

概率论与数理统计

同步辅导

配浙大三版

丛书主编 北京航空航天大学 徐兵

编著 李彩荣 王志平



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

概率论与数理统计 同步辅导

配浙大三版

丛书主编 北京航空航天大学 徐兵

编著 李彩荣 王志平



大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步辅导(配浙大三版)/李彩荣,王志平编著.
—2版.大连:大连理工大学出版社,2008.7
高等学校数学学习辅导丛书
ISBN 978-7-5611-3079-7

I. 概… II. ①李…②王… III. ①概率论—高等学校—教学参考资料
②数理统计—高等学校—教学参考资料 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 131924 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail: dulp@ dulp. cn URL: http://www. dulp. cn

大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm

印张:12.5

字数:504 千字

2008 年 7 月第 2 版

2008 年 7 月第 3 次印刷

责任编辑:梁 锋 王 伟

责任校对:碧 海

封面设计:季 强

ISBN 978-7-5611-3079-7

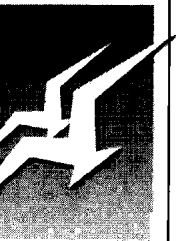
定 价:15.00 元



高等学校数学学习辅导丛书 编写委员会

主 任	北京航空航天大学	徐 兵	教授
副主任	清华大学	韩云瑞	教授
委 员	大连理工大学	姜乃斌	教授
	浙江大学	秦禹春	教授
	大连大学	王丽燕	教授
	大连海事大学	王志平	教授
	南开大学	周概容	教授

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS



总序

大学数学是高等学校各门类、专业学生必修的基础课,对理工类、经管类学生都非常重要。21 世纪是知识经济时代,数学的重要性更显突出,人们甚至把“数学力”看作是“竞争力、成功力、管理力、领导力”。对于准备报考研究生的同学来说,其重要性更是不言而喻。

作为一名从事大学数学教学和科研工作 40 余年的教师,我一直密切关注着大学数学的教育状况。我很早就注意到大连理工大学出版社一直在为学生提供高质量的教学辅导书而努力着。10 多年来,该社先后出版了 50 余种相关的大学数学辅导图书,我经常在课堂上、自习课上、考研辅导班上看到学生们在使用。我也多次仔细阅读他们的辅导书,对于图书的内在质量和选题设计,我非常认可,因此经常向学生推荐。在目前浮躁的图书市场上,大连理工大学出版社的这种真正为学生考虑的做法是非常值得弘扬的。

在出版社推出《高等学校数学系列辅导丛书》10 周年之际,我受出版社之托,担任该系列丛书编委会主任,深感责任重大。一方面,需要延续出版社一直追求的高质量的图书内在品质;另一方面,需要在对现有图书进行规划和整合的基础上,结合目前学生的需求、高校课程教学的基本要求与教学状况以及最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》有所创新。为此,本次修订主要围绕以下几个方面展开:

第一,坚持聘请名校名师亲自编写的原则。本套丛书编委会的成员全部来自知名高校,并且都是知名教师。例如,韩云瑞教授在清华大学“学生心目中的好老师”评选活动中,2005、2006 连续两年全校排名第一;大连大学的王丽燕教授一直是“学生最喜爱的老师”;南开大学的周概容教授连续 17 年担任考研《概率论与数理统计》命题组组长。这些优秀教师多年积累的教学经验一定会给学生带来意想不到的收获。

第二,对于全部习题进行重新演算,以保证解题过程的正确,而

**INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS**



且在编委会成员之间相互切磋。对于典型习题,努力寻求最优解法,对于重点例题、习题给出多种解法,以帮助学生打开解题思路。我们希望通过编委会的共同努力,可以让读者真正掌握大学数学的思想和算理。

第三,针对学生不同的学习阶段,设计了不同层次的系列图书,力图为学生提供学习数学的立体空间,引导学生全方位、多角度逐步认识并掌握大学数学,从而使得每本书都成为学生天天见面的辅导老师。大一新生刚进大学校门,要尽快适应大学的学习环境,注重夯实大学数学的基础,为学习专业课打下基础;高年级阶段,很多学生准备进一步学习深造,报考研究生,对大学数学需要进行全面复习及提高。针对这些特点,本套丛书设计了四大系列。

习题全解(全析)系列 为读者解答教材中的习题,像习题课一样,与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结,扎实掌握基础知识,领悟数学的真谛。本系列图书“不是好学生的作业本,而是优秀教师习题课的教案”。读者也可以将该系列丛书作为工具书与教材配套使用。

