

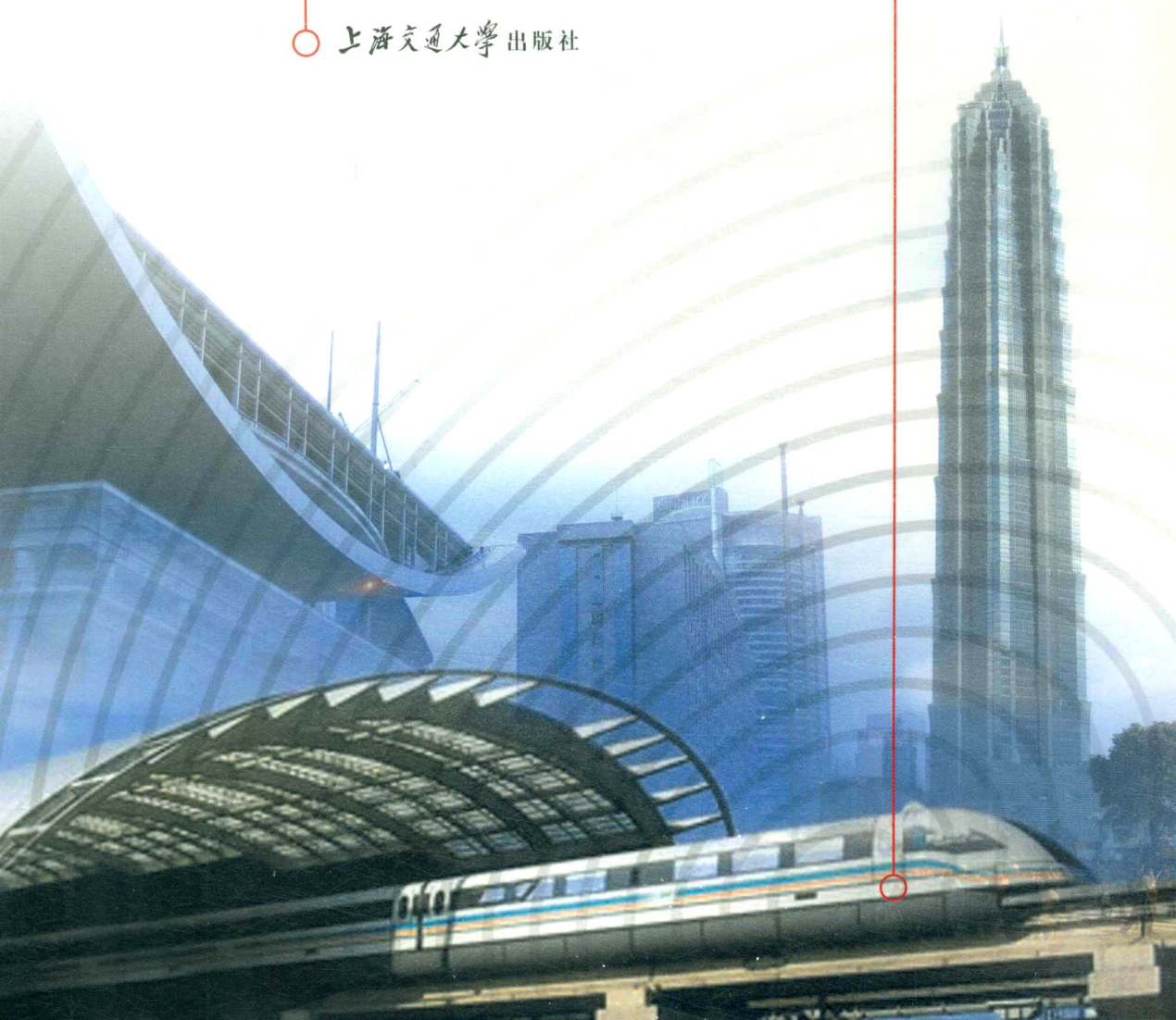
○ (修订版)

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

电磁场与 机电能量转换

主编 \ 周顺荣

○ 上海交通大学出版社



内 容 简 介

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。全书共分十章,前六章为电磁场部分,在矢量分析和场论知识的基础上,分别论述静电场、恒定电场、恒定磁场、边值问题和时变电磁场、电磁波的基本概念、基本定理及基本方程。后四章为机电能量转换部分,在电磁场理论的基础上,详尽叙述机电能量转换的基本原理、机电系统模型及其运动方程、机电能量转换方式、机电能量转换动力学和机电能量转换新技术。全书理论联系实际,反映了国际国内电磁场和机电能量转换领域的新技术和最新研究成果,充分反映了“十一五”国家级规划教材的高质量和高水平。

