"十一五"国家重点图书

俄罗斯数学教材选译

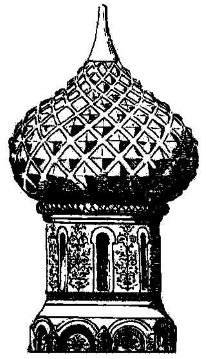
非线性动力学定性理论方法

（第二卷）

□ Leonid P. Shilnikov
Andrey L. Shilnikov
Dmitry V. Turaev
Leon O. Chua 著

□ 金成桴 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



俄罗斯数学
教材选译

“十一五”国家重点图书

● 数学天元基金资助项目

非线性动力学定性理论方法

Feixianxing Donglixue Dingxing Lilun Fangfa

（第二卷）

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字: 01–2009–7934 号

METHODS OF QUALITATIVE THEORY IN NONLINEAR DYNAMICS, PART II

图书在版编目（CIP）数据

非线性动力学定性理论方法. 第 2 卷 /（俄罗斯）施尔尼科夫（Shilnikov, L.P.）等著；金成桴译. — 北京：高等教育出版社，2010.9

ISBN 978-7-04-029464-4

Ⅰ.①非… Ⅱ.①施…②金… Ⅲ.①非线性力学：动力学 Ⅳ.①O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 131098 号

策划编辑	李　鹏	**责任编辑**	蒋　青	**封面设计**	张　楠
责任绘图	尹　莉	**版式设计**	王　莹	**责任校对**	杨雪莲
责任印制	陈伟光				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2010 年 9 月第 1 版
印　　张	27.5	**印　　次**	2010 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	570 000	**定　　价**	69.00 元

物料号 29464-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为

主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

中文版序

我很高兴为我们的书《非线性动力学定性理论方法》(Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics) 的第一卷和第二卷的中文版写这个序. 该书原来的思想和内容是俄文的, 但是首先是由世界科技出版公司 (World Scientific) 于 1998 年和 2001 年出版英文版, 再由计算机研究院出版社 (Институт компьютерных исследований) 和有序与混沌动力学出版社 (Regular and Chaotic Dynamics) 分别于 2004 年和 2009 年从英文翻译回到俄文版, 感谢高等教育出版社现在出版中文版. 这样, 对本书的读者将有更多的科学语言可使用.

本书系统地讨论了动力系统简单极限集的所有主要分支, 这些极限集包括稳定平衡态, 周期轨道和不变环面. 但是重点是对高维系统中的大范围分支 —— 同宿分支和异宿分支的讨论. 通常这种无形解是大部分非线性系统中复杂动力学的主要组织中心. 我们对同宿研究所用的关键方法都得到了严格的论述且具有完全的一般性. 我高兴地强调大范围分支的工具箱中的大部分工具在这里即在 Nizhny Novgorod (以前的 Gorky) —— 大家引以为豪的世界著名的 Andronov 非线性振动学派的基地得到了发展.

这本特别偏爱数学技巧的严格的教科书为大学生和研究生水平的数学课程打下了坚实的基础. 本书也可作为工程或者任何其它非线性动力学交叉学科的参考书以及一本十分透彻的自学教材. 书中包含有大量的迄今为止还没有在教科书中出版的大范围分支材料. 其中包括许多第一次详细阐述的新奇分支, 例如蓝天突变以及鞍点和鞍 - 焦点之间的各种同宿连接和异宿连接. 这些新颖分支现在已经在非线性动力学的各种应用, 例如在神经科学、医学、化学和流体力学中被广泛地发现. 本书已经被横跨欧美和俄罗斯的大学中普遍地作为动力系统的教材, 当然我也希望这个趋势将延伸到中国.

现今中国正在崛起. 当我于 2002 年接受邀请在北京的世界数学家大会上递送题为《分支理论与奇怪吸引子》的报告而访问这个国家的时候亲眼目睹了她的指数式飞速增长. 我想这个国家如果没有科学和研究的发展, 那么她的经济的显著发展也是不可能的. 一个明显的迹象是在纯粹数学与应用数学、物理和生命科学的中国研究的各种不同顶级杂志大量增长. 我希望用中文母语出版的我们的这两卷书将进一步鼓舞和培养中国新一代的非线性动力学家.