同步辅导系列 按节同步,讲解细致,其主要特点是“基础、同步”,帮助读者重点掌握大学数学中的“基本概念、基本理论、基本方法”。本书可以帮助学生逐步适应从中学时代“以老师讲解为主”到大学时代“以学生自学为主”学习方式的转变。

全程学习指导系列 指导学生准确理解大学数学中的概念、原理,熟练掌握解题的基本思路、方法,提高分析问题、解决问题的能力,同时,让学生熟悉研究生考试的各类题型,在大学低年级阶段就为将来报考研究生打下坚实的基础并提前做好准备。

典型题精讲系列 以习题讲解为主,在注重基本解题能力培养的同时,增加了一些题目难度较大、但颇具特色的习题,在更高层次上引导学生掌握数学的算理与数学思想。

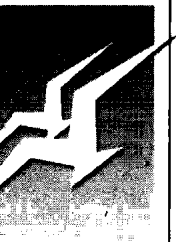
我们欢迎读者通过各种方式与我们联系,提出建议与意见,以利于本套丛书千锤百炼,惠及更多学子。

祝大家学习进步,前程似锦!

徐 兵

2006年6月

于北京航空航天大学



编者的话

《全程学习指导》系列图书自出版以来,连年加印,数次修订,成千上万的学生从中获益,我们深感欣慰。但是,在教学过程中我们也发现,仍然有相当多的学生由于不适应从中学时代“以老师讲课为主”到大学时代“以学生自学为主”学习方式的转变,再加上进入大学校门后不适应新的学习环境,使得很多学生对大学数学的学习有一种畏惧感。

《同步辅导》系列图书针对以上问题,按节同步,重在基础,讲解细致。

本书分为宏观分析和微观精讲两大部分。

宏观分析部分包括“导读”、“本章知识脉络图”和“应记应背”三个版块。

导读 介绍本章的主要内容及其相互联系、重点难点等;

本章知识脉络图 则将本章知识点以及相互联系用图表的形式直观展现,一目了然;

应记应背 将一些常用的、应该牢记的公式集中列出。理解并记住这些公式将大大提高解题效率。

本部分重在帮助读者总结、精炼、提高,是学习中“由多到少”的过程。

微观精讲部分包括“同步精讲精练”、“教材习题同步解析”和“单元测试”三个版块。

同步精讲精练 针对每一节,给出应该掌握的基本知识以及应注意点,使读者透彻、深入地理解基本概念、基本理论,这是对课堂的补充,是“弦外之音”。本版块对难点、易错点都逐一进行剖析,不

厌其烦,使读者进入课堂和伴读的环境。对于计算题,给出了做题的基本步骤。许多读者觉得学习时一看就懂,下笔就错。这实质上还是基础知识不扎实,练习少的表现。针对这一问题,本版块一方面对典型例题进行剖析,指导读者分析问题和解决问题。另一方面,针对每一节配备了精选的自我测试题,精讲精练,讲练结合,分解难点,无阶梯进步,是本板块的宗旨。

教材习题同步解析 为了方便读者对照和分析自己完成作业的情况,本书给出了配套教材中的全部习题解答。此答案只是提供一种思路,一种方法,大家千万不要照抄。

单元测试 每章末给出“单元测试”,可以作为阶段复习的成果检验。

本部分是学习中“由少到多”的过程。

为了能将平日的学习与考研有机联系,书中有针对性地选用了部分考研试题。为增加信息量,考研真题采用“年代/类别/分值”的标注方式,如“060106”,说明此题是2006年数学一的考题,分值6分。

《概率论与数理统计》是大学各门类、各专业学生必修的基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。本书严格按照教育部高等院校教学指导委员会审订的“本科数学基础课程教学基本要求”(教学大纲),以及教育部最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求编写,与被全国许多高校采用的《概率论与数理统计》(浙大第三版)配套。

