



普通高等教育“十一五”
国家级规划教材

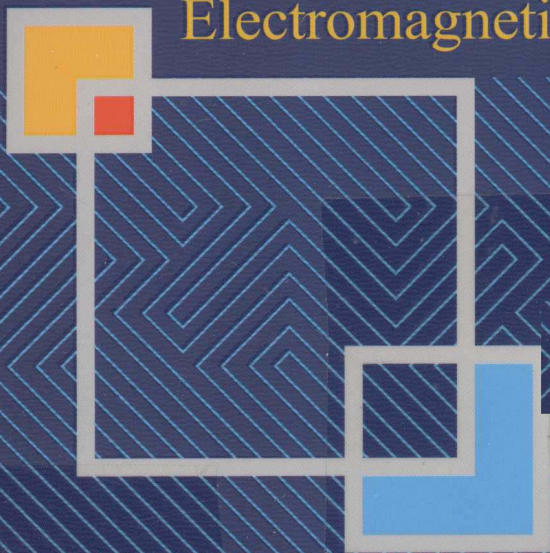
柯亨玉 龚子平 编著

电磁场理论 基础 (第2版)

国家精品课程配套教材

21st Century University Planned Textbooks of Information and Communication Engineering

Fundamentals of
Electromagnetic Fields Theory (2nd Edition)



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS



名师名校



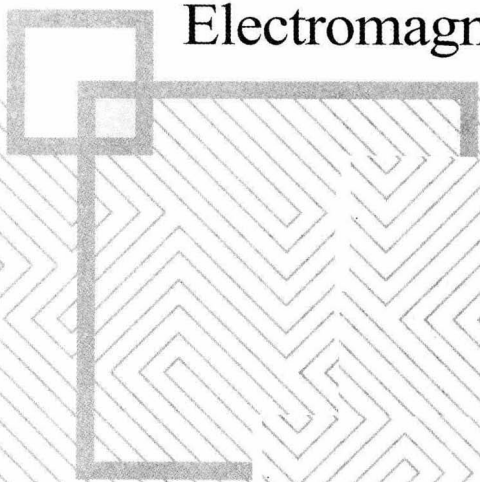
普通高等教育“十一五”
国家级规划教材

柯亨玉 龚子平 编著

电磁场理论 基础 (第2版)

国家精品课程配套教材
21世纪高等院校信息与通信工程规划教材
21st Century University Planned Textbooks of Information and Communication Engineering

Fundamentals of
Electromagnetic Fields Theory (2nd Edition)



人民邮电出版社
北京



名师名校

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论基础 / 柯亨玉, 龚子平编著. — 2版
— 北京: 人民邮电出版社, 2011. 2
21世纪高等院校信息与通信工程规划教材
ISBN 978-7-115-24312-6

I. ①电… II. ①柯… ②龚… III. ①电磁场—高等
学校—教材②电磁波—高等学校—教材 IV. ①0441. 4

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第242633号

内 容 提 要

本书系统介绍了宏观电磁场的基本理论及应用。内容包括电磁场理论的数学基础、宏观电磁场的实验定律和麦克斯韦方程、静态电磁场基本问题及其求解方法、时变电磁场基本问题及分析方法、电磁波的辐射与天线概念、电磁波的传播理论基础、导电电磁波基础理论和电磁场的数值分析方法简介。此外, 为了使读者对电磁场与电磁波的应用有所了解, 在介绍电磁场和电磁波基础理论的同时, 分别介绍了电磁波的频谱结构、雷达的基本概念、相控阵天线概念、卫星定位(GPS)技术理论基础、光纤通信等内容。

本书可作为高等学校电子与通信类专业的教材, 亦可作为从事相关领域科技工作者的参考书。

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

21世纪高等院校信息与通信工程规划教材

电磁场理论基础(第2版)

-
- ◆ 编 著 柯亨玉 龚子平
责任编辑 滑 玉
执行编辑 董 楠
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
中国铁道出版社印刷厂印刷
 - ◆ 开本: 787×1092 1/16
印张: 18.5 2011年2月第2版
字数: 452千字 2011年2月北京第1次印刷

ISBN 978-7-115-24312-6

定价: 34.00元

读者服务热线: (010)67170985 印装质量热线: (010)67129223

反盗版热线: (010)67171154

广告经营许可证: 京崇工商广字第0021号

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材，也是国家精品课程“电磁场理论”的配套教材。该教材是在作者原编著的《电磁场理论》教材的基础上，按照武汉大学电子与信息类学科专业 2007 年教学改革方案，结合近年来国内外电磁场理论教学改革趋势和作者的教学实践体会编写而成的。

全书共 9 章，第 1 章为数学预备知识，简要介绍矢量分析和场论基础；第 2 章着重介绍宏观电磁场的基本实验和理论体系；第 3 章介绍静态电磁场的基本概念、基础理论和基本问题；第 4 章介绍电磁场问题求解的解析方法；第 5 章介绍时变电磁场的基本概念、基础理论和基本问题，第 6、7、8 章分别介绍电磁波的辐射、传播和传输及其在若干新技术中的应用问题；第 9 章为计算电磁学简介。为适应不同教学学时安排的需要，目录中带*的章节为选讲内容。本书适用于电子与信息类本科专业“电磁场理论”、“电磁场与电磁波”等课程的教学。