最后, 我仅代表合著者感谢金成桴教授为我们全书所作的出色翻译工作.

Leonid Shilnikov
Nizhny Novgorod
2010 年 6 月

译者序

由国际著名动力系统专家 L.Shilnikov 等四人合写的这部《**非线性动力学定性理论方法**》一书共分两卷 (中本版按英文版 Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics, World Scientific 出版社出版的第一卷 (1998), 第二卷 (2001) 翻译. 该书现已出版俄文译本, 第一卷 (2004), 第二卷 (2008). 本书是前苏联著名 Andronov 非线性振动学校继 Andronov, A. A., Vitt, A. A. 和 Khaikin, S. E. 的《**振动理论**》, Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. E. 和 Maier, A. G. 的《**平面动力系统分支理论**》以及 Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. E. 和 Maier, A. G. 的《**平面动力系统理论**》等著名著作 (原书都为俄文版, 现在都有英文版) 后又一部关于非线性动力学理论方法的优秀著作. 该书除介绍平面动力系统分支理论的重要结果以外, 主要以严谨的数学理论为基础, 介绍高维动力系统 (连续和离散) 的定性理论和分支理论. 其介绍的理论和方法介于基础教科书和抽象动力系统理论之间.

由常微分方程和映射 (包括微分同胚) 定义的动力系统的高维分支理论在上世纪 60 年代开始得到了很大发展, 特别是那时出现了这种系统的混沌解. 为了研究这种以前没有发现过的新现象的发展规律, 必须对高维分支问题作系统而细致的分析. 但是高维定性理论和分支问题比平面情形复杂得多. 平面系统由于有著名的 Poincaré-Bendixson 理论, 它们的极限集相对比较简单, 高维情形就不一样, 其不变集除了平衡态、周期轨线、鞍点分界线连接以外, 还可以有其它更加复杂的不变集, 如奇怪吸引子等.

本书作者用新的方法详细阐述了由常微分方程和映射 (包括微分同胚) 定义的系统的高维定性理论和分支问题. 他们从对平衡态和周期轨线邻域内线性化系统的特征值作更细致分划开始, 详细分析了平衡态和周期轨线 (特别是与混沌性态有关的高维空间中的鞍点, 鞍 - 结点, 鞍 - 焦点等各类, 各类同宿回路和异宿环) 邻域内

的轨线性态, 用他们的边值问题新方法分析局部和大范围各类不变流形 (包括不变叶层) 的存在性、光滑性. 最后详细并严格地讨论了各类局部分支和大范围分支 (包括余维 2 分支), 其中包含有通向混沌道路的分支.

本书对有关问题的发展历史, 与实际问题的联系介绍得很清楚, 对问题的来龙去脉也介绍得很详细. 书中用到较高深的数学概念一般都有说明, 定理证明大多比较细致. 但必须指出, 书中有些公式和分支的推导是借助于有关计算机软件得到的, 用通常的分析方法一般很难办到. 读者开始接触时不要被搞得望而生畏. 欲知其详, 建议读者可参考译者不久前翻译并由科学出版社出版的库兹涅佐夫著的《**应用分支理论基础**》(2010 版) 一书, 那里对分支理论的数值分析有较详细的介绍, 并有一些具体计算例子, 例如, 如何用 MAPLE 命令计算 Hopf-Hopf 分支的 Poincaré 规范形以及用其它专适用于动力系统分支理论的软件计算分支曲线等.

还值得一提的是本书两卷的序言写得特别详细, 这在一般著作中也是少有的, 特别是第二卷, 作者花了相当大的篇幅介绍非线性动力学有关课题的发展历史以及各章内容, 读者可以经常回过头来反复查看. 另一个值得注意的是全书后面的例子、问题与练习, 这部分内容特别对于刚开始做研究工作的读者很有参考价值. 书中列举的问题不少来自有关文献. 例如对以本书作者之一 L.O.Chua 名字命名的 Chua 电路的详细分析, 它是继 Lorenz 方程出现混沌性态后又一个来自实际问题出现混沌现象的系统. 书中对每一个问题的研究分析都提出了详细的方案, 对有些作为例子的问题还作了细致的讨论. 这也是对各章正文很好的补充.