希望读者通过 E-mail 等方式给我们提出宝贵意见和建议。

李彩荣 王志平

2006年7月



目 录

第一章 概率论的基本概念 / 1

导 读 / 1

本章知识脉络图 / 2

应记应背 / 2

同步精讲精练 / 3

教材习题同步解析 / 27

单元测试 / 43

第二章 随机变量及其分布 / 47

导 读 / 47

本章知识脉络图 / 48

应记应背 / 48

同步精讲精练 / 50

教材习题同步解析 / 72

单元测试 / 88

第三章 多维随机变量及其分布 / 91

导 读 / 91

本章知识脉络图 / 92

应记应背 / 92

同步精讲精练 / 94

教材习题同步解析 / 131

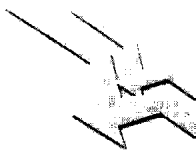
单元测试 / 155

第四章 随机变量的数字特征 / 160

导 读 / 160

本章知识脉络图 / 161

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS



应记应背 / 161
同步精讲精练 / 163
教材习题同步解析 / 197
单元测试 / 215

第五章 大数定律及中心极限定理 / 221

导 读 / 221
本章知识脉络图 / 222
应记应背 / 222
同步精讲精练 / 223
教材习题同步解析 / 229
单元测试 / 234

第六章 样本及抽样分布 / 238

导 读 / 238
本章知识脉络图 / 239
应记应背 / 239
同步精讲精练 / 242
教材习题同步解析 / 250
单元测试 / 255

第七章 参数估计 / 260

导 读 / 260
本章知识脉络图 / 261
应记应背 / 261
同步精讲精练 / 264
教材习题同步解析 / 288
单元测试 / 302

第八章 假设检验 / 308

导 读 / 308
本章知识脉络图 / 309
应记应背 / 309
同步精讲精练 / 311
教材习题同步解析 / 332
单元测试 / 351

第一章 概率论的基本概念

导 读

本章给出了概率的公理化定义,证明了概率的基本性质,并结合古典概型讨论了概率的基本算法。灵活运用这些性质和算法是计算概率的必备条件。另外,这些算法中也蕴含了概率论的基本思想方法,这种方法贯穿于本门课程的始终。因此,学好第一章就相当于掌握了开启概率论这门学科的金钥匙,祝你开启成功!

第一、二节是概率论的预备知识,给出了随机试验、样本空间、随机事件的关系与运算的定义。要正确理解事件之间的关系,清楚互斥与互逆之间的区别与联系。

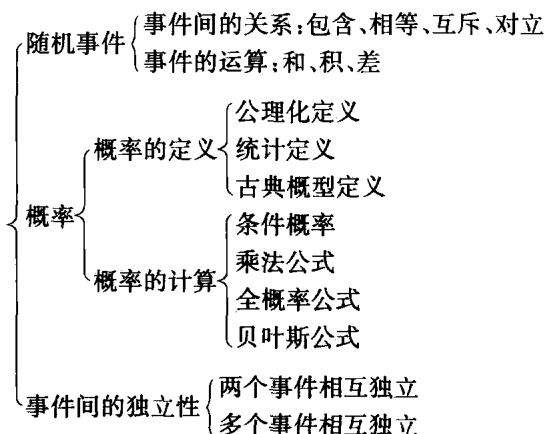
第三节给出了概率的公理化定义及计算性质。

第四节讨论了最简单的概率模型——古典概型(等可能概型)。古典概型以其样本空间的有限性及基本事件的等概率性决定了事件 A 的概率实质上就是比值,这里关键是要清楚是哪两个量的比。

第五节介绍了条件概率、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式等重要公式。掌握了这些公式,可以说不仅对所有的古典概型问题所向无敌,而且对样本空间是可列无限的情况也能着手讨论了。全概率公式实际上是将复杂事件的概率化成互不相容的简单事件之和的一种概率的算法,这恰恰是实际中人们常用的化繁为简、化整为零的解决问题方法在概率论中的应用。当然,首先要掌握样本空间的划分方法。另外,还要清楚 $P(AB)$ 与 $P(B|A)$ 的区别。

第六节——事件之间的独立性为计算乘积事件的概率提供了方便,要清楚多个事件中两两独立与相互独立的区别与联系,清楚互斥、互逆、独立之间的区别与联系。

本章知识脉络图



应记应背

1 事件之间的关系与运算

- (1) 若 $A \subset B$, 则 $\bar{A} \supset \bar{B}$, $AB = A$, $A \cup B = B$, $A - B = \emptyset$.
- (2) 若 $AB = \emptyset$, 则 $A \subset \bar{B}$, $B \subset \bar{A}$.
- (3) $A\bar{B} = A - B = A - AB$.
- (4) $A \cup B = A \cup (B - A) = B \cup (A - B) = AB \cup (A - B) \cup (B - A)$.
- (5) $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- (6) A 与 B 互斥的充要条件是 $AB = \emptyset$.
- (7) A 与 B 对立的充要条件是 $AB = \emptyset$, $A \cup B = S$.
- (8) A 与 B 独立的充要条件是 $P(AB) = P(A)P(B)$.
- (9) $A_1, A_2, \dots, A_n$ 独立的充要条件是