在本书的撰写过程中，围绕“掌握电磁场与电磁波的基本属性、运动规律、分析方法、基本技能，了解电磁波的应用领域；培养理性思维、应用数学方法解决问题能力、综合应用知识能力和创新意识”的课程教学目标，体现“注重基础、突出能力、追求创新、发展个性”的教学改革思路，进行了如下的探索和尝试。

1. 以“实验—理论—技术—应用”为主线，力求理论体系完整而又能够与新技术发展相兼容。在内容上除保持体系完整外，将雷达、相控阵天线、卫星定位（GPS）、卫星通信、潜艇通信、光纤通信等高技术纳入教学内容，直接与学科前沿接轨，引导学生尽快进入科学技术发展的前沿。

2. 以理工渗透为指导思想，注重物理概念、数学方法、电子信息技术与电磁场理论应用的联系。突出理性思维、举一反三和知识的综合应用；在概念、定义、定理和定律的建立上，突出物理问题的本质，以及从概念到新技术的创新过程；在方法、公式建立过程中突出应用数学方法提炼和解决问题。

3. 为方便教与学以及开展课堂讨论，作者结合科研和教学实践，编写了部分思考和练习题，对每一章编写了主要问题和主要内容，以帮助读者巩固学习过的基本知识，训练他们解决问题的能力，提高他们综合应用知识的水平。

本书是在人民邮电出版社国家级规划教材建设计划、武汉大学教学改革和教材建设计划的支持下完成的，书稿编写前后历经 3 年，并在 3 届学生中讲授。武汉大学侯杰昌审阅了全部书稿，田茂撰写了 GPS 技术的初稿，武汉大学电磁波理论及应用教学团队各位同仁提出了许多建议和修改意见，在此表示衷心感谢。

由于编者学术水平和知识结构的局限,书中难免存在缺点和错误之处,欢迎广大读者批评指正。

编者于武昌珞珈山

2010年11月

目 录

第 1 章* 矢量分析与场论基础	1	第 2 章 宏观电磁场理论基础	28
1.1 正交曲线坐标系	1	2.1 电荷与电流	28
1.1.1 正交曲线坐标	1	2.1.1 电荷与电荷密度	28
1.1.2 正交曲线坐标的变换	2	2.1.2 电流与电流密度	29
1.1.3 空间曲线段的弧长	5	2.1.3 电荷守恒定律	30
1.2 矢量及其运算	6	2.2 静电场	30
1.2.1 矢量的分量表示	6	2.2.1 库仑定律	30
1.2.2 矢量代数运算	6	2.2.2 电场与电场强度	31
1.2.3 矢量微分运算	8	2.2.3 静电场的基本性质	32
1.3 标量场及其梯度	9	2.3 恒定电流的磁场	34
1.3.1 场的概念	9	2.3.1 安培定律	34
1.3.2 标量场的等值面	9	2.3.2 毕奥-萨伐尔定律	35
1.3.3 方向导数	10	2.3.3 磁感应强度的基本性质	36
1.3.4 标量场的梯度	10	2.4 麦克斯韦方程组	39
1.3.5 梯度运算的基本公式	11	2.4.1 法拉第电磁感应定律	39
1.3.6 正交曲线坐标系中梯度的 表达式	12	2.4.2 位移电流	40
1.4 矢量场及其散度	12	2.4.3 麦克斯韦方程组	42
1.4.1 矢量场与矢量线	12	2.4.4 电磁场对带电粒子的作用力	43
1.4.2 矢量场的通量	13	2.5 介质的电磁特性	43
1.4.3 矢量场的散度与通量源	14	2.5.1 介质的基本概念	43
1.4.4 体积分的高斯定理	15	2.5.2 介质的极化与束缚电荷	45
1.4.5 散度的有关公式	16	2.5.3 电位移矢量的高斯定理	46
1.5 矢量场的旋度	17	2.5.4 介质的磁化与磁化电流	47
1.5.1 矢量场的环量	17	2.5.5 介质中的毕奥-萨伐尔 定律	48
1.5.2 矢量场的旋度与旋涡源	18	2.5.6 导电介质与传导电流	49
1.5.3 面积分的斯托克斯定理	20	2.5.7 介质中的麦克斯韦方程组	49
1.5.4 旋度的有关公式	21	2.5.8 介质的分类	50
1.6 矢量场的亥姆霍兹定理	21	2.6 电磁场的边界条件	53
1.6.1 亥姆霍兹定理	21	2.6.1 介质分界面的电磁场	53
1.6.2 δ 函数及其性质	22	2.6.2 边界的法向分量条件	53
1.6.3 亥姆霍兹定理的证明	23	2.6.3 边界的切向分量条件	54
本章小结	24	本章小结	55
思考与练习	26	思考与练习	57