本书有些内容是本书第一作者 L.P.Shilnikov 本人在 Nizhny Novgorod 大学应用数学与控制论研究所微分方程系 30 年来教授 “**平面定性理论**” 课程 (一学年) 的教材. 对于要学习高维定性理论和混沌理论的高年级学生和研究生来说本书无疑是一本难得的好教材. 当然, 对于那些从事非线性动力学研究工作的工程师、学者和专家, 本书也是一本有价值的参考书.

对于不同水平和不同要求的读者可以选读本书的不同内容, 对初学者最好同时补充一些本书没有介绍而在非线性动力学中很重要的相关内容, 例如平面定性理论的基本知识, 不变环面上轨线性态的 Poincaré-Denjoy 理论以及著名的 Smale 马蹄等. 动力系统中一些著名定理, 如 λ - 引理、封闭性引理等都作了介绍并给出应用.

本书的第一卷对全书是引论性的, 主要介绍常微分方程和动力系统的基本概念, 结构稳定平衡态 (特别对鞍点) 和周期轨线附近的性态、不变环面以及局部和大范围中心流形定理. 第二卷是本书的重点, 介绍结构稳定系统、Morse-Smale 系统、平衡态的第一、第二、第三临界情形、弱共振和强共振、平衡态和周期轨线 (包括鞍 - 结点, 鞍 - 焦点周期轨线) 的局部分支和大范围分支以及通往混沌动力学的一些分支. 在最后的例子、问题和练习中特别介绍了有关 Lorenz 方程, Henon 映射 Khorozov-Takens 方程, Hindmarsh-Rose, Shimizu-Morioka 等模型和 Chua 电路等的详细分析.

本书翻译过程中改正了原书的一些错误. 由于原书是由不同人执笔写成的, 每

人写作风格和所用数学名词都有所不同, 译文在忠实原文的原则下尽量做到统一和通顺易懂.

最后, 感谢 L. P. Shilnikov 教授为中文版写的热情洋溢的序, 也感谢 Andrey 和我对本书一些问题的多次讨论和对为中文版序所提供的帮助. 感谢高等教育出版社编辑李鹏的热心支持与帮助和责任编辑蒋青的认真负责仔细的辛勤劳动. 另外, 也要感谢我妻子何燕俐对我这项工作自始至终的理解支持和关心.

金成桴 2009 年 12 月

第二卷引言

下面几章我们叙述具有简单动力学的动力系统的分支理论. 过分强调分支理论在非线性动力学中的作用有一定的困难, 理由非常简单: 分支理论的方法是由研究动力学模型的成套工具箱组成. 除此以外, 分支理论还为不同科学领域的学者们提供一种通用语言, 以便他们之间沟通和交流思想以及彼此理解各中间学科之间的讨论.

分支理论研究当系统参数变化时相空间的改变. 大体上, 分支理论的真正概念最初是由 Henry Poincaré 在他研究一个自由度的 Hamilton 系统时提出的. 但是, 我们必须指出, 当这个理论发展到现阶段时, 他那个直观明显的定义就总觉得不够了. 事实上, 我们需要适当的数学基础去定义相空间的结构和结构的改变等概念.

第一个尝试创造这种数学形式化的是 Andronov 和 Pontryagin 在 1937 年的工作, 就是说, 他们引入粗系统的概念. 一个系统为粗的, 意味着任何一个与它充分接近的系统与这给定的系统是拓扑等价的. 此外, 共轭的同胚必须接近恒同. 换句话说, 两个系统必须有匹配的相图, 对应的轨线只能相差很小.

在同一篇论文中, Andronov 和 Pontryagin 还叙述了平面粗系统的充分必要条件. 因此, 由于得到了必要的数学基础, 许多非线性动力学问题可以用二维动力系统模拟.

Andronov 和 Pontryagin 理论的主要论述将在本书的第七章第一节中叙述, 作为本书第二卷的开场白. 在那里我们也给出结构稳定性的定义 (这是属于 Peixoto 的). 结构稳定性和粗性这两个概念的主要差别是, 对前者定义结构稳定性的共轭的同胚并不假设要接近恒同. 从纯粹数学观点看, 这是相当方便的, 因为由定义立即得知结构稳定系统组成一个开集. 即使从许多仅对结构稳定性所作的已知证明来看, 粗性本身可以当作副产品从同一证明中得到. 因此, 这两个概念的差别看来不是本质的.