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

对任意 $k(2 \leq k \leq n)$, $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ 成立。

2 概率计算公式

- (1) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- (2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

$$(3) P(A\bar{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$$

$$(4) P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) > 0$$

$$(5) P(AB) = \begin{cases} P(B)P(A | B), & P(B) > 0 \\ P(A)P(B | A), & P(A) > 0 \\ P(A)P(B), & A \text{ 与 } B \text{ 独立} \end{cases}$$

$$P(ABC) = \begin{cases} P(A)P(B | A)P(C | AB), & P(AB) > 0 \\ P(A)P(B)P(C), & A, B, C \text{ 相互独立} \end{cases}$$

(6) 若 $\bigcup_{i=1}^n B_i = S, B_i B_j = \emptyset, i \neq j$, 且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\textcircled{1} P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$$

$$\textcircled{2} P(B_j | A) = \frac{P(B_j)P(A | B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)} (P(A) > 0)$$

(7) 等可能概型 $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 中基本事件数}}{S \text{ 中基本事件的总数}}$

同步精讲精练

一、二 随机试验 样本空间 随机事件

助 学

1. 试验 E 的样本空间是由 E 的所有可能结果组成的集合 S , 样本空间不一定惟一。一般根据题目要求写出样本空间。

2. 随机事件是 S 的子集, 用大写字母 $A, B, \cdots$ 表示。一次试验, 当且仅当样本点落入 A , 就意味 A 发生。

3. 事件之间的包含、相等、互斥、对立等关系以及事件的并、交、差等运算完全与集合之间的关系和运算相对应, 可以借助文氏图理解, 要习惯于用概率的语言描述事件。

例如 $A \subset B$, 从文氏图看, 样本点落入 A 就一定落入 B , 即 A 发生就一定导致 B 发

生,小事件发生一定导致大事件发生。

若 $AB = \emptyset, A \cup B = S$, 则称 A 与 B 互逆, 即每次试验 A 和 B 至少有一个发生, 且仅有一个发生。实际上 A 和 B 是 S 的一个划分。

显然, 若 A 和 B 互逆, 则 A 和 B 互斥, 反之不一定。基本事件两两互斥但却不一定互逆。

A 和 B 至少有一个发生的事件为 $A \cup B$, 凡有“至少”两字的地方一定有“ $\cup$ ”。
 A 和 B 同时发生的事件为 $A \cap B$, 凡有“同时”、“都”、“且”字的地方一定有“ $\cap$ ”。
 事件的交、并运算满足交换律、结合律和分配律:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

4. 差运算不满足算术运算规律, 一般先将差事件表示成交事件, 然后利用上述性质计算。

例如, $(A \cup B) - B = (A \cup B)\bar{B} = A\bar{B} = A - B \neq A$ 。

5. 在计算中往往需要将一个事件划分成几个互不相容事件的并运算。

【例 1-1】 从 1, 2, 3, 4 号球中随机取 2 只, 按下列情况记录取到的号码:

- (1) 每次取 1 只, 取后放回;
- (2) 每次取 1 只, 取后不放回;
- (3) 一次取 2 只。

解 (1) 放回抽取, 每次都有 4 种方式, 所以样本空间共有 16 个样本点,

$$S_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

(2) 不放回抽取, 第一次有 4 种方式, 第二次有 3 种方式, 所以样本空间共有 12 个样本点,

$$S_2 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

(3) 从 4 个球中取 2 个, 共有 $C_4^2 = 6$ 种方式,

$$S_3 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}.$$

【例 1-2】 联欢会上发给每人 5 个游戏卡片, 某人若在一项游戏中中奖, 则用自己余下的卡片领取奖品, 试记录一个人参加的游戏次数并写出样本空间。

解 一个人参加游戏的所有可能次数为 1, 2, 3, 4, 5。用 0 表示参加游戏中奖, $\times$ 表示参加游戏没中奖, 则 $S = \{0, \times 0, \times \times 0, \times \times \times 0, \times \times \times \times 0, \times \times \times \times \times\}$ 。最后一种情况切勿遗漏。