第3章 静态电磁场	59	4.2.1 分离变量方法的思想	92
3.1 静电场及其方程	59	4.2.2 分离变量方法的应用	94
3.1.1 电位函数	59	4.3 格林函数方法	100
3.1.2 静电场的边界条件	60	4.3.1 格林函数方法的基本思想	100
3.1.3 导体及其边界条件	61	4.3.2 静态电磁场的格林函数方法	101
3.1.4 静态电场的定解问题	62	4.3.3 格林函数的对称性	103
3.2 静电场的能量与静电力	64	4.3.4* 格林函数的物理模型	104
3.2.1 静电场的能量	64	4.3.5 格林函数方法的应用	106
3.2.2 带电体系的静电作用力	66	4.4 镜像方法	108
3.3* 导体系的电容	68	4.4.1 镜像方法的基本思想	108
3.3.1 导体系的电位与电位系数	68	4.4.2 镜像方法的求解步骤	109
3.3.2 导体系的电容系数和感应系数	69	4.4.3 镜像方法的应用举例	110
3.3.3 部分电容	70	4.5* 势函数的多极矩展开	114
3.4* 恒定电流的电场	71	4.5.1 体分布源产生的势	114
3.4.1 导体中恒定电流与恒定电场	71	4.5.2 电位函数的电多极矩展开	115
3.4.2 欧姆定律	72	4.5.3 电多极矩的意义	116
3.4.3 电源及电动势	73	4.5.4 小电荷体与外场的相互作用	118
3.4.4 恒定电场的方程	74	4.5.5 磁矢势的磁多极矩展开	119
3.5 恒定电流的磁场	74	本章小结	121
3.5.1 恒定电流磁场的磁矢势	74	思考与练习	122
3.5.2 磁矢势的定解问题	75	第5章 时变电磁场	124
3.5.3 小电流环(磁偶极子)的磁场	76	5.1 时变电磁场的势函数	124
3.5.4 恒定电流磁场的标量磁位	77	5.1.1 电磁场的波动方程	124
3.6* 载流线圈的电感	78	5.1.2 时变电磁场的势函数	125
3.6.1 自电感与互电感	78	5.1.3 势函数的规范	126
3.6.2 自感系数的计算	80	5.1.4 规范变换的不变性	127
3.7 磁场的能量与磁场力	81	5.2 推迟势及其意义	129
3.7.1 磁场的能量	81	5.2.1 推迟势的定解问题	129
3.7.2 载流体系的磁场作用力	82	5.2.2* 推迟势的求解	129
本章小结	84	5.2.3 推迟势的物理意义	131
思考与练习	86	5.3 时变电磁场的能量	131
第4章 静态电磁场的解析方法	88	5.3.1 能量的守恒定律	131
4.1 静态电磁场的唯一性定理	88	5.3.2 时变电磁场能量的传播	133
4.1.1 静态电磁场的基本方程	88	5.4 时变电磁场的唯一性定理	134
4.1.2 静态电磁场的唯一性定理	89	5.4.1 时变电磁场的唯一性定理	134
4.1.3 唯一性定理应用举例	91	5.4.2 唯一性定理的证明	134
4.2 分离变量方法	92	5.5 谐变电磁场	135

5.5.1 谐变电磁场及其复数表示	135	6.5 天线的一般概念	170
5.5.2 谐变电磁场的麦克斯韦 方程组	136	6.5.1 半波振子天线	170
5.5.3 谐变电磁场能量和能流 密度	137	6.5.2 天线的基本参数	171
5.5.4 谐变电磁场的波动方程	138	6.6* 雷达的基本原理	176
5.5.5 谐变电磁场的边界条件	139	6.6.1 雷达的基本概念	176
5.6 时变电磁场的简谐展开	139	6.6.2 目标的距离测量	177
5.6.1 时变电磁场面临的问题	139	6.6.3 目标方位测量	177
5.6.2 时变电磁场解的基本构成	140	6.6.4 目标运动速度测量	179
5.6.3 时变电磁场的简谐展开	141	6.6.5 雷达方程	180
5.7 均匀平面电磁波	142	6.7* 卫星定位技术简介	182
5.7.1 无源空间的谐变电磁场	142	6.7.1 卫星定位技术发展历史	182
5.7.2 理想介质中平面电磁波	144	6.7.2 卫星定位的基本原理	183
5.7.3 平面电磁波的相干叠加	146	6.7.3 GPS 卫星的组成简介	184
5.7.4 平面电磁波的极化	148	本章小结	185
本章小结	150	思考与练习	187
思考与练习	151	第 7 章 电磁波的传播	189
第 6 章 电磁波的辐射	153	7.1 行波、驻波与波的阻抗	189
6.1 天线辐射场及其特点	153	7.1.1 波的反射、行驻波状态	189
6.1.1 天线外部的电磁场	153	7.1.2 介质的等效波阻抗	192
6.1.2 天线外电磁场的结构特点	155	7.1.3 应用举例	193
6.1.3 磁矢势的多极矩展开	156	7.2 平面波对理想介质的斜入射	195
6.2 电流振子(电偶极子)天线	157	7.2.1 相位匹配原则	195
6.2.1 电流振子天线的结构	157	7.2.2 菲涅耳公式	196
6.2.2 电流振子激发的电磁场	158	7.2.3 全透射现象	198
6.2.3 电流振子天线辐射场的 特性	159	7.2.4 全反射与表面波	199
6.2.4 辐射功率与辐射电阻	160	7.3 导电介质中的电波传播	200
6.3 广义麦克斯韦方程组	162	7.3.1 导电介质中的电荷分布	200
6.3.1 麦克斯韦方程组的对偶性	162	7.3.2 导电介质中的电波传播	201
6.3.2 广义麦克斯韦方程组	162	7.3.3 趋肤效应与穿透深度	203
6.3.3 电偶极子与磁偶极子的 对偶性	164	7.3.4 表面阻抗与波的反射	206
6.3.4 广义麦克斯韦方程的应用—— 口径天线	166	7.4 电磁波速度与介质色散	207
6.4 时变电磁场的镜像原理	168	7.4.1 电磁波速度的含义	207
6.4.1 时变电磁场的镜像原理	168	7.4.2 相位的传播速度	208
6.4.2 电(磁)振子的镜像方法	169	7.4.3 波包的传播速度	208
		7.4.4 群速与相速的关系	210
		7.4.5 色散与波形的失真	211
		7.5 电磁波的衍射	213
		7.5.1 惠更斯原理	213
		7.5.2 辐射条件	214