注意, 尽管如此, 结构稳定性概念在俄罗斯以外却广为人知, 尤其在西方国家, 因此本书将频繁地使用这一术语. 不管怎么样, 我们相信粗性概念原则上更合理, 因为它给出由于参数的微小变化而引起现实过程的小变化的自然反映.

二维粗系统的高维推广是 7.4 节讨论的 Morse - Smale 系统. 这种系统的一系列极限集仅包含平衡态和周期轨道. 此外, 这种系统的极限集也只可能有有限个. Morse-Smale 系统不允许有同宿轨线. 平衡态的同宿回路在这里可不存在, 因为它们是非粗轨线 —— 平衡态的稳定与不稳定流形的交沿着同宿回路不能横截相交. 粗的 Poincaré 同宿轨道 (周期轨道的同宿轨线) 也不可能存在, 因为由它们可推出存在无穷多个周期轨道. Morse-Smale 系统具有与二维系统相似的性质, 因而推测 (上世纪六十年代以及之前) 它们是所有光滑动力系统的空间中的一个稠集. 但是, 动力学混沌的发现打破了这种理想化的图像.

一个基本问题是 “如何区别简单动力学系统和混沌动力学系统? ” 只有当我们能将某类轨线与可观察的物理过程对应时才能回答这个问题. 我们从对拟周期轨线 (本书第一卷第 4 章) 研究分类开始. 虽然这些轨线是非粗的, 但被证明可以作为诸如拍频与调制现象适当的模拟.

拟周期轨线是 Poisson 稳定轨线的特殊情形. 后者曾在动力系统理论中起过一次带头作用, 因为它们组成一大类在 Birkhoff 意义下的中心运动 (见 7.2 节). Birkhoff 曾将 Poisson 稳定轨线分成许多子类. 我们将在 7.3 节叙述这个分类的示意图. 选择了这个示意图作为基础, 早在上世纪 30 年代, Andronov 即着手搜集所有已知的动力学运动类型, 并与那些从物理实验可观察到的动力学运动相联系. 由于他的讨论基于个别轨线在 Lyapunov 意义下的稳定性概念, Andronov 不久就得出结论说, 所有可能为 Lyapunov 稳定的轨线将取尽平衡态, 周期轨道和概周期轨线 (在有限维情形下它们是拟周期和极限拟周期运动).

因此, 我们自然地假设每一个有意义的动力学机制具有离散频率谱. 关于这一点, 我们好奇地注意到 Landau 和 Hopf 曾建议把具有充分多个独立频率的拟周期运动当作流体力学湍流的数学映象 (假设这些频率的个数将随某个如 Reynolds 数等结构参数的增加而无限增加).

所有别的 Poisson 稳定轨线在 Lyapunov 意义下是不稳定的. 这些轨线如何才能成为动力学中的应用? 将近 30 年后才得到答案. 当 Lorenz 在 1963[87] 解释非线性动力学过程的复杂和混沌性态时, 由个别不稳定轨线组成的稳定极限集的意义才被第一次认识到.

在粗情形, 这一类极限集 (称为拟极小集, 定义为非闭 Poisson 稳定轨线的闭包) 的结构分析, 可用 Pugh 的封闭性引理来进行. 从这个分析 (7.3 节) 得出主要结论是周期轨道在粗拟极小集中是稠的. 特别地, 我们将看到周期轨道的个数为无限. 具有这种极限集的系统称为**复杂系统**.

具有复杂性态系统的一个更鲜明的特征是出现 Poincaré 同宿轨线, 即当 $t \to$

$\pm\infty$ 时双向渐近于鞍点周期轨道的轨线. 位于鞍点周期轨道的稳定与不稳定不变流形横截交集上的同宿轨道的存在性，导致相空间内无限多个其它鞍点周期轨道的存在性 (7.5 节).

但是对于 (相空间) 维数大于 2 的粗系统 (包含简单与复杂两类动力学) 在动力系统空间中不稠. 事实上，由此得知关键必须在其轨线中给出具有不稳定特性的**非粗**吸引极限集.

