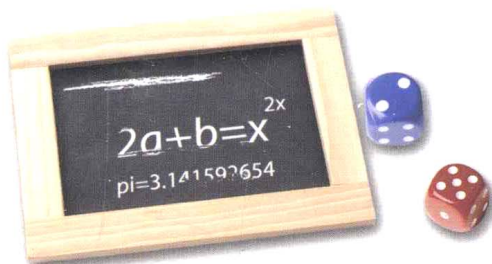


TURING

图灵新知



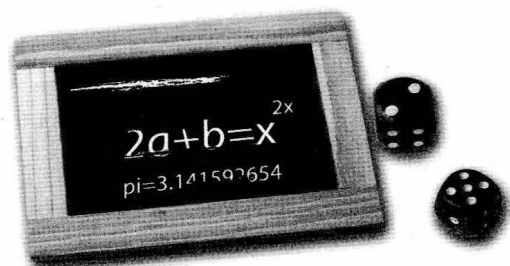
# 数学与生活

[日] 远山启 著  
吕砚山 李诵雪 马杰 莫德举 译



人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵新知



# 数学与生活

[日] 远山 啓 著  
吕砚山 李诵雪 马杰 莫德举 译



人民邮电出版社  
北京

## 图书在版编目(CIP)数据

数学与生活 / (日) 远山启著 ; 吕砚山等译. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2010. 12

(图灵新知)

ISBN 978-7-115-23770-5

I. ①数… II. ①远… ②吕… III. ①数学—普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第182489号

### 内 容 提 要

本书以生动有趣的文字,系统地介绍了从数的产生到微分方程的全部数学知识,包括初等数学和高等数学两方面内容之精华。这些知识是人们今后从事各种活动所必须的。书中为广大读者着想,避开了专用术语,力求结合日常逻辑来介绍数学。读来引人入胜,无枯燥之感。从中不但可得益于数学,而且还可学到不少物理、化学、天文、地理等方面的知识。

本书适合广大数学爱好者阅读,尤其适合中学学生作为课外读物。

图灵新知

### 数学与生活

- 
- ◆ 著 [日] 远山 启  
译 吕砚山 李诵雪 马 杰 莫德举  
责任编辑 明永玲
  - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号  
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn  
网址 <http://www.ptpress.com.cn>  
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
  - ◆ 开本: 880×1230 1/32  
印张: 13 125  
字数: 416千字 2010年12月第1版  
印数: 1-4 000册 2010年12月北京第1次印刷

著作权合同登记号 图字: 01-2010-4232号

ISBN 978-7-115-23770-5

定价: 39.00元

读者服务热线: (010)51095186 印装质量热线: (010)67129223

反盗版热线: (010)67171154

# 再版译序

本书的中译本曾以《通俗数学》为名于1988年由北京科技出版社出版。当时是根据日本遠山啓所著《数学入门》的上册第35次印刷和下册第28次印刷的版本翻译的。20多年来，该书以内容适当、通俗易懂的特色而深受读者欢迎，历久不衰。

根据广大读者的需要，这次是由人民邮电出版社得到日本岩波书店的授权，根据原书的第71次印刷（上册）和第62次印刷（下册）的版本翻译。应约参加这次翻译工作的是：吕砚山（前言、后记、第2~5章以及第11~14章），马杰（第1，7，8章），莫德举（第6，9，10章）。全书最后由吕砚山审阅。

这是一本十分生动有趣的数学读物。它以新颖的形式，系统而全面地介绍了数学基本知识。内容从数的产生开始，讲到微分方程为止，既包含了算术、代数、三角、几何等初等数学的内容，又包含了微分、积分、微分方程等高等数学的内容。作者认为，书中选取的这些知识乃是新世纪人们顺应社会发展、从事各种活动所必须了解或掌握的知识。

能够将如此丰富而全面的内容，巧妙地加以编排，由浅入深地介绍在这样一本篇幅不大的著作中，反映出作者在取材上贯彻了少而精的精神。无疑，这样处理是切合时宜、极受广大读者尤其是初学者欢迎的。