7.5.3*	小孔衍射	215	8.5*	圆柱形介质波导——光纤	249
7.6	各向异性介质中的电波传播	217	8.5.1	圆柱状介质波导	249
7.6.1	各向异性介质	217	8.5.2	射线分析方法	250
7.6.2	磁化等离子体	218	8.5.3	光纤中场的方程	251
7.6.3	磁化等离子体的张量介电常数	218	8.5.4	本征值问题及解	252
7.6.4	电离层中的平面波	221	8.6*	电磁波的激发——谐振腔	253
	本章小结	224	8.6.1	从LC回路到谐振腔	253
	思考与练习	227	8.6.2	谐振腔内场的方程	254
第8章	导行电磁波	229	8.6.3	电磁振荡的本征频率	255
8.1	电磁波的频谱	229	8.6.4	谐振腔的品质因素	256
8.1.1	电磁波的频谱结构	229		本章小结	256
8.1.2	各频段电磁波的主要特点	230		思考与练习	261
8.2	导波系统的基本原理	231	第9章	电磁场的数值方法导论	262
8.2.1	导波系统的基本要求	231	9.1	计算电磁学简介	262
8.2.2	导波系统内电磁波的方程	231	9.2	有限差分方法	263
8.2.3	导波系统的横电磁波模式	233	9.2.1	有限差分法的基本原理	263
8.2.4	导波系统的横电(磁)波模式	234	9.2.2	二维泊松方程的差分格式	263
8.3	同轴线导波系统	236	9.2.3	边界条件的离散化处理	265
8.3.1	横电磁波模式的传输问题	236	9.2.4	差分方程组的求解方法	268
8.3.2	横电磁波模式的传输	238	9.3	矩量法	275
8.3.3	横电波和横磁波模式的传输	239	9.3.1	矩量法的基本思想	275
8.3.4	同轴线的工程设计	242	9.3.2	基函数与权函数的选择	278
8.4	矩形金属波导	243	9.3.3	算子方程的建立	279
8.4.1	波导的产生	243	9.3.4	矩量法的应用实例	280
8.4.2	矩形波导中场的分布	243	9.4	电磁场仿真软件简介	283
8.4.3	矩形波导中电磁波传播特性	245	9.4.1	CST工作室	283
8.4.4	矩形波导的主模及场的分布	247	9.4.2	Ansoft HFSS	283
			9.4.3	FEKO	284
				本章小结	285
				思考与练习	286
				附录 常用符号表	287
				参考文献	288

第 1 章 ※ 矢量分析与场论基础

矢量分析和场论是分析电磁场与电磁波的基本工具。本章首先介绍空间正交曲线坐标系及其变换和矢量的基本运算。然后，引入场的概念，重点讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度，以及场与激励源的关系。最后讨论矢量场的亥姆霍兹（Hermann von Helmholtz, 1821~1894）定理。

1.1 正交曲线坐标系

1.1.1 正交曲线坐标

为确定空间任意点 P 的位置，可通过参考点 O 选择由 3 个参数确定的 3 组相互独立无关的曲面，使其相交于 P 点，则 P 点的位置被这 3 组曲面的交点唯一确定。相交于 P 点的 3 组曲面有多种可能的选择，通常选用 3 组相互正交的曲面（即交点处 3 曲面的法矢相互正交），如图 1-1 所示。3 组相互正交的曲面形成相交于 P 点的 3 条相互正交的曲线。因此空间任意点的位置又可以通过 3 条相互正交曲线的交点来确定。该 3 条相互正交的曲线组成确定三维空间任意点位置的体系，称为正交曲线坐标系，3 条正交曲线称为坐标系中的坐标轴，描述坐标轴相对于参考点 O 的参量称为坐标变量，坐标轴所对应曲面上任意点的单位切向矢量方向为该坐标轴方向。