这种集合的一个例子是出现在各种模型中的 Lorenz 吸引子. 非驯螺线吸引子 [153] 是另一个迷人的例子.[1]

两个奇怪吸引子之间的相似性是它们没有一个包含稳定周期轨道. 而两者之间的差别，在 Lorenz 吸引子中所有 Poincaré 同宿轨道都是粗的，而非驯吸引子的特征性质是由于同宿切触, 粗与非粗 Poincaré 同宿轨道共存. 两个吸引子的相似之处还在于它们都 "集中" 于一个粗平衡态，对 Lorenz 吸引子它是鞍点，对非驯吸引子则是鞍 - 焦点. 在具有这些奇怪吸引子的其它形式的模型中，我们可以在参数空间中选出存在性区域，其中对应于平衡态同宿回路的参数值是个稠集.

要想完全理解如此复杂的现象，不通过基本分支 (局部的和大范围的) 的知识是不可能的. 第 8 章评述这个理论的一般概貌. 我们按照 Andronov 与 Leontovich 的先驱性工作，从分析最简单的二维非粗系统开始. 他们实现了对平面极限环所有主要分支的系统分类, 一共分成四个子类；即极限环产生于:

(1) 简单弱焦点,
(2) 简单半稳定极限环,
(3) 简单鞍 - 结点的分界线回路, 以及
(3) 鞍点的分界线回路，鞍点处向量场的散度不为零.

Andronov-Leontovich 的分类利用了一个附加的概念即所谓非粗度. 这个理论进一步的发展还导致了另一个方向，即对原有分支选取余维 1 的分支集以及在一般情形选取任意 (当然是有限的) 余维分支集. 此外，尽管在给定有限余维分支曲面的连通分支上的所有二维流都是拓扑等价的 (Leontovich-Mayer 定理), 但此结果对高维情形不再成立.

这个结果属于 Palis，他找到具异宿轨道的二维微分同胚，在它们的点上，一个鞍点不动点的不稳定流形与另一个鞍点不动点的稳定流形有二次切触，只要某些连续不变量的值相同，则这些微分同胚局部拓扑共轭. 这些连续不变量称为模数. 另外一些出现拓扑共轭模数的非粗例子在 8.3 节介绍.

令人惊奇的是，即使余维 1 的非粗系统也可以有无穷多个模数. 当然，由于非线性动力学模型是由具**有限**参数集的动力系统明显定义，这就产生了一个新障碍，使得经典分支理论用不上. 虽然余维 1 同宿回路情形没有带来任何原则性问题，然

[1] 这个吸引子的拟螺线形状来自鞍 - 焦点 (2,1) 的同宿回路, 并以它所构成的骨架出现. 它的非驯性是由于同时存在不同拓扑型的鞍点周期轨道以及粗和非粗 Poincaré 同宿轨道.

而余维 2 或更高余维情形就有更少的平凡性，例如，在包含鞍 – 焦点的同宿或异宿环情形，其中分支图的构造直接由相应模数的特殊值确定.

因此，如果没有模数就不能进行完全的分支分析，那研究动力学模型的 Andronov 方法 (8.4 节) 就必须予以纠正. 但我们注意到，如果某些更精细的现象可以不考虑，或者问题被限制在对诸如平衡态，周期以及拟周期运动等非游荡轨道的分析时，具有简单动力学的系统的主要分支研究，在有限参数族及某些合理要求的框架内仍有其现实意义 (8.4 节).

我们顺便指出，对于具复杂动力学的系统情况变得完全不同. 在大多数情形 (至少在出现同宿切触时)，由于基本参数控制了分支, 引入模数就是必然的了(见[63]).

虽然二维系统极限环的典型分支理论已被 Andronov 与 Leontovich 早在上世纪 30 年代就创造出来了[2]，但对高维系统的周期轨道与平衡态分支理论的系统发展，仅在它们的结果得到科学界应用以后才开始 (Hopf 在 1942 年的工作也许仅仅是个例外).

二维分支的直接推广不久以后就取得进展. 有些工作均为自然的修正，例如, 周期轨道的二维不变环面分支. 另外，高维空间中同宿回路分支并不总是仅产生周期轨道也成为明显的事实. 一个长时间未获解决的问题是，能否存在周期轨道的其它余维 1 分支? 至今只有一个与 [152] 中找到的所谓 "蓝天突变" 有关的新分支在最近才被发现. 所有这些高维分支将在本书第二卷详细论述.

