区间$[x_0-h, x_0+h]$上确定的函数$y(x)$确实满足微分方程(1)及其初始条件(2)，因而是方程(1)的初值问题的解.

5）最后证明方程(1)的初值问题的解是唯一的. 用反证法，假定除了刚才得到的解$y(x)=\lim\limits_{k\to\infty} y_k(x)$($|x-x_0|\leqslant h$)之外，在区间$[x_0-h, x_0+h]$上还有(1)的满足初始条件(2)的另外一个解$w(x)$. 因此，$w(x)$代入方程(1)的右端之后应使$f(x, w(x))$有意义，即是说，应当假定当$|x-x_0|\leqslant h$时$|w(x)-y_0|\leqslant b$. 至于$y(x)$,

当$|x-x_0|\leqslant h$时当然满足$|y(x)-y_0|\leqslant b$，这可由不等式(5)令$k\to\infty$取极限得到．今定义

$$v(x)=|y(x)-w(x)|$$

则$v(x)\geqslant 0$，而且$v(x)$在区间$[x_0-h,x_0+h]$上连续．因为$w(x)$是(1)的解，所以$\dfrac{dw(x)}{dx}=f(x,w(x))$，再注意$w(x_0)=y_0$可得

$$w(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,w(x))dx \tag{9}$$

由(8)与(9)可得

$$v(x)=\left|\int_{x_0}^{x}[f(x,y(x))-f(x,w(x))]dx\right|$$

再由李卜希兹条件(L)可得

$$v(x)\leqslant N\left|\int_{x_0}^{x}|y(x)-w(x)|dx\right|=N\left|\int_{x_0}^{x}v(x)dx\right|$$

显然，对任何数$\varepsilon>0$有

$$v(x)\leqslant\varepsilon+N\left|\int_{x_0}^{x}v(x)dx\right|$$

根据著名的别尔曼(Bellman)不等式(请参考王柔怀、伍卓群编《常微分方程讲义》201页)有

$$v(x)\leqslant\varepsilon e^{N|x-x_0|}$$

这表明$v(x)$可以小于任意小的正数，由$v(x)=|y(x)-w(x)|\geqslant 0$，导致$v(x)\equiv 0$，即$y(x)$与$w(x)$恒等．所以极限函数$y(x)$是(1)的适合初值条件(2)的唯一解．

至此，关于解的存在与唯一性定理全部证明完毕．

例子，用逐次逼近法求方程$\dfrac{dy}{dx}=y$的适合初值条件$y(x_0)=y_0$的解．

显然$f(x,y)\equiv y$在x,y平面上任何有界的矩形闭域R上连续而且$f'_y=1$有界．因此，所求解是存在而且唯一的，设它为$y(x)$．

取 $y(x)$的各次近似 $y_0(x)=y_0$

$$y_1(x)=y_0+y_0(x-x_0)$$

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[y_0+y_0(x-x_0)]dx$$

$$=y_0+y_0(x-x_0)+y_0\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_k(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}y_{k-1}(x)dx$$

$$=y_0+y_0(x-x_0)+y_0\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+y_0\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

所求解

$$y(x)=\lim_{k\to\infty}y_k(x)=y_0\left[1+(x-x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-x_0)^k}{k!}+\cdots\right]=y_0e^{x-x_0}$$

直接用分离变量法积分

$$\frac{dy}{y}=dx$$

$$\ln|y|=x+C$$

由初值条件

$$y(x_0)=y_0$$

得 $C=\ln|y_0|-x_0$,从而得解

$$y=y_0e^{x-x_0}$$

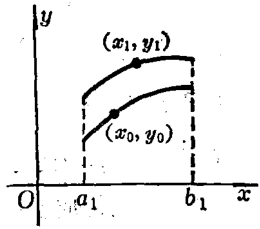
两种作法,结果一致.

2. 解对初值的连续依赖性 解的存在与唯一性定理还与实用上很重要的一个问题(即所谓运动稳定性)有关. 假定 $y=y(x)$ 是哥西问题

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

的解.