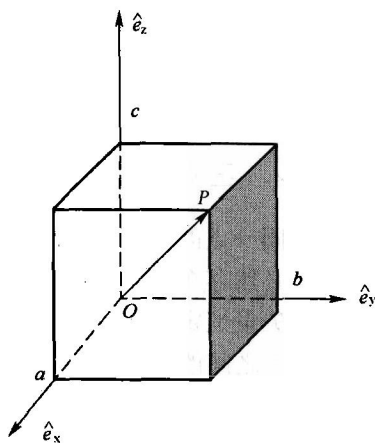


图 1-1 直角坐标系

以 (q_1, q_2, q_3) 表示空间正交曲线坐标系的 3 个坐标轴的变量，如直角坐标系中 3 个坐标变量分别是

$$\begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = y \\ q_3 = z \end{cases}, \quad -\infty < x, y, z < \infty \quad (1-1-1)$$

3 个坐标轴单位方向矢量分别是平面 $q_1 = x = c_1$ 、 $q_2 = y = c_2$ 、 $q_3 = z = c_3$ 所对应的单位法矢量，记为 $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ 。很明显，直角坐标系坐标轴的方向矢量为恒矢量。

经常使用的正交曲线坐标系有圆柱坐标系、球坐标系、抛物柱面坐标系等。圆柱坐标系如图 1-2 所示, 其坐标变量是

$$\begin{cases} q_1 = \rho \\ q_2 = \varphi \\ q_3 = z \end{cases}, \quad 0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty \quad (1-1-2)$$

3 个坐标轴上的单位方向矢量是 $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$, 分别是柱面 $q_1 = \rho = c_1$, 平面 $q_2 = \varphi = c_2$ 、 $q_3 = z = c_3$ 的单位法矢量。圆柱坐标系坐标轴的方向矢量为变矢量。

球坐标系如图 1-3 所示, 坐标变量为

$$\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = \varphi \end{cases}, \quad 0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (1-1-3)$$

3 个坐标轴上的单位方向矢量是 $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$, 它们分别是球面 $q_1 = r = c_1$, 锥面 $q_2 = \theta = c_2$ 和平面 $q_3 = \varphi = c_3$ 的单位法矢量。球坐标系坐标轴的方向矢量为变矢量。

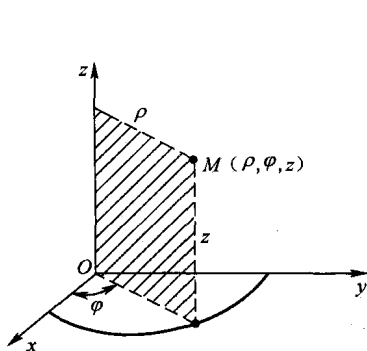


图 1-2 圆柱坐标系

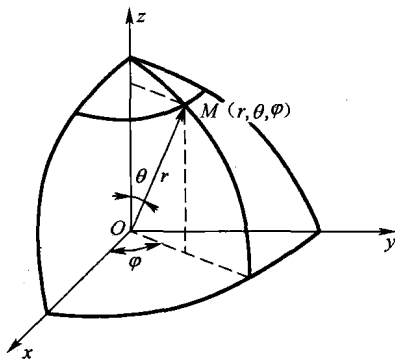


图 1-3 球坐标系

1.1.2 正交曲线坐标的变换

空间同一点的位置可以用不同的正交曲线坐标系的坐标量表示。因此, 不同正交曲线坐标系之间必然存在相互变换的关系, 且这种变换关系一一对应。由于直角坐标系 3 坐标轴的单位方向矢量恒定不变, 相互正交, 几何上简单直观, 人们经常通过任意正交曲线坐标系与直角坐标系之间的关系来描述该正交坐标系。

在直角坐标系中, 空间任意正交曲线坐标系的 3 个坐标变量可以表示为

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{cases} \quad (1-1-4a)$$

反之, 直角坐标系的坐标变量在相应的正交曲线坐标系中也有类似的表达式, 即

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad (1-1-4b)$$

因此, 式(1-1-4a)和式(1-1-4b)给出了任意正交曲线坐标系与直角坐标系坐标变量之间的变换关系。

根据图1-4所示的几何关系, 得到直角坐标系与圆柱坐标系的变换关系是

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z = z \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (1-1-5)$$

球坐标系与直角坐标的变换关系为

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1-1-6)$$

柱坐标系与球坐标系的变换关系为

$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \sin^{-1} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ \varphi = \varphi \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \rho = r \sin \theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1-1-7)$$