在第 9 章与第 10 章中我们考虑结构不稳定平衡态与周期轨道. 这些极限集的分支将在第 11 章中研究. 这三章属于**局部**分支理论. 局部分支的结果在文献中都有很好的介绍，且这个理论继续在迅猛发展. 因此在这里我们将限于详细研究这类分支的基本情形. 首先，对于特征指数不在虚轴上的分支平衡态, 假设其特征指数严格位于虚轴的左边. 在虚轴上则假定存在单个零指数[3]，或一对复共轭纯虚指数. 对周期运动也作类似假设：乘子若不在单位圆上, 则它们必须在单位圆内，在单位圆上的由单个乘子 $+1$ 或 -1, 或一对复共轭 $e^{\pm i\varphi}$ $(0 < \varphi < \pi)$ 组成. 在这些情形中相应的分支都相当简单, 因而可能不需对非线性项多加限制.

对于特征指数的谱作这些假设的理由非常清楚: 我们将特别关注平衡态与周期运动稳定性的消失问题以及由稳定性消失带来的分支问题. 显然这些问题是非线性动力学的主要内容.

当然，线性部分有较高退化性的情形也是非常有意义的. 例如，具有三个特征指数 $0, \pm i\omega$ 或具有两对纯虚指数 $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ 等的平衡态. 对这些余维 2 情形，典型地是将相应的 (截断) 规范形化为具有限个参数的二维系统. 这些规范形的系统研究在 [21,40,64,82] 中有叙述.

但是我们必须记住，截断规范形并不永远能保证原来系统动力学的完全重建.

---

[2] 见 Andronov,Vitt 和 Khaikin 的《振动理论》的第一版序言 (在 1937 年的印刷中没有 Vitt 名字).

[3] 在 13.2 节对二重零特征指数的情形作了部分考虑.

例如, 当截断规范形具有额外的对称性时, 原则上, 如果我们放回略去的高阶项则这种对称性可能遭到破坏, 甚至还会导致在参数空间的某个区域产生混沌. 这些区域在余维 2 分支点附近的形状非常狭窄, 但当我们从此分支点移动一个有限距离时, 其大小将迅速扩大.

线性部分高阶退化 (从余维 3 开始) 的意义在于这个有效规范形变成三维，而且可能呈现所谓瞬时混沌的复杂动力学，即使对规范形自身也如此. 这样的例子包括具有三重零特征指数以及完全和不完全 Jordan 块的平衡态分支规范形, 这种情形可以分别存在螺旋奇怪吸引子 [18], 或者 Lorenz 吸引子 [129] (后者要求额外的对称性). 由于我们将集中考虑简单动力学，所以本书不包括这些专题.

在我们叙述局部分支时，所用的关键方法是基于中心流形定理和不变叶层技巧 (见第一卷 5.1 节). 假设无特征指数位于虚轴的右边 (或无乘子位于单位圆外), 这允许我们引入一个光滑简化技巧, 将系统化为一个非常方便的 "标准形". 本书将使用这个简化法同时研究稳定性边界本身的局部分支以及通往稳定性边界的大范围分支 (12 章)[4]. 这些大范围分支与这样的事实有关; 与在平衡点的稳定性区域的任何边界上平衡态都得到保持不同, 周期轨道在稳定性边界上可能不存在. 特别地, 周期轨道在下列情况下可能消失：

(1) 它收缩到一个平衡态,

(2) 在它上面突然出现一个鞍 - 结点平衡态,

(3) 鞍点平衡态附有同宿回路, 以及

(4) 当趋于稳定性边界时周期轨道的周期和长度都变成无穷, 这时产生蓝天突变, 与同宿分支不同的是, 在蓝天突变里不含有任何平衡态.

在 12 章中我们将研究鞍 - 结点平衡态与周期轨道消失时的大范围分支. 首先我们介绍 Andronov 和 Leontovich 一个关于平面上从鞍 - 结点分界线回路产生稳定极限环的定理的高维类似. 与 [130] 中原来的证明比较, 由于我们用了不变叶层技巧, 证明被大大简化. 我们还考虑鞍 - 结点平衡态的同宿回路进入结点区域边界的情况 (非横截情况).