本书的一个显著特点是，在讲述方法上力求脱开专用术语，从日常逻辑中来引出并介绍数学。作者运用了丰富的社会科学和自然科学方面的知识，结合日常生活和古今各国脍炙人口的故事，夹叙夹议，妙笔横生。读来犹如是在读一本有趣的故事集，而没有通常会产生的那种枯燥抽象之感。读者从中不但受益于数学本身，而且也能学到不少有关物理、化学、天文、地理乃至音乐、美术等方面的知识。

至于条理分明、图文并茂，更不待言。总之，不论从内容还是从形式来看，本书读者对象可谓老少皆宜。因此，它在日本深受欢迎，自1959年出版面世迄今已印刷六七十次就是一个证明。我们期望，本书中

译本能够继续为我国读者学习和掌握数学知识提供有益的帮助。

最后需要说明的是，前面所说的本书中译本《通俗数学》是由吕砚山、李诵雪、马杰、莫德举四人共同翻译的。其中李诵雪翻译了第2, 3, 4, 5, 13, 14章。依托坚实的基础理论修养，运用流畅的文笔，她的译文完整准确，通俗易懂，极受读者青睐。遗憾的是，她已于1989年病逝，没有能参加这次翻译工作，但她所译的这六章译文除个别文字改动外，仍为本书采用。另外，《通俗数学》的责任编辑杨福成在确定选题、书稿加工及出版等方面都做了大量工作，为该书面世作出了贡献，可惜也已病逝。在本书出版之际，我们以怀念的心情向他们深表敬意。

限于水平，书中谬误欠妥之处难免，敬请读者批评指正。

译者

2010年6月于北京化工大学

# 前 言

从前，数学的应用曾经局限在一些特殊的人们之间。对于多数人来说，数学仅仅是作为考试及格的必要科目，而在毕业以后则嫌其无用很快就全忘光了。

可是近来情况有所变化，在各种场合都开始运用数学了。不用说自然科学或技术方面离不开数学，即使在经济、政治方面也离不开数学。至于在企业的经营管理、商品的销售上，为了能更有发展，数学的作用就更大了。对于不爱学数学的人来说，诚然将数学视为世上难学之事物，但若不学数学，日子也并不会好过。这是对于过去的那种不从事政治、经济活动的人来谈的。至于当今世界将向何处去，虽仍是专家们研究的问题，但毫无疑问，人类生活将会逐渐地走向集体化和社会化。因而，数学的活跃时代也就来到了。

在 20 世纪后半叶，数学也许会获得从未有过的广泛应用。不过，这样的时代已经开始了。掌握一定程度的数学知识，是今后在世界上生存不可缺少的条件。

没有必要要求任何人都具备很高的数学水准。对于 20 世纪后半叶在世界上从事各种活动的日本人来说，本人认为可以按“到微分方程为止”这样来划线。

确实，如果能把“到微分方程为止”这样的数学知识变成日本人的常识，这将是非常理想的。

这就是写这本入门书的基本目的。

对于读者的希望首先是，在学习数学时，应抛弃那种认为必须具备特殊条件的成见。和其他科学一样，数学也不是某些专人所臆造出来的，而是如漱石所言，是“左邻右舍众多的人累积思考而成”的。

在数学中运用的逻辑与日常生活中表现的逻辑并无二致，而是其精练出的一部分。笛卡儿说过：“世上的准则在于最公平的分配。”从数学角度来考虑，也是除了共同遵守的准则以外，别无其他。因此，为了学

好数学，无论是谁都要具备的共识就是必须有毅力。毅力之所以重要，是因为数学学识是靠循序渐近、逐步累积得来的，不可能一蹴而就。无论如何，事先要下定一步一步迈进的决心。