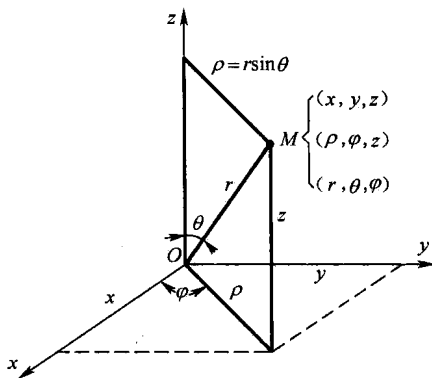


图1-4 直角坐标系、柱坐标系和球坐标系的关系

正交曲线坐标系有一组描述坐标轴方向的单位矢量, 如直角坐标系中的 $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, 圆柱坐标系中的 $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$ 等。任意正交曲线坐标系中坐标轴方向的单位矢量是该坐标变量为某个数值时所对应曲面

$$q_i = q_i(x, y, z) = C_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-1-8)$$

的单位法矢量, 如图 1-5 所示。利用高等数学方法求得该曲面的单位法向矢量为

$$\hat{e}_{q_i} = \frac{\hat{e}_x \frac{\partial q_i(x,y,z)}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial q_i(x,y,z)}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial q_i(x,y,z)}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial q_i(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i(x,y,z)}{\partial z}\right)^2}} \quad i=1,2,3 \quad (1-1-9)$$

此即正交曲线坐标系中坐标轴 q_i 方向的单位矢量。

不同正交曲线坐标系的坐标轴方向矢量同样存在相互变换的关系, 如直角坐标系与圆柱坐标系坐标轴方向单位矢量之间的关系为

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} \quad (1-1-10)$$

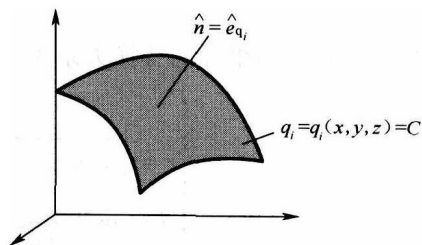


图 1-5 曲面的法向矢量

事实上, 式 (1-1-9) 不仅给出了正交曲线坐标系中坐标轴方向单位矢量的表达式, 同时也给出了正交曲线坐标系与直角坐标系坐标轴方向矢量之间的变换关系, 即

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_{q_1} \\ \hat{e}_{q_2} \\ \hat{e}_{q_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1(x,y,z)}{\kappa_1 \partial x} & \frac{\partial q_1(x,y,z)}{\kappa_1 \partial y} & \frac{\partial q_1(x,y,z)}{\kappa_1 \partial z} \\ \frac{\partial q_2(x,y,z)}{\kappa_2 \partial x} & \frac{\partial q_2(x,y,z)}{\kappa_2 \partial y} & \frac{\partial q_2(x,y,z)}{\kappa_2 \partial z} \\ \frac{\partial q_3(x,y,z)}{\kappa_3 \partial x} & \frac{\partial q_3(x,y,z)}{\kappa_3 \partial y} & \frac{\partial q_3(x,y,z)}{\kappa_3 \partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} \quad (1-1-11)$$

其中,

$$\kappa_i = \sqrt{\left(\frac{\partial q_i(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i(x,y,z)}{\partial z}\right)^2}, \quad i=1,2,3 \quad (1-1-12)$$

为坐标轴方向矢量归一化系数。

【例 1-1】 球坐标系中 3 个坐变量为 (r, θ, φ) , 求球坐标系中 3 个坐标轴的单位方向矢量在直角坐标系中的表达式。

解: 式 (1-1-6) 给出的球坐标与直角坐标之间的关系, 直接求微分得到

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{r}\sin\theta \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

将上述结果代入式 (1-1-12), 求得

$$\begin{cases} \kappa_1 = \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\cos\theta)^2} = 1 \\ \kappa_2 = \frac{1}{r}\sqrt{(\cos\theta\cos\varphi)^2 + (\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-\sin\theta)^2} = \frac{1}{r} \\ \kappa_3 = \frac{1}{r\sin\theta}\sqrt{(-\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2} = \frac{1}{r\sin\theta} \end{cases}$$

球坐标系中 3 个坐标轴方向的单位矢量是

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} \quad (1-1-13)$$

1.1.3 空间曲线段的弧长

在直角坐标系中，空间相邻两点的弧长为

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (1-1-14)$$

其中 dx 、 dy 、 dz 是相邻两点坐标变量的改变量，同时也是直角坐标系中坐标变量的微小变化所对应的弧长。

在任意正交曲线坐标系中，空间相邻两点的弧长也有类似的表达式，但由于正交曲线坐标的改变量不一定与弧长对应，如在圆柱坐标系中，坐标变量 φ 有 $d\varphi$ 的改变量，其对应的弧长改变量是 $\rho d\varphi$ 。为此我们设某个坐标变量 q_i 有 dq_i 的改变量，变化前后空间两点的弧长为

$$ds_i = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (1-1-15)$$

式中， dx 、 dy 、 dz 为 dq_i 变化而引起的改变量，其值为

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right) dq_i, \quad dy = \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right) dq_i, \quad dz = \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right) dq_i$$