Andronov 与 Vitt [14] 在研究无线电工程中从同步到拍频调制的过渡时, 发现了鞍 - 结点分界线回路分支. 特别地, 他们研究了周期强迫的 van der Pol 方程

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \mu A \sin \omega t,$$

其中 $\mu \ll 1$, 和 $\omega_0 - \omega \sim \mu$. 他们证明了这个方程的平均方程存在鞍 - 结点分支, 以此解释从稳定平衡态到周期运动的简单过渡. 但是, 平均方程的极限集与原来方程的

[4] 在一般情况下, 如果谱中存在稳定和不稳定特征指数, 或是稳定与不稳定乘子, 则要感谢在中心流形上的简化, 局部分支问题并无任何特别困难. 因此, 从第 9—11 章中的图仅需要作一些小修改, 即将不稳定方向改为稳定方向, 或者在空间中附加一个流出方向. 但读者们都明白, 由于化为标准形时在一般情况下并不总是光滑, 所以不能直接应用到对某些大范围分支的分析 (例如鞍 - 鞍平衡点或鞍 - 鞍周期轨道的消失).

极限集之间的对应问题那时没有解决. Andronov 与 Vitt 在他们后一篇文章 [15] 中又回到这个问题, 他们在这篇文章中利用 Poincaré 的小参数方法证明了平均系统的粗平衡态与原来系统的周期轨道之间的对应问题. 后来, Krylov 与 Bogolyubov [81] 证明了平均方程中的粗周期轨道与原来系统中的二维不变环面之间的对应. 于是,对原来系统从同步到调幅的过渡的严格解释,需要对在鞍 - 结点周期轨道消失时可能产生的不变环面分支进行研究.

鞍 - 结点周期轨道消失时的大范围分支问题的一般提法是: 假设存在鞍 - 结点周期轨道, 且其它一切轨线当 $t \to -\infty$ 时, 都趋于这个周期轨道, 而当 $t \to +\infty$ 时, 它们都沿某中心流形趋于此周期轨道. 换句话说, 假设鞍 - 结点的不稳定流形 W^u 从结点区域这边回到鞍 - 结点轨道. 在这种情形下或者:

(1) W^u 是二维不变流形, 如环面或 Klein 瓶, 或者

(2) W^u 不是流形.

如果系统有大范围截面 (当处理周期强迫自治系统时, 这种截面总存在), 不稳定流形 W^u 将仅为环面. 流形 W^u 与此截面的交为闭曲线, 该曲线在 Poincaré 映射下不变. 因此, 出现下面两种可能的情形:

(1) 曲线为光滑, 以及

(2) 曲线不光滑.

如果鞍 - 结点消失时该曲线光滑, 则闭吸引不变曲线在截面上得到保持. 这个结果属于 Afraimovich 与 Shilnikov [3]. 如果不变曲线不光滑, 则情况本质上将变得更加复杂, 因为鞍 - 结点的消失现在将导致原系统脱离 Morse-Smale 类, 即系统可具有复杂结构. Afraimovich 与 Shilnikov 发现, 如果所谓 "大叶" 或 "小叶" 条件满足, 则存在对应于出现复杂动力学的参数区间序列. 此结果随后为 Newhouse, Palis 与 Takens [97] 所改进, 在不用大叶条件但限制在一类特殊的单参数族中, 他们证明, 存在一个对应于横截同宿轨道的参数值序列 (因此, 永远存在对应于复杂动力学的区间序列). 对于一般的单参族的这个分支, [151] 也得到一个类似的结果, 它证明如果大叶条件满足, 则对一切 (小) 参数值, 在鞍 - 结点消失后即出现混沌. 反之,如果这个条件不满足, 则复杂动力学的区间以及仅具简单动力学的区间 (这时存在连续不变曲线) 在参数轴上必须交替存在.

注意, 简单性态与复杂性态的交替区域的效应, 在 van der Pol [154] 的灯光发生器的周期强迫实验时第一次被发现 (当我们打开无线电并从一个台转向另一台听到噪音特性时就出现这种效应). 对这个 van der Pol 方程的第一个理论解释是由 Cartwright 和 Littlewood 给出的 [36].