本书可作为理工科大学电子信息与电气工程各专业本科生教学用书,也可供有关科技人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与机电能量转换/周顺荣主编. —修订本
—上海:上海交通大学出版社,2008
21 世纪高等学校教材
ISBN978-7-313-04317-7
I. 电... II. 周... III. ①电磁场—高等学校—教材 ②机电—能量转换—高等学校—教材
IV. O441.4 TM301.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 192395 号

电磁场与机电能量转换

(修订版)

周顺荣 主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

常熟市文化印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:12.25 字数:297 千字

2006 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 2 版 2008 年 1 月第 2 次印刷

印数:3 050

ISBN978-7-313-04317-7/O·192 定价:22.00 元

版权所有 侵权必究

前 言

本书是作为理工科大学电子信息与电气工程各专业基础课程教材而编写的。

本书共分十章。前六章为电磁场部分,在矢量分析和场论知识的基础上,分别论述静电场、恒定电场、恒定磁场、边值问题和时变电磁场、电磁波的基本概念、基本定理及基本方程。后四章为机电能量转换部分,在电磁场理论的基础上,详尽叙述机电能量转换的基本原理、机电系统模型及其运动方程、机电能量转换方式、机电能量转换动力学和机电能量转换新技术。全书理论联系实际,反映了国际国内电磁场和机电能量转换领域的新技术和最新研究成果,力求提高理工科大学电子信息与电气工程各专业基础课程的教学质量和水平,使学生的专业知识赶上时代的脉搏。

本书由周顺荣担任主编。编写具体分工如下:周顺荣编写第八章、第九章的第一、二、三、五、六、七节、第十章的第一、三节,并负责制订全书大纲及对全书作了统一和定稿。周洁编写绪论、第七章、第九章的第四节、第十章的第二、四、五节;王建辉编写第一章、第二章、第三章、第四章、第五章、第六章。

上海交通大学谭弗娃教授担任本书的主审。上海交通大学金荣洪教授、李格教授、刘长红副教授对书稿也同时进行了认真的审阅。在本书的编写过程中,还得到了上海交通大学张焰教授、陈陈教授、郁惟镛教授、朱子述教授、姚若萍教授、金如麟教授、黄成军副教授、赵继敏副教授、谢宝昌副教授的关心和支持。张焰教授、金荣洪教授对本书的大纲及编写提出了许多宝贵的意见。编者在此表示真诚的感谢。

本书自2006年1月出版以来,受到广大读者的欢迎和认可,同年被列入“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”。

为了进一步提高本书的质量和使用效果,编者对本书进行了修订。主要工作是:在符号使用上做了进一步的规范和统一;在第二章和第三章增加了部分例题;改正了原书中存在的一些错误和不妥之处。经修订后,本书保留了原书内容详实、阐述清晰、理论推导严谨、文字通顺的特点,是一部内容上符合教学大纲要求,论述方法适合教学实际的比较完善的教材。

本次修订仍由原书的主要编者周顺荣、王建辉执笔,由周顺荣对全书统稿和定稿。上海交通大学谭弗娃教授对修改稿进行了详细审阅,并提出很多宝贵意见。再次向谭弗娃教授和很多使用过本书,提出过宝贵意见的人士表示衷心感谢。

由于编者的经验和水平有限,书中难免有不妥甚至谬误之处,恳请读者批评指正。

编 者

2007年11月

本书主要符号表

a_n	法向单位矢量
A	矢量磁位
B	导体所处位置的磁通密度
B	磁感应强度矢量
C	电容
C_E	电势常数
C_T	转矩常数
D	电位移矢量
D_a	转子外直径
E	电场强度矢量
E_1, E_2	一次侧、二次侧绕组内感应电动势的有效值
E_{1m}, E_{2m}	一次侧、二次侧绕组内感应电动势的最大值
e	线圈中的感应电动势
e_1, e_2	一次侧、二次侧线圈中感应的主电动势
$e_{1\sigma}, e_{2\sigma}$	一次侧、二次侧线圈中感应的漏电动势
F	线圈磁动势
F_{em}	电磁力
$\dot{F}_m$	合成磁动势
$\dot{F}_0$	空载磁动势
$\dot{F}_1, \dot{F}_2$	一次侧、二次侧磁动势
f	力
f_m	磁场吸引力
G	电导
H	磁场强度矢量
I	电流; 交变电流的每相有效值; 直流电机的负载电流
I_a	电枢电流
I_f	直流电机的励磁电流
I_m	交变电流的每相最大值; 励磁电流
$\dot{I}_m$	电流的励磁分量(励磁电流)
$\dot{I}_1, \dot{I}_2$	一次侧、二次侧电流
$\dot{I}_{1L}$	一次侧电流的负载分量
J	转动惯量

