面向21世纪高职高专规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE
XUESHENG SHIXUN SHOUCE

学生实训手册

主　编　夏一方
主　审　万里亚

电子科技大学出版社

面向21世纪高职高专规划教材

高等数学学生实训手册

GAODENG SHUXUE XUESHENG SHIXUN SHOUCE

主　编　夏一方
副主编　江庆华
主　审　万里亚

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学生实训手册 / 夏一方主编. —成都：电子科技大学出版社，2010.6

ISBN 978-7-5647-0519-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①夏… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 109184 号

高等数学学生实训手册

主　编　夏一方

副主编　江庆华

主　审　万里亚

出　　版： 电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）

策划编辑： 谢晓辉

责任编辑： 谢晓辉　袁　野

主　　页： www.uestcp.com.cn

电子邮箱： uestcp@uestcp.com.cn

发　　行： 新华书店经销

印　　刷： 南京文博印刷厂

成品尺寸： 170mm×230mm　　**印张** 8　　**字数** 152 千字

版　　次： 2010 年 6 月第一版

印　　次： 2010 年 6 月第一次印刷

书　　号： ISBN 978-7-5647-0519-0

定　　价： 15.00 元

前　　言

从数学知识的学习到数学知识的应用，不是一件简单的、自然而然就能实现的事情，没有充分的、有意识的培养、训练和实践，学生的数学应用意识、兴趣和能力是不会形成的。为了培养学生的数学应用意识、兴趣和能力，引导学生用所学的数学知识、数学方法去观察、分析、解决实际问题，我们编写了《高等数学学生实训手册》，

本教材的编写是根据行动导向教学法的理念，参考国内外先进的职业教育的模式，经反复研讨，设计了一个新型的科学训练程序，在每章节（除第五章）的能力训练中，均按照下列五个步骤组织教学和训练：

1．目标（Object）：依据本章节训练的活动内容和技能要求作具体解释和说明。呈现本章节特定的学习目标，它包括知识目标和能力目标，以使学习者明确学习内容，确认自己学习行动的目的。

2．准备（Prepare）：对理解与掌握本章节能力点“应知”内容的列举和说明。知识是能力形成的基础，掌握必需的基本知识以及能力形成的基本方法、程序，是提高能力训练效益的重要前提。

3．任务（Task）：对本章节能力点在实际工作任务中典型状态的描述和意义的呈现。通过列举典型例题和项目案例，分析能力表现形态，让学习者形成基本认知；并通过该能力点运用的意义阐述，形成学习者的学习动力。

4．行动（Action）：以行动导向教学法组织训练的主体部分和重点环节。采用任务驱动、案例分析等教学方法训练能力点。它是示范性和写实性的，是能力培训的落脚点。

5．评估（Evaluate）：对本章节教学过程中教师如何评价教学效果和学习者如何评估自己学习收获的一个指引。通过教师、同学和本人的自我监控，及时了解学习的成果，获得反馈。

本教材在内容的编排上注重科学性、实用性和可操作性，把数学基本知识和数学应用有机地结合起来，为大学生在大学阶段的数学应用意识、兴趣和能力的培养提供系统的解惑答疑和能力训练。

本教材的框架结构及最终审定稿由夏一方完成，参加编写的有陈莉敏、朱静、

吴亚伟、唐晓芙、江庆华、夏一方；万里亚负责全书的审核。

本教材在编写过程中借鉴和参考了有关专家的著作及论文，并汲取了许多精华，引用了一些同行的案例，在本教材出版之际，谨向这些论著的作者和同行表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中难免有不妥之处，我们衷心地希望得到广大读者的批评指正，以使本书在教学实践中不断完善起来。

编　者

2010 年 5 月

目　录

第一章　函数极限及连续

一、教学目标

（一）知识目标

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数和分段函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限（包括左极限与右极限）的概念.
6. 理解无穷小的概念和基本性质. 了解无穷小的比较方法. 了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.
7. 了解极限的性质，掌握极限的四则运算法则，掌握两个重要极限公式.
8. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续）.
9. 了解闭区间上连续函数的性质.

（二）能力目标

1. 能将实际问题表示成函数形式，并能根据函数性质分析实际问题.
2. 能熟练求解函数的定义域.
3. 能用无穷小的性质和无穷小的代换求解函数极限.
4. 能用极限的四则运算和重要极限公式求解极限.
5. 能求解分段函数在分段点处的极限.
6. 能判断函数的连续与间断.

二、基本知识

（一）基本概念

1．函数

设x和y是两个变量，D是一给定数集，若对于每个数$x \in D$，变量y按照一定的法则都有唯一确定的数值与之对应，则称y是x的函数，记作：$y = f(x), x \in D$．其中x称为自变量，y称为因变量．集合D称为函数$y = f(x)$的定义域．全体函数值的集合$\{y | y = f(x), x \in D\}$称为函数$y = f(x)$的值域．记作：$M$.