【例 1-3】 将一颗骰子连续掷两次, (1) 记录出现的点数; (2) 设 A_k, B_k 分别表示出现的最大点数是 k 和最大点数小于等于 k , 试写出 A_k, B_k 。

解 每次有 6 种方式, 共有 36 种方式,

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \dots, (6, 6)\}.$$



$$A_1 = \{(1,1)\}, A_2 = \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$$

$$A_3 = \{(1,3), (2,3), (3,3), (3,1), (3,2)\}$$

$$A_4 = \{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$A_5 = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

$$A_6 = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$$

$$B_1 = \{(1,1)\}, B_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

$$B_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$B_4 = \{(1,1), \dots, (1,4), (2,1), \dots, (2,4), (3,1), \dots, (3,4), (4,1), \dots, (4,4)\}$$

$$B_5 = \{(1,1), \dots, (1,5), (2,1), \dots, (2,5), (3,1), \dots, (3,5), (4,1), \dots, (4,5), (5,1), \dots, (5,5)\}$$

$$B_6 = S$$

显然 $A_k = B_k - B_{k-1}$, $B_0 = \emptyset$. 最大点数是 k , 还可以分成第一次出现的是 k 点、第二次出现的点数小于 k 和第一次出现的点数小于 k 、第二次出现的是 k 点, 以及两次出现的都是 k 点的情况。

【例 1-4】 设 A, B, C 是三个事件, 已知 A 和 B 都不发生时, C 也不发生, 下列说法正确的是:

- (1) A 和 B 都发生时, C 必然发生;
- (2) C 不发生时, A 和 B 都不发生;
- (3) C 发生时, A 和 B 至少有一个发生;
- (4) C 发生时, A 和 B 至少有一个不发生。

解 由题意知, $\overline{A}\overline{B} \subset \overline{C}$, 所以 $C \subset A \cup B$. (3) 正确。

【例 1-5】 设 A, B 为两个已知事件, 事件 X 满足 $\overline{A} \cup \overline{X} \cup X \cup \overline{A} = B$, 求 X 。

解 $\overline{A} \cup \overline{X} \cup X \cup \overline{A} = (\overline{A} \cup X)(\overline{X} \cup \overline{A}) = B$

$$(\overline{A} \cup X)(X \cup \overline{A}) = (\overline{A} \cup X)X \cup (\overline{A} \cup X)\overline{A} = \overline{B} \quad (*)$$

因为 $X \subset (\overline{A} \cup X)$, 所以 $(\overline{A} \cup X)X = X$ 。

因为 $(\overline{A} \cup X)\overline{A} = X\overline{A} \subset X$, 所以式 (*) 左端为 $X \cup X\overline{A} = X$ 。

于是

$$X = \overline{B}$$

自我测试

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 5 件产品中有 2 件次品, 逐件进行测试, 直至将所有次品找到为止, 记录测试的结果;

(2) 甲乙 2 人下棋, 先胜两局者为赢家, 记录比赛结果;

(3) 甲乙 2 人轮流射击, 甲先射, 先击中目标者为最后得胜者, 记录比赛结果。

2. 用 A, B, C 表示下列事件:

(1) A, B, C 至少有两个发生; (2) A, B, C 至多有两个发生; (3) A, B, C 至多有一个发生; (4) A, B, C 都发生; (5) A, B, C 都不发生; (6) A, B, C 不都发生。

3. 下列结论正确的是()。

(1) $(A - B) \cup B = A$; (2) 若 $AB = AC$, 则 $B = C$;

(3) 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$; (4) $\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$ 表示 A, B, C 至多发生一个。



参考答案及提示

1. 解 (1) 设 1 表示正品, 0 表示次品, S 中每个样本点最后一个都是 0, 之前各位中有一个 0, 按测试次数,

$$S = \{00, 010, 100, 0110, 1010, 1100, 01110, 10110, 11010, 11100\}$$

也可以只写测试次数, $\Omega = \{2, 3, 4, 5\}$, 但后面会看到这对解题没意义。

(2) 设 A 和 B 分别表示一局甲胜和乙胜, 按比赛局数,

$$S = \{AA, BB, ABA, BAA, ABB, BAB\}$$

(3) 设 A 和 B 分别表示一枪甲中和乙中。甲赢, 总射击次数为奇数; 乙赢, 总射击次数为偶数, 按射击次数,

$$S = \{A, \overline{A}B, \overline{A}\overline{B}A, \overline{A}B\overline{A}B, \overline{A}\overline{B}A\overline{B}A, \dots\}$$