$\boldsymbol{J}$ —— 电流密度矢量
 l —— 导体切割磁力线的有效长度
 L —— 电感;自感
 $\boldsymbol{m}$ —— 面磁矩
 m_1 —— 定子相数
 M —— 互感
 $\boldsymbol{M}$ —— 磁化强度矢量
 $N_1、N_2$ —— 一次、二次绕组匝数
 P_{em} —— 电磁功率
 P_1 —— 输入功率
 P_2 —— 输出功率
 p_{ad} —— 电机的杂散损耗(附加损耗)
 p_{Cua} —— 电枢回路电阻的铜损耗
 p_{Cuf} —— 励磁回路电阻的铜损耗
 p_{Fe} —— 铁损耗
 p_{mech} —— 机械损耗
 p_0 —— 空载损耗
 $\boldsymbol{p}$ —— 电偶极矩
 $\boldsymbol{P}$ —— 电极化强度矢量
 R_a —— 电枢回路的内电阻
 q —— 电荷量
 r_a —— 电枢绕组的电阻
 R_f —— 励磁回路的总电阻
 $r_1、r_2$ —— 一次、二次绕组的电阻
 S —— 面积;异步电机的转差率
 $\boldsymbol{S}$ —— 有向面;坡印廷矢量
 T_{em} —— 电磁转矩
 T_0 —— 空载转矩
 T_1 —— 输入转矩
 T_2 —— 输出转矩
 U —— 电压;交流电压的每相有效值
 U_m —— 交流电压的每相最大值
 v —— 导体相对磁场垂直运动的线速度
 V —— 体积;电位
 V_m —— 标量磁位
 W —— 能量
 W_e —— 电能
 W_{mech} —— 机械能
 W_ϕ —— 磁场中的储能

$X_{1\sigma}, X_{2\sigma}$ ——一次、二次绕组的漏电抗

Z_L ——负载阻抗

Z_1, Z_2 ——一次、二次绕组的漏阻抗

η ——机电能量转换装置的效率

ϕ ——标量场

Φ ——线圈所匝链的磁通;主磁通

Φ_m ——铁芯中磁通的最大值

$\Phi_{1\sigma}, \Phi_{2\sigma}$ ——一次侧、二次侧漏磁通

φ ——标量场;功率因数角

Ψ ——线圈所匝链的磁链

Ω ——电机的机械角速度

ρ ——电荷密度

ϵ_r ——相对介电常数

ϵ ——绝对介电常数

ϵ_0 ——真空介电常数

μ ——磁导率

μ_r ——相对磁导率

μ_0 ——真空磁导率

γ ——导电媒质的电导率

χ_e ——电极化率

χ_m ——磁化率

目 录

绪论	1
第一节 机电能量转换的物理基础	1
第二节 机电能量转换过程中的能量关系	3
第三节 保守系统与状态函数	4
第一章 矢量分析	6
第一节 标量和矢量	6
第二节 矢量的代数运算	7
第三节 矢量的标积	7
第四节 矢量的矢积	9
第五节 标量场的方向导数与梯度	10
第六节 矢量场的通量、散度与高斯定理	12
第七节 矢量场的环量、旋度与斯托克斯定理	17
第八节 无散场与无旋场	21
第九节 格林定理	22
第十节 矢量场的唯一性定理	23
第十一节 亥姆霍兹定理	24
第十二节 正交曲面坐标系	27
第二章 静电场	35
第一节 静电场的基本方程	35
第二节 电位方程和唯一性定理	37
第三节 导体和电介质	39
第四节 电轴法	43
第五节 镜像法	48
第六节 电容和部分电容	53
第七节 静电能量和力	54
第三章 恒定电场	60
第一节 恒定电场的基本方程	60
第二节 恒定电场和静电场的比拟	61
第三节 电导和接地电阻	62