十分明显，这个解将依赖于所选取的初始数据，初始数据不同，相应的解及解的存在区间也不同，假设所有不同的解的公共存在区间为$[a_1, b_1]$(图 13.2). 因此，哥西问题的解将是三个变元即自变量 x 和初始数据 x_0, y_0 的函数，代替 $y(x)$，可以更确切地写为 $y(x, x_0, y_0)$ 而且 $y(x_0, x_0, y_0)=y_0$.



(图 13.2)

例如，在前例中，方程 $y'=y$ 的满足初始条件的解 $y=y_0e^{x-x_0}$ 就是三个变量(x, x_0, y_0)的函数.

随之产生一个问题：函数 $y(x, x_0, y_0)$随 x_0, y_0 变化而变化的性质是怎样的？特别是当初值发生微小改变时，函数相应的偏差也小吗？即是说，$y(x, x_0, y_0)$是变元 x_0, y_0 的连续函数吗？

这个问题是很有意义的，我们知道微分方程在应用上是描述某种物理过程或技术过程的. 初始数据是从生产和科学实践中取得的. 无论哪种仪器也不可能提供绝对精确的测量数据，即初始数据总有一定误差. 倘使其微小误差引起解的巨大的或本质的变动，那么所求出的近似解或精确解毫无实用价值. 因此，只有满足初始条件 $y(x_0+\Delta x_0)=y_0+\Delta y_0$ 的解与满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解，当误差$|\Delta x_0|$和$|\Delta y_0|$充分小时，对于$[a_1, b_1]$中的一切 x 相差很小，我们才认为这样的解是靠得住的. 这就是解对初值的连续依赖性问题.

容易看出，在比卡的证明方法中作出的各次近似 $y_k(x)$是连续依赖于 x_0, y_0 的，可以证明(参考微分方程的专门教程)它们的极限函数，也就是哥西问题的解，也是连续依赖于 x_0, y_0 的，这只需 x 在区间$[x_0-h, x_0+h]$变化，而方程右端函数 $f(x, y)$满足存在与唯一性定理中叙述的各种条件就行了.

在前例中，方程 $y'=y$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=y_0e^{x-x_0}$，显然在任何区间$[a,b]$上是连续依赖于初值 x_0,y_0 的，即有

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} y(x,x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=y(x,x_0,y_0)$$

在 $a\leqslant x\leqslant b$ 成立.

§13.1.2 未解出导数的一阶方程 $F(x,y,y')=0$

关于 y' 未解出的方程 $F(x,y,y')=0$ 初值问题解的存在与唯一性定理，可以化成 $y'=f(x,y)$的情形，这是因为，由隐函数存在定理，在一定条件下 $F(x,y,y')=0$ 总可以化成 $y'=f(x,y)$. 因此，这里不再讨论这种形式的存在与唯一性定理. 下面仅就其可求解的两种情况加以讨论.

1. 一阶高次方程　我们在前面学过一阶方程的各种可积类型，(如可分离变量方程，一阶线性方程等)，都是已解出导数的方程 $y'=f(x,y)$的特例. 这种方程的特点是不出现 y' 的高次项. 现在我们来研究出现 y' 的高次项的一阶方程(称为一阶高次方程) $F(x,y,y')=0$，它是未解出导数的一阶方程的特殊情况.

如果该方程可以就 y' 解出，就按已解出导数的方程 $y'=f(x,y)$ 来处理.

假设该方程是关于 y' 的 k 次方程(其系数是 x,y 的函数)，如果方程 $F(x,y,y')=0$ 在 x,y 变化的某个区域内，对 y' 而言无实根，则在该区域内不存在积分曲线. 例如，$y'^2=1-x^2-y^2$ 在区域 $x^2+y^2>1$ 内没有积分曲线. 又如，$y'^2+1=0$ 在整个平面上都没有积分曲线.

在有实根的情形，尽可能分解 $F(x,y,y')$ 为若干实因子之积(这些因子不能再分解了)，假设其中有 $l(l\leqslant k)$个一次因子之积：

$$[y'-f_1(x,y)][y'-f_2(x,y)]\cdots[y'-f_l(x,y)]=0$$