必须明确函数定义的两个基本要素是定义域与对应法则.

2．基本初等函数

由幂函数 $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in R)$、指数函数 $y = a^{x}\ (a > 0$ 且 $a \neq 1)$、对数函数 $y = \log_a x\ (a > 0$ 且 $a \neq 1)$、三角函数和反三角函数构成了基本初等函数.

3．复合函数

设函数$y = F(u)$的定义域为D，函数$u = \varphi(x)$的值域为Z，若$Z \cap D \neq \phi$，则y可通过中间变量u构成x的函数，称这个函数为由函数$y = F(u)$和函数$u = \varphi(x)$构成的复合函数，记为$y = F[\varphi(x)]$.

特别要注意的是：不是任何两个函数都可以构成一个复合函数.

4．初等函数

基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合构成，且可以用一个数学式子表示的函数，称为初等函数.

初等函数是高等数学的主要研究对象.

5．极限

（1）若当$|x|$无限增大（即$x \to \infty$）时，函数值$f(x)$无限地接近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x \to \infty$时的极限，记作：

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to \infty).$$

（2）若当x无限地接近于定值x_0时，函数值$f(x)$无限地接近于一个确定的常

数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0).$$

（3）若当自变量 x 小于 x_0 而趋于 x_0（或 x 大于 x_0 而趋于 x_0）时，函数值 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的左极限（或右极限），记作：

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad （或 \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A）.$$

6. 无穷大

若当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ 时的无穷大量，简称无穷大.

注意（1）无穷大是变量，不能理解为绝对值很大的数.

（2）无穷大总是和自变量的变化趋势相对应的.

7. 无穷小

若当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小量，简称无穷小.

注意（1）零是唯一的一个可以作为无穷小的常数.

（2）无穷小是变量，不能理解为绝对值很小的数.

（3）无穷小是和自变量的变化趋势相对应的.

8. 无穷小量的比较

设 α 和 β 是同一变化过程中的两个无穷小，

（1）若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$；

（2）若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

（3）若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小. 特别地，当 $c = 1$ 时，称 β 与 α 是等阶无穷小，记作 $\beta \sim \alpha$.

9. 连续

（1）设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若当自变量 x 在点 x_0 处的增量 Δx 趋于零时，函数相应的增量 Δy 也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处

连续，x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

（2）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，x_0 称为函数 $f(x)$ 的连续点.

（3）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续；设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

简单地说，连续函数的图形能一笔画成.

10．间断点

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，x_0 称为函数 $f(x)$ 的间断点.

（1）可去间断点：当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但不等于 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值时，称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.

（2）跳跃间断点：当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在，但不相等时，称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点.

（3）无穷间断点若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

无穷间断点属第二类间断点.

（二）基本公式与结论

1．极限运算法则

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$.

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

若极限 $\lim f(x)$ 存在，则

（1）$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)\quad$（$c$ 为常数）.

（2）$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n\quad(n\in N_+)$.

2．几个充要条件

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$．

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$．

（3）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

3．两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$．

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$．

4．闭区间上连续函数性质

（1）$[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

（2）$[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值.

（3）若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\varepsilon\in(a,b)$，使得 $f(\varepsilon)=0$．

（4）若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$．

（三）基本题型

1．求函数的定义域

常见的求定义域的类型主要有：

（1）分式中的分母不等于零.

（2）偶次方根式中，被开方式大于等于零.

（3）含有对数的式子，真数式大于零.

（4）反正弦、反余弦符号内的式子的绝对值小于等于 1.

（5）分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.

（6）若已知 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a,b]$，求 $y=f[g(x)]$ 的定义域，方法是解不等式组 $a\leqslant g(x)\leqslant b$．

2．函数符号的运用

（1）已知函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的表达式，求 $f[g(x)]$.
讨论 $y=f(u)$ 的定义域 D，$u=g(x)$ 的值域 Z，判断 D 与 Z 的交集是否为空集.

（2）已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式，求 $f(x)$.

3．求极限

求函数的极限首先要观察自变量的变化和函数表达式，然后选择适当方式. 一般地，函数极限有以下几种求法：

（1）利用函数的连续性求函数极限. 即若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

（2）若求分段函数在分段点处的极限，则利用极限存在的充分必要条件求极限.