第四章 恒定磁场	66
第一节 恒定磁场的基本方程	66
第二节 标量磁位和矢量磁位	67
第三节 媒质的磁化	69
第四节 恒定磁场中的镜像法	71
第五节 电感	73
第六节 磁场能量和力	74
第七节 磁路的基础知识	77
第五章 边值问题和时变电磁场	84
第一节 边界条件和边值问题	84
第二节 电磁场的基本方程组	85
第三节 洛仑兹力公式	89
第四节 电磁能量和坡印廷矢量	90
第六章 电磁波	93
第一节 波动方程	93
第二节 理想介质中的均匀平面波	94
第三节 波的极化	99
第七章 机电系统模型及其运动方程	103
第一节 机电类比	103
第二节 机电系统的能量和拉格朗日函数	111
第三节 汉密尔顿原理与拉格朗日方程	115
第四节 用拉格朗日方程导出机电系统运动方程的步骤	119
第八章 机电能量转换方式	122
第一节 不同电压的电能转换装置	122
第二节 直流电能与机械能转换装置	124
第三节 交流电能与机械能转换装置	127
第九章 机电能量转换动力学	132
第一节 变压电能转换的方程	132
第二节 电磁装置中的能量平衡	133
第三节 电磁装置中的机械力	135
第四节 单边及多边励磁的电磁装置的动力学	140
第五节 直流机电能量转换装置的方程	154
第六节 异步机电能量转换装置的方程	159

第七节 同步机电能量转换装置的方程..... 162

第十章 机电能量转换新技术..... 167

第一节 磁悬浮技术..... 167

第二节 磁流体发电和推进技术..... 172

第三节 电磁炮..... 174

第四节 纳米技术..... 177

第五节 超导技术..... 181

参考文献..... 184

绪 论

在人们的生产实践和科学实验中,有许多将其他形式的能量转换成电能或将电能转换成其他便于利用的能量形式的装置。其中,将机械能转换成电能或将电能转换成机械能的装置,称为机电能量转换装置或机电换能器。

机电能量转换装置可分为三类:

(1) 机电信号变换器(简称变换器)。它们的功能是实现机电信号的转换,它们是在小信号下工作的传感器,用于测量和控制装置中,例如扩音器、扬声器、测速发电机和伺服电动机等。

(2) 动铁换能器。它们的功能是产生机械力,使装置的可动部分在小范围内移动,主要用于对电气设备或机械装置的切换、控制、传送和保护等,例如接触器、继电器、螺管传动机构和电磁吸力装置等。

(3) 连续机电能量转换装置。它们将机电能量连续地进行转换,例如发电机和电动机。

各种机电能量转换装置的作用和结构各有差别,但其基本原理却是类似的,之所以能发生机电能量的转换都是由于电磁场和运动的载电物体(通常为载流导体)相互作用的结果。在这里,发生“运动”是机电能量转换过程的主要特征,而所指的运动包括两个方面:机械的和电的。机械运动是指一个回路(电的、磁的或电磁的)对另一个回路在位置上发生的变化;电的运动是指回路内的电流、电压和磁链发生的变化。描述这些(机械的和电的)运动的数学方程为机电系统的运动方程。

绪论主要研究机电能量转换的基本原理,着重介绍机电能量转换过程和耦合场的作用以及实现机电能量转换的条件等。通过绪论的学习,希望能对各种机电能量转换装置中能量转换的规律有一个较系统和完整的了解。

第一节 机电能量转换的物理基础

目前,绝大多数机电能量转换装置都是以磁场作为耦合场的电磁式装置,这类机电能量转换装置的工作原理基于:电磁感应定律、电磁力定律和能量守恒定律。

一、电磁感应定律

设有一线圈位于磁场中,且有磁力线穿过线圈并与之匝链,则当该线圈中的磁链 Ψ 发生变化时,便将在线圈中产生感应电动势。当感应电动势的参考方向与磁通的参考方向符合右手螺旋定则时,用数学公式表达,电磁感应定律可写为

$$e = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (0-1)$$

如所有的磁通都匝链于线圈的全部匝数,则式(0-1)化为

$$e = - N \frac{d\Phi}{dt} \quad (0-2)$$



式中: N ——线圈串联匝数;