我们将在 12.2 节, 对鞍 - 结点的不稳定流形 W^u 同胚于环面的结果作了简短介绍, 并对不变环面在光滑情形得到保持的定理给出了证明. 那里, 我们对将问题有效地化为某个圆周自同态族 (光滑不可逆映射) 的研究发展了一般理论.

当系统没有大范围截面时, 鞍 – 结点的不稳定流形 W^u 可能是一个 Klein 瓶 (如果系统定义在 $\mathbf{R}^n, n \geqslant 4$). 如果 Klein 瓶在分支点光滑，则当鞍 – 结点消失时它仍将继续保持. 拓扑学上的理由是, 在 Klein 瓶上将永远存在一对周期轨道, 当原有鞍 – 结点突然出现时, 两个轨道的长度都增长到无穷. 几何上, 这些周期轨道由于向前与向后的倍周期分支, 其稳定性将改变无穷多次. 如果在分支点 Klein 瓶不光滑, 则就应该用大叶或小叶条件. 前者在鞍 – 结点消失以后保证对一切小参数值存在复杂动力学. 反之, 小叶条件仅能保证出现复杂动力学的参数值区间序列的存在性. 注意, 不像 W^u 同胚于环面的情形, 对于不光滑 Klein 瓶的情形, 当小叶条件不满足时 (“非常小叶” 的情形)，对所有小参数值动力学可能为简单的. 这些结果都在 12.3 节中叙述.

对系统不存在大范围截面, 且 W^u 不为流形时, 可能会出现完全不同的情况. 此时 (12.4 节), 在某些附加条件下, 鞍 – 结点周期轨道的消失可使另一个 (唯一且稳定的) 周期轨道产生. 当这周期轨道靠近稳定性边界时, 其长度与周期将无限增大. 这个现象就是所谓 “**蓝天突变**”. 由于现在还没有发现物理模型出现这种分支, 故我们将用一些自然例子叙述它.

注意在 n 维情形, 当 $n \geqslant 4$ 时, W^u 的其它拓扑图像可能会实现. 这种鞍 – 结点分支肯定会导致系统跑出具有简单动力学的系统类之外. 例如, 在 [139, 152] 中证明, 当鞍 – 结点周期轨道消失后, 即可出现 Smale-Williams 型的双曲吸引子[5].

在 Morse-Smale 系统类中另一个典型的余维 1 的分支 (本书将不涉及) 包括所谓鞍 – 鞍点分支, 其中具有一个零特征指数 (其它的均在左或右半平面) 的非粗鞍点平衡态, 与另一个具有不同拓扑类型的鞍点重合. 此外, 如果鞍 – 鞍点的稳定流形与不稳定流形沿某些同宿轨道彼此横截相交, 则当分支点消失时, 从同宿回路产生鞍点周期轨道. 如果只存在一条同宿回路, 则只有一条周期轨道从它产生, 分别地, 这个分支不至于使系统跑出 Morse-Smale 类之外. 但是如果有多于一条同宿回路, 则在鞍 – 鞍点消失后, 将出现具有无穷多个鞍点周期轨道的双曲极限集 [135].

当鞍 – 鞍点周期轨道 (具一个乘子等于 1, 其余乘子均在单位圆之内或外) 消失时也会出现类似的现象. 如果鞍 – 鞍点周期轨道的稳定与不稳定流形相交于 (至少) 两个不变环面, 则这种周期轨道的消失跟随着产生的极限集, 其上光滑的鞍点不变环面的无限集是稠密集 [6].

在第 13 章考虑鞍点平衡态的同宿回路分支. 我们从二维情形开始. 首先, 研究在一般情形 (非零鞍点量) 以及在零鞍点量情形分界线回路的稳定性问题[6]. 接下来, 详细研究任意有限余维情形, 其中将构造所谓 Dulac 序列, 它允许我们用此序列中第一个非零项的符号来确定回路的稳定性.

对非 – 零鞍点量情形, 我们介绍 Andronov 与 Leontovich 有关在分界线回路分

[5] 在 [139] 中考虑了鞍 – 结点环面的消失，跟着出现 Anosov 吸引子和高维螺线管吸引子的更一般情形.

[6] 较自然的是仅考虑单侧稳定性.