2. 解 (1) “至少”, 并运算,

$$AB \cup AC \cup BC = ABC \cup \overline{A}BC \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C}$$

(2) 将“至多”换成“至少”, 可以这样考虑, 设 X 为发生的个数, Y 为未发生的个数, $X = 3 - Y \leq 2$, 所以 $Y \geq 1$, 即 A, B, C 至少有一个不发生,

$$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = \overline{A}BC \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

A, B, C 至少有一个不发生与 A, B, C 同时发生互为逆事件, 所以

$$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = \overline{ABC}$$

(3) 将“至多”换成“至少”, 即 A, B, C 至少有两个不发生,

$$\overline{A}\overline{B} \cup \overline{A}\overline{C} \cup \overline{B}\overline{C} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C}$$

(4) “都”, 交运算, ABC ;

(5) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(6) 不“都发生”是“都发生”的逆事件, $\overline{ABC}$ 。

3. 解 (1) 错。

$$(A - B) \cup B = (\overline{A}B) \cup (AB \cup B) = (\overline{A}B \cup AB) \cup B = A \cup B$$

(2) 错。显然当 $A = BC$ 时, $AB = AC$, 但未必有 $B = C$;

(3) 错。当 $B \subset A, C \subset A$ 时, $A \cup B = A \cup C = A$, 但未必有 $B = C$;

(4) 正确。三个事件至少有两个发生的逆事件为至多有一个发生, 即发生事件的个数 $\{X \geq 2\}$ 与 $\{X \leq 1\}$ 互逆。

三、频率与概率

助 学

频率 $f_n(A)$ 与试验有关。设想如果抛 10 次硬币出现 6 次正面,那么再抛 10 次硬币正面未必出现 6 次。但是随机现象的内在规律是客观存在的,每次试验中,事件 A 发生的可能性是确定的,由此产生了概率的公理化定义。本节根据概率的定义证明了概率的 6 条计算性质,熟练掌握这些性质是计算概率的重要前提。

自我测试

1. 已知 $P(A) = 0.7, P(A - B) = 0.3$, 求 $P(\overline{AB})$ 。
2. 已知 $P(\overline{A}\overline{B}) = 1/16, P(AB) = P(A)P(B), P(\overline{AB}) = P(\overline{A}\overline{B})$, 求 $P(A)$ 。
3. 甲乙两人下棋,甲胜的概率为 0.6,乙胜的概率为 0.4。设 A 为甲胜, B 为乙胜,则甲胜乙输的概率为()。

- A. $P(\overline{AB}) = P(A)P(\overline{B}) = 0.6 \times 0.6$;
- B. $P(\overline{AB}) = P(A - AB) = 0.6 - 0.6 \times 0.4$;
- C. $P(\overline{AB}) = P(A) - P(B) = 0.6 - 0.4$;
- D. $P(\overline{AB}) = P(A) = 0.6$ 。

上述结果哪个正确?

4. 下列正确的是()。
- A. 若 $P(A) \geq P(B)$, 则 $B \subseteq A$;
- B. 若 $A \subset B$, 则 $P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})$;
- C. 若 $P(A) = P(AB)$, 则 $A \subseteq B$;
- D. 若 10 次试验中 A 发生了 2 次, 则 $P(A) = 0.2$ 。



参考答案及提示

$$1. P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

$$P(AB) = P(A) - P(A - B) = 0.7 - 0.3 = 0.4$$

$$\text{所以 } P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 0.6$$

$$2. \text{ 因为 } P(\overline{AB}) = P(\overline{A}\overline{B}), P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB), \text{ 所以 } P(A) = P(B).$$

$$\text{设 } P(A) = p, \text{ 因为 } P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 2p + p^2 = 1/16, \text{ 所以 } p = P(A) = 3/4.$$

3. 正确答案选 D。甲胜与乙输是同一个事件。

因为 $A = \overline{B}$, 所以 $P(\overline{AB}) = P(A) = 0.6$ 。

A. 错。因为 $P(\overline{AB}) \neq P(A), P(\overline{B})$ 。

B. 错。因为 $P(AB) \neq P(A)P(B), P(AB) = 0$ 。

C. 错。因为 $B \not\subset A$ 。