Φ ——磁通。

线圈中磁链的变化,可能有两种不同的方式:① 磁通本身就是由交流电流所产生,也就是说,磁通本身在变化着;② 磁通本身虽不变化,但由于线圈与磁场间有相对运动而使线圈中的磁链变化。这样,普遍说来,任何磁链总的微增量 $d\Psi$ 必为

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \quad (0-3)$$

由此可得感应电动势为

$$\begin{aligned} e &= -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= -\frac{\partial \Psi}{\partial t} - v \frac{\partial \Psi}{\partial x} = e_1 + e_r \end{aligned} \quad (0-4)$$

式中: v ——导体与磁场间的相对速度, $v = \frac{dx}{dt}$ 。

由此可知,感应电动势 e 可分为两部分:

$$e_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \text{称为变压器电动势;}$$

$$e_r = -v \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \text{称为速率电动势或运动电动势(旋转电动势)。}$$

二、电磁力定律

设有一载流导体处于磁通密度为 B 的磁场中,则该载流导体要受到电磁力的作用。若磁场与导体相互垂直,则电磁力定律的数学表达式为

$$F = B l i \quad (0-5)$$

式中: B ——导体所在处的磁通密度;

l ——导体在磁场中的长度;

i ——流过导体的电流。

电磁力的方向由左手定则确定。

多数电机做旋转运动,设所研究的导体位于电机的转子上,如把导体上所受到的切向电磁力乘以从导体到旋转轴心的距离 r ,便得到电磁转矩 T ,即

$$T = B l r i \quad (0-6)$$

三、能量守恒定律

在质量守恒的物理系统中,能量既不能产生,也不能消灭,而只能改变其存在的形态,这就是能量守恒定律。

在机电系统中,无论是起着将电能转换为机械能作用的机电装置(电动机),还是将机械能转换成电能的机电装置(发电机),它们在能量转换过程中,都必须遵守能量守恒定律。

上述电磁感应定律、电磁力定律和能量守恒定律是机电能量转换装置运行的物理基础。

第二节 机电能量转换过程中的能量关系

如前所述,任何机电装置都由电系统、机械系统和联系两者的耦合电磁场组成。通常由于机电系统的频率和运动速度较低,电磁辐射可以忽略不计,此时,根据能量守恒定律,可以写出机电装置的能量方程式

$$\text{输入的电能} = \text{耦合场中储能的增量} + \text{能量损耗} + \text{输出的机械能} \quad (0-7)$$

式(0-7)是针对电动机作用写出的,对于发电机作用,输入的电能和输出的机械能两者皆取负值。

式(0-7)中的能量损耗,通常分为三类:一类是电系统(绕组)内部的电阻损耗;另一类是机械部分的摩擦损耗和通风损耗,统称为机械损耗;还有一类是磁场或电场在介质内产生的损耗,例如时变磁场在铁芯内产生的磁滞和涡流损耗、电场在绝缘材料内产生的介质损耗等。所有这些损耗,大都变为热能而散出。

如果将以上三类损耗分别归并到相应的能量项中去,式(0-7)可改写成如下形式:

$$(\text{输入的电能} - \text{电阻损耗}) = (\text{耦合场中磁能的增量} + \text{介质损耗}) + (\text{输出的机械能} + \text{机械损耗}) \quad (0-8)$$

式(0-8)左端为扣除电阻损耗后输入耦合场的净电能;等式右边第一项为耦合场吸收的总能量,包括耦合场中储能的增量和介质中的能量损耗,第二项则为转换成机械能的全部能量,包括输出的有效机械能和系统内部的机械损耗。

将各项能量写成时间 dt 的微分形式时,式(0-8)可改写为

$$dW_e = dW_f + dW_{\text{mech}} \quad (0-9)$$

式中: dW_e ——在时间 dt 内输入耦合场的净电能;

dW_f ——在时间 dt 内耦合场吸收的总能量;

dW_{mech} ——在时间 dt 内转换成机械能的总能量。

与式(0-9)相对应的能量图示于图 0-1。

应当指出,虽然在能量转换过程中总伴随有损耗产生,但是损耗并不影响能量转换的基本过程。能量转换过程是由耦合场的变化对电系统和机械系统的反应所引起的。前面将损耗分类并进行相应的归并和扣除,即使式(0-7)化为式(0-9),实质上相当于把损耗移出,将装置抽象成无损耗的机电系统,这既突出了问题的核心——耦合场对电系统和机械系统的反应,并导出相应的机电耦合项,又使过程成为单值、可逆和便于定义系统的状态函数,给分析工作带来很大方便。