将其代入式 (1-1-15)，得到坐标变量 q_i 有 dq_i 改变所对应的弧长是

$$ds_i = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} dq_i = h_i dq_i \quad (1-1-16)$$

式中，

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i=1,2,3 \quad (1-1-17)$$

称为拉梅 (G. Lamé, 1795~1870) 系数。如果正交曲线坐标系中坐标变量的改变量为 dq_1 、 dq_2 、 dq_3 ，则变化前后相邻两点的弧长为

$$ds = \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2} = \sqrt{(h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2} \quad (1-1-18)$$

可见，正交曲线坐标系坐标变量 q_i 的微小变化 dq_i ，变化前后相邻两点弧长的表达式与直角坐标系不同，这种不同源于正交曲线坐标系的坐标变量并不一定都具有弧长量所致。

【例 1-2】 求圆柱坐标系中 $P_1(\rho, \varphi, z)$ 点至 $P_2(\rho + d\rho, \varphi + d\varphi, z + dz)$ 点的弧长。

解：利用圆柱坐标与直角坐标的关系式 (1-1-5)，求得拉梅系数为

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0 \rightarrow h_1 = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2} = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow h_2 = \rho \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \rho$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \rightarrow h_3 = 1$$

$$ds|_{P_1 P_2} = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2}$$

用同样的方法, 得到球坐标系中 $P_1(r, \theta, \varphi)$ 点至 $P_2(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ 点的弧长为

$$ds|_{P_1 P_2} = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2}$$

1.2 矢量及其运算

1.2.1 矢量的分量表示

既有数值又有方向的量称为矢量; 反之, 只有数值大小而无方向的量称为标量。如物体受到的作用力 \boldsymbol{f} 、运动速度 \boldsymbol{v} 、电场强度 \boldsymbol{E} 和磁场强度 \boldsymbol{H} 等是矢量; 温度 T 、气体密度 ρ 、电流强度 I 等为标量。在本书中, 矢量用黑斜体字母 (如 \boldsymbol{F}) 表示; 标量用斜体字母表示 (如 u)。在直角坐标系中, 矢量 \boldsymbol{F} 可用 3 个独立分矢量的叠加表示:

$$\boldsymbol{F} = \hat{e}_x F_x + \hat{e}_y F_y + \hat{e}_z F_z \quad (1-2-1a)$$

其中, $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ 表示直角坐标系 3 个坐标轴方向上的单位矢量, (F_x, F_y, F_z) 为矢量 \boldsymbol{F} 在 3 个坐标轴方向上的分量或投影, 如图 1-6 所示。为了表达上的方便, 用下标 1、2、3 表示 x 、 y 、 z 轴, 式 (1-2-1a) 可以简写为

$$\boldsymbol{F} = \hat{e}_x F_x + \hat{e}_y F_y + \hat{e}_z F_z = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i F_i \quad (1-2-1b)$$

同样, 任意正交曲线坐标系中矢量 \boldsymbol{F} 也有类似直角坐标系中的分量表达式, 矢量 \boldsymbol{F} 在任意正交曲线坐标系中某个坐标轴上的分量或投影为

$$F_i = (\boldsymbol{F} \cdot \hat{e}_i) = |\boldsymbol{F}| \cos \Theta_i \quad (1-2-2)$$

其中, Θ_i 为矢量 \boldsymbol{F} 与坐标轴 q_i 的单位矢量 \hat{e}_i 的夹角, $|\boldsymbol{F}|$ 是矢量的模, 参考图 1-6, 其值为

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \quad (1-2-3)$$

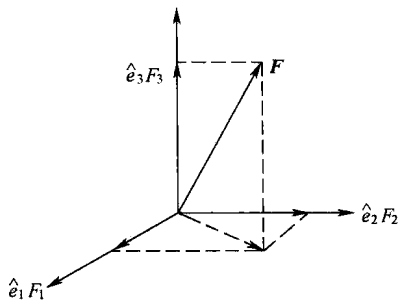


图 1-6 矢量在直角坐标系中的分解

1.2.2 矢量代数运算

1. 矢量的标量积

矢量 \boldsymbol{A} 和 \boldsymbol{B} 的标量积 (又称内积或点积) 是一个标量, 定义为

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}| |\boldsymbol{B}| \cos \theta_{AB} \quad (1-2-4)$$

其中, θ_{AB} 为矢量 A 和 B 的夹角。在正交曲线坐标系中, 矢量 A 和 B 的标量积为

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = B \cdot A = \sum_{i=1}^3 B_i A_i \quad (1-2-5)$$

由于矢量的标量积是一个标量, 所以具有交换性, 即 $A \cdot B = B \cdot A$ 。

标量积的一个实例是外力对运动物体做功。外力 F 作用在运动物体上, 使物体产生位移 dL , 外力所做功为力 F 与物体位移 dL 的标量积, 即

$$dw = F \cdot dL \quad (1-2-6)$$

如果物体在外力作用下从 P_1 点移动到 P_2 点, 外力做功为 (1-2-6) 式的积分, 即

$$w = \int_{P_1}^{P_2} dw = \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dL$$