（3）$\dfrac{0}{0}$ 型不定式：

- 用代数的方法消去零因子；
- 用等价无穷小量代换法；
- 极限式中含有三角函数，则利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

（4）$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式：

- 用代数的方法消去无穷因子；
- 分子、分母为多项式，则比较分子分母的多项式的最高次数

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}.$$

（这里 $a_n\neq 0$，$b_m\neq 0$，m 和 n 为非负整数）

（5）$\infty-\infty$ 型与 $0\cdot\infty$ 型的不定式.
用代数的方法化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再用上述方法求解.

（6）1^∞ 型不定式

将所求极限的函数转化为 $(1+\dfrac{1}{u})^u$ 或 $(1+u)^{\frac{1}{u}}$ 的形式，利用 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 和

$\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$ 来求极限.

4．判定函数的连续性及间断点

（1）利用函数连续性的定义，考察 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$ 的极限

（2）讨论分段函数在分界点 x_0 的连续性时可考察：

- x_0 点是否有定义；
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 是否存在；
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 是否相等.

（3）利用初等函数在其定义域内是连续函数的结论来讨论

三、例 题 精 选

例 1　求函数：$f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$ 的定义域.

解　要使函数有意义，必须分母不为零：$x^2-4 \neq 0$，

负数不能开偶次方：$x+1 \geqslant 0$，

对数中的真数必须大于零：$\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}>0$，

即求解不等式组 $\begin{cases} x^2-4 \neq 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}>0 \end{cases}$　　得 $x>2$，

所以，$f(x)$ 定义域为：$(2,+\infty)$.

例 2　设函数 $f(x)=\begin{cases} 3x & |x|>1 \\ |x| & |x|<1 \\ 2 & |x|=1 \end{cases}$，求 $f(-2), f(-1), f(0), f(2)$.

解　分段函数计算某点 x 的函数值时，首先要看清 x 属于定义域中哪一个区间，然后用相应的表达式求该点的 $f(x)$ 值.

$$f(-2)=3\times(-2)=-6，\quad f(-1)=2，\quad f(0)=0，\quad f(2)=3\times 2=6.$$

例 3　将下列函数写成分段函数：

第一章　函数极限及连续

（1） $y=3-|x-1|$ （2） $f(x)=|x^2-2|$

解 （1）根据绝对值的定义可知：

当 $x-1<0$ 即 $x<1$ 时，$|x-1|=-(x-1)$；

当 $x-1\geqslant 0$ 即 $x\geqslant 1$ 时，$|x-1|=x-1$；

因此有 $y=\begin{cases}3+(x-1) & x<1\\ 3-(x-1) & x\geqslant 1\end{cases}$ 即 $y=\begin{cases}2+x & x<1\\ 4-x & x\geqslant 1\end{cases}$.

（2）据绝对值的定义可知：

当 $x^2-2<0$ 即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，$|x^2-2|=-(x^2-2)$；

当 $x^2-2\geqslant 0$ 即 $x\geqslant\sqrt{2}$ 或 $x\leqslant-\sqrt{2}$ 时，$|x^2-2|=x^2-2$.

因此有 $y=\begin{cases}2-x^2 & -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\\ x^2-2 & x\geqslant\sqrt{2}\text{或}x\leqslant-\sqrt{2}\end{cases}$.

例 4 下列各组函数是否可以构成复合函数 $f[g(x)]$：

（1） $f(u)=\arccos u$， $u=g(x)=3+x^2$

（2） $f(u)=\ln u$， $u=g(x)=4x-4-x^2$

（3） $f(u)=\arcsin u$， $u=g(x)=\sqrt{1-x^2}$

（4） $f(u)=\sqrt{u}$ $u=g(x)=\dfrac{1}{2x-1-x^2}$

解 （1） $g(x)$ 的值域 $[3,+\infty)$ 与 $f(u)=\arccos u$ 的定义域 $[-1,1]$ 的交集是空集，因此这组函数不能构成复合函数 $f[g(x)]$.

（2） $g(x)$ 的值域 $(-\infty,0]$ 与 $f(u)=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 的交集是空集，因此这组函数不能构成复合函数 $f[g(x)]$.

（3） $g(x)$ 的值域 $[0,1]$ 与 $f(u)=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 的交集不是空集，因此这组函数能构成复合函数 $f[g(x)]=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

（4） $g(x)$ 的值域 $(-\infty,0)$ 与 $f(u)=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 的交集是空集，因此这组函数不能构成复合函数 $f[g(x)]$.

例 5 试分析下列函数是由哪几个基本初等函数复合而成的？

（1） $y=\sqrt{\ln\tan\sqrt{x}}$ （2） $y=\ln^2\arccos x^3$

解 （1） $y=\sqrt{u}$， $u=\ln v$， $v=\tan t$， $t=\sqrt{x}$.

（2） $y=u^2$， $u=\ln v$， $v=\arccos t$， $t=x^3$.