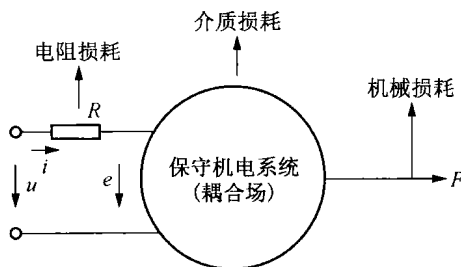
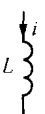
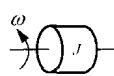
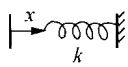
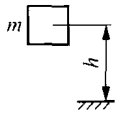


图 0-1 时间 dt 内的能量关系

第三节 保守系统与状态函数

在理想的物理系统中,有许多无损耗、可储能的元件,如表 0-1 所示。例如,在电系统中,线圈通电流时会产生磁场来储存一定的磁能,而电容器充电时会产生电场来储存一定的电场能。在机械系统中,旋转体或平移运动的物体会储存一定的动能,如弹簧被外力 F 压缩 x 长度时,所加的能量 Fx 会以位能形式储存起来;被升高的静物储存着位能等等。以上这些元件在一定的条件下可以储存能量,当条件变化时又可以部分或全部释放所储存的能量,它自身并不消耗能量,故称之为储能元件。全部由储能元件所组成的,与周围系统没有能量交换的自守物理系统称为保守系统。

表 0-1 储能元件及其储能

电 系 统		机 械 系 统			
空心线圈	电容器	旋转体	平移运动	弹 簧	静 物
 $W = \frac{1}{2} Li^2$ L : 电感 i : 电流	 $W = \frac{1}{2} Cu^2$ C : 电容 u : 电压 q : 电荷	 $W = \frac{1}{2} J\omega^2$ J : 转动惯量 ω : 旋转角速度	 $W = \frac{1}{2} mv^2$ m : 质量 v : 速度	 $W = \frac{1}{2} kx^2$ k : 刚性常数 x : 伸缩长	 $W = mgh$ h : 高度 g : 重力加速度

当把决定储能元件储能大小的变量全部用 x 表示时,如表 0-1 中的磁能改写为 $W = \frac{1}{2} Lx^2$,电场能量改写成 $W = \frac{1}{2} \frac{x^2}{C}$ 等等,这样,整个保守系统的能量 W 可表示为

$$W = W(x_1, x_2, \dots) \tag{0-10}$$

可见,保守系统的全部储能 W 是 $x_i (i=1, 2, \dots)$ 的函数,它仅与 x_i 的当前状态有关,与达到 x_i 状态的经过无关。描述系统当前状态的一组独立变量 x_i 称为状态变量。由一组状态变量所确定的、描述系统当前状态的单值函数,例如储能 W ,称为系统的状态函数。

正如磁场对铁磁物质或载流导体有力的作用,使其运动做功以显示磁场具有储能那样,储能元件处于储能状态时,对外会表现出力或电压(广义的力)的作用。

凡是与储能有关,并能以储能的函数表达的力或电压,都称为保守力,与式(0-10)相似,保守力可表示为

$$F = F(x_1, x_2, \dots) \tag{0-11}$$

它也是状态函数。

保守系统的特点是:其储能以及与储能相联系的保守力都是状态函数,两者都仅与系统的当前状态有关,而与系统的历史以及达到当前状态的路径无关。这是本书分析磁场储能和电磁力的依据之一。

前面提及的无损耗机电系统,若割断它与周围的联系,它就是一个保守系统;若考虑到系统的损耗以及与周围的能量交换,则实际机电系统都是非保守系统,并且除保守力外,还有与



状态变量无关的力,此力称为非保守力,如电源电压、外施机械力以及摩擦力等。

习 题

0-1 什么叫保守系统?保守系统有什么特点?

0-2 什么叫状态函数?在机电系统中哪些量是状态函数?