2. 矢量 A 与 B 的叉积

矢量 A 与 B 的叉积为一个新的矢量 C , 定义为

$$C = A \times B = |A| |B| \sin \theta_{AB} \hat{n} \quad (1-2-7)$$

新矢量 C 的大小为矢量 A 和 B 所构成的平行四边形的面积, 其方向为矢量 A 与 B 所构成平面的法矢量, 且 A 、 B 和 C 之间满足右手螺旋关系, 如图 1-7 所示。

由于 A 、 B 叉积所得新矢量 C 的方向与矢量 A 、 B 的顺序有关, 且 $\sin \theta_{AB} = -\sin \theta_{BA}$, 所以矢量 A 和 B 的叉积不满足交换律, 即

$$A \times B = -B \times A \neq B \times A$$

矢量叉积的一个典型应用是磁场对带电运动粒子的作用力。根据磁场安培定律, 运动速度为 v 、电荷量为 q 的带电粒子受磁感应强度 B 的作用力为 $F = qv \times B$ 。

在直角坐标系中, 利用矢量的分量表达式, A 和 B 的叉积又可表示为

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \quad (1-2-8)$$

式中, A_i 、 B_i ($i=1,2,3$) 分别表示矢量 A 和 B 在 x 、 y 、 z 方向的分量。如果矢量为直角坐标轴上的单位矢量, 由于两两相互正交, 容易得到

$$\begin{cases} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1 \\ \hat{e}_x \times \hat{e}_x = \hat{e}_y \times \hat{e}_y = \hat{e}_z \times \hat{e}_z = 0 \\ \hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z \\ \hat{e}_y \times \hat{e}_z = \hat{e}_x \\ \hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y \end{cases} \quad (1-2-9)$$

3. 三矢量的混合积和叉积

三矢量 A 、 B 、 C 的混合积定义为矢量 A 与 B 的叉积所得到的矢量再与矢量 C 的标量积, 所以三矢量 A 、 B 、 C 的混合积是一个标量。应用直角坐标系中矢量的分量表示, 三矢量的混

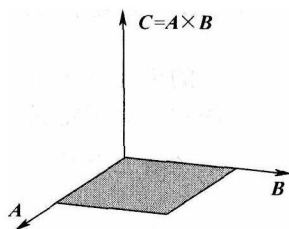


图 1-7 矢量的叉积

合积表示为

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (1-2-10)$$

其中, A_i 、 B_i 、 C_i ($i=1,2,3$) 分别表示矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 在 x 、 y 、 z 方向的分量。利用上式, 可以证明三矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 的混合积满足:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = (\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{C}) = (\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (1-2-11)$$

三矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 的叉积定义为矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的叉积所得的矢量再与矢量 \mathbf{C} 的叉积。因此, 三矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 的叉积为一新的矢量。在直角坐标系中, 三矢量的叉积定义为

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ A_2 & A_3 & B_2 & B_3 \\ B_2 & B_3 & A_3 & A_1 \\ C_1 & C_2 & C_3 & \end{vmatrix} \quad (1-2-12)$$

1.2.3 矢量微分运算

矢量的模和方向保持不变的矢量称为常矢量; 反之, 模或方向变化的矢量称为变矢量, 即矢量函数。对于定义区间 $t \in [t_1, t_2]$ 中每一个 t 值, 如果有唯一确定的矢量 $\mathbf{F}(t)$ 与之对应, 则称在该区域上定义了一个矢量函数。因此, 可以应用数学分析的方法来研究矢量函数的有关性质。

矢量函数 $\mathbf{F}(t), t \in [t_1, t_2]$, 如果

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t} \quad (1-2-13)$$

极限存在, 则称此矢量函数 $\mathbf{F}(t)$ 在 t 处可导, $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$ 为该点的导矢量。在一般情况下, 矢量的增量 $\Delta \mathbf{F}$ 不一定与矢量 \mathbf{F} 的方向相同, 如图 1-8 所示。如果 \mathbf{F} 是一个常矢量, 则 $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$ 等于零。如果矢量函数的一阶导矢量 $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$ 仍然是一个矢量函数, 则还可以求出高阶导矢量。从几何上不难发现, $\frac{d\mathbf{F}}{dt}$ 是矢量末端轨迹曲线在 t 处切线。

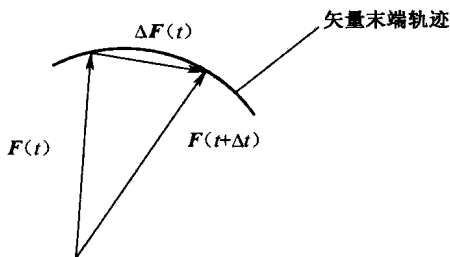


图 1-8 变矢量的微分及意义