第一章 矢量分析

电磁场是矢量场,因此,矢量分析是研究电磁场特性的基本数学工具之一。本章将系统地叙述有关矢量分析的主要内容。我们首先在直角坐标系中讨论矢量的定义、矢量的代数运算以及矢量的微分与积分运算,然后根据圆柱坐标系及球坐标系与直角坐标系的变量之间的关系,推导出圆柱坐标系及球坐标系中的矢量表示及其运算规则。在这一章中,还要介绍矢量分析中的几个重要定理,即高斯定理、斯托克斯定理、格林定理、唯一性定理及亥姆霍兹定理。

第一节 标量和矢量

仅具有大小特征的量称为标量。例如长度、面积、体积、温度等物理量都是标量。不仅有大小而且具有方向特征的量称为矢量。例如:力、位移、速度、加速度、电场强度及磁场强度等物理量都是矢量。本书以黑斜体表示矢量。标量的空间分布构成标量场,矢量的空间分布构成矢量场。

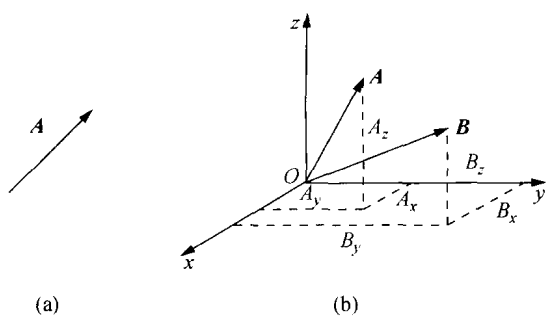


图 1-1 矢量的表示

矢量 A 的几何表示是一条有向线段,如图 1-1(a)所示,线段的长度表示矢量 A 的大小,其指向表示矢量 A 的方向。在直角坐标中,若把代表矢量 A 和 B 的有向线段的始端坐标放在坐标系的原点,如图 1-1(b)所示,则不同的矢量,其终端坐标不同。矢量 A 的终端坐标为 (A_x, A_y, A_z) ;矢量 B 的终端坐标为 (B_x, B_y, B_z) ;通常, A_x, A_y, A_z 称为矢量 A 的三个相应的坐标分量; B_x, B_y, B_z 称为矢量 B 的三个相应的坐标分量。由此可见,在三维空间中,一个矢量可用其三个坐标分量来表示。反之,三个标量可用一个矢量来代替。这正是矢量运算比标量运算简洁的原因。当然,表示一个矢量的三个标量并不是任意的,他们必须是矢量的三个坐标分量。用三个坐标分量表示一个矢量称为三维空间矢量的代数表示。可以推知,在二维空间中,一个矢量仅需要两个坐标分量来表示;而在一维空间中,一个矢量仅需要一个坐标分量。

通常,矢量的大小及方向均随空间坐标而变化,若矢量的大小和方向均与空间坐标无关,这种矢量称为常矢量。



第二节 矢量的代数运算

当矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $\mathbf{B}$ 的大小及方向均相同时,则认为 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 。因此在同一坐标系中,只有当两个矢量的各个坐标分量均相同时,才可认为两个矢量相等。

矢量可以进行加法运算,且加法运算符合结合律和交换律,即结合律

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \quad (1-1)$$

交换律

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \quad (1-2)$$

两个矢量相减可以归结为相加运算,例如

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}) \quad (1-3)$$

式中: $-\mathbf{B}$ ——与矢量 $\mathbf{B}$ 大小相等方向相反的矢量。

矢量运算的几何表示如图 1-2(a)所示。在同一坐标系中,两个矢量的加减运算就是对应坐标分量的相加或相减。例如在直角坐标系中,若矢量 $\mathbf{A}$ 的坐标分量为 (A_x, A_y, A_z) , 矢量 $\mathbf{B}$ 的坐标分量为 (B_x, B_y, B_z) , 则 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ 的合成矢量的坐标分量为 $(A_x+B_x, A_y+B_y, A_z+B_z)$ 。

矢量与标量之间可以进行乘法运算。当矢量 $\mathbf{A}$ 与正标量 η 相乘时,其乘积仍然是一个矢量,但各个坐标分量乘以 η 倍,即乘积 $\eta\mathbf{A}$ 的坐标分量为 $(\eta A_x, \eta A_y, \eta A_z)$ 。可见,若 $\eta>1$,则乘积矢量伸长;若 $0<\eta<1$,则乘积矢量缩短,如图 1-2(b)所示。可见矢量与正标量相乘时,仅矢量的大小发生改变,其方向仍然保持不变。显然,矢量与负标量相乘时,不仅大小发生改变,其方向也恰好反转。

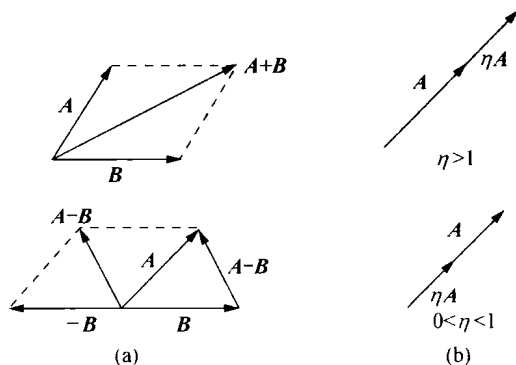


图 1-2

(a) 矢量加减; (b) 矢量与标量相乘

矢量之间的乘法运算和标量之间,以及标量和矢量之间的乘法运算规则截然不同,矢量之间的乘法运算有两种形式:标积和矢积。

第三节 矢量的标积

两个矢量的标积又称为点积或内积,以点号“ $\cdot$ ”表示。在直角坐标系中,若矢量 $\mathbf{A}$ 的坐标分量为 (A_x, A_y, A_z) , 矢量 $\mathbf{B}$ 的坐标分量为 (B_x, B_y, B_z) , 则矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $\mathbf{B}$ 标积的代数定

义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-4)$$

由此可见,两个矢量的标积是一个标量。显然,矢量标积的运算符合交换律,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-5)$$

根据矢量标积的定义可知,矢量 $\mathbf{A}$ 与其本身的标积为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1-6)$$

显然, $\sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ 为矢量 $\mathbf{A}$ 的大小。矢量的大小称为矢量的模,以绝对值符号 $|\mathbf{A}|$ 或 A 表示,即

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-7)$$

矢量模为 1 的矢量称为单位矢量。任一矢量 $\mathbf{A}$ 可写成

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

根据矢量与标量的乘法规则,得知上式中矢量 $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ 的模为 1,所以矢量 $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ 称为矢量 $\mathbf{A}$ 的单位矢量,以 $\mathbf{a}$ 表示,即

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad (1-8)$$

由此得

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} |\mathbf{A}| \quad (1-9)$$

式中: $\mathbf{a}$ ——矢量 $\mathbf{A}$ 的单位矢量,其模为 1,方向与 $\mathbf{A}$ 相同。

式(1-9)表明,任一矢量等于该矢量的模与其单位矢量的乘积。

若 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 分别表示 x 轴、 y 轴、 z 轴方向上的单位矢量,则矢量 $\mathbf{A}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $A_x \mathbf{a}_x, A_y \mathbf{a}_y, A_z \mathbf{a}_z$,那么矢量 $\mathbf{A}$ 为三个坐标轴上投影的合成矢量,即

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (1-10)$$

而矢量 $\mathbf{A}$ 的单位矢量 $\mathbf{a}$ 可表示为

$$\mathbf{a} = \frac{A_x}{|\mathbf{A}|} \mathbf{a}_x + \frac{A_y}{|\mathbf{A}|} \mathbf{a}_y + \frac{A_z}{|\mathbf{A}|} \mathbf{a}_z \quad (1-11)$$

或者写成

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x \cos \alpha + \mathbf{a}_y \cos \beta + \mathbf{a}_z \cos \gamma \quad (1-12)$$

式中:角度 α, β, γ 分别为矢量 $\mathbf{A}$ 与坐标轴 x, y, z 之间的夹角;

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ——矢量 $\mathbf{A}$ 的方向余弦。

矢量标积的几何意义如图 1-3 所示。设 $\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{a}_x, \mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y$,若矢量 $\mathbf{B}$ 与 x 轴的夹角为 θ ,则

$$B_x = |\mathbf{B}| \cos \theta$$

$$B_y = |\mathbf{B}| \sin \theta$$

那么由式(1-4)得

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (1-13)$$

式中: $|\mathbf{B}| \cos \theta$ ——矢量 $\mathbf{B}$ 在矢量 $\mathbf{A}$ 方向上的投影大小;

$|\mathbf{A}| \cos \theta$ ——矢量 $\mathbf{A}$ 在矢量 $\mathbf{B}$ 方向上的投影大小。

式(1-13)表明,标积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 等于矢量 $\mathbf{A}$ 的模与矢量 $\mathbf{B}$ 在矢量 $\mathbf{A}$ 的方向上的投影大小的乘