因此，本书脱开众所周知的那些术语的圈子，力求从日常的逻辑中引出数学的道理。

为此，也将过去曾用过的一些专门术语改变成容易学的日常用语，如将分数的约分当作“折叠”来处理就是一例。由此看来，也许这是一本很有人情味的“数学入门”书。

遠山 啓

1959年10月

# 目 录

<b>第 1 章 数的幼年期</b> .....	1
1.1 从未开化到文明 .....	1
1.2 数的黎明 .....	2
1.3 一一对应 .....	4
1.4 分割而不变 .....	5
1.5 数的语言 .....	6
1.6 数词的发展 .....	7
1.7 手指计数器 .....	10
1.8 金字塔 .....	11
1.9 二十进制 .....	14
1.10 十二进制 .....	16
1.11 六十进制 .....	17
1.12 定位与 0 的祖先 .....	17
<b>第 2 章 离散量和连续量</b> .....	19
2.1 多少个和多少 .....	19
2.2 用单位测量 .....	20
2.3 连续量的表示方法 .....	22
2.4 分数的意义 .....	25
2.5 折叠和扩展 .....	27
2.6 分数的比较 .....	29
2.7 分数的加法和减法 .....	30
2.8 乘法的扩大解释 .....	32



## 2 | 目 录

2.9	乘减少,除增大	34
2.10	小数的意义	37
2.11	分数和小数	38
2.12	循环小数和分数	41
2.13	非循环小数	43
2.14	加减和乘除	44
2.15	数学和现实世界	47
<b>第3章</b>	<b>数的反义词</b>	<b>49</b>
3.1	正和负	49
3.2	新数的名称	50
3.3	负的符号	52
3.4	正和负的加法	53
3.5	减法运算	54
3.6	司汤达的疑问	55
3.7	乘法运算规则	56
3.8	与实际的联系	58
3.9	有理数的域	60
3.10	代数和	61
<b>第4章</b>	<b>代数——灵活的算数</b>	<b>63</b>
4.1	代名词的算术	63
4.2	代数的文法·交换律	65
4.3	结合律	66
4.4	分配律	68
4.5	方程	70
4.6	代数的语源	73
4.7	龟鹤算	73
4.8	一次方程	75

4.9	联立方程	78
4.10	矩阵和向量	80
4.11	矩阵的计算	84
4.12	联立方程和矩阵	88
4.13	奇妙的代数	89
<b>第5章</b>	<b>图形的科学</b>	<b>94</b>
5.1	两部长畅销书	94
5.2	分析的方法	95
5.3	分析和综合	96
5.4	连接	98
5.5	全等三角形	100
5.6	公理	101
5.7	泰勒斯定理	103
5.8	驴桥定理	105
5.9	条件和结论	107
5.10	对称性	109
5.11	定理的联系	112
5.12	三边全等定理	114
5.13	捉老鼠的逻辑——反证法	116
5.14	脊背重合	117
5.15	垂直于平面的直线	119
5.16	平行线	120
5.17	三角形的内角	123
5.18	驴都知道	124
5.19	驴解决不了的问题	127
5.20	倒推法	129
5.21	与三点等距离的点	130

<b>第 6 章 圆的世界</b> .....	133
6.1 直线和圆的世界 .....	133
6.2 神的难题 .....	136
6.3 圆的四边形化 .....	138
6.4 圆周角不变定理 .....	140
6.5 面积 .....	144
6.6 毕达哥拉斯定理 .....	148
6.7 长度计算法 .....	151
6.8 从触觉到视觉 .....	153
6.9 相似和比例 .....	156
6.10 相似的条件 .....	158
6.11 五角星 .....	162
6.12 五角星的秘密 .....	164
6.13 有理数普遍存在 .....	166
6.14 无理数普遍存在 .....	168
6.15 实数 .....	169
<b>第 7 章 复数——最后的乐章</b> .....	171
7.1 二次方程 .....	171
7.2 二次方程的解法 .....	173
7.3 先天不足的数 .....	175
7.4 复数 .....	177
7.5 加法和减法 .....	179
7.6 乘法和除法 .....	181
7.7 正多边形 .....	185
7.8 正五边形 .....	188
7.9 高斯的发现 .....	190
7.10 三次方程 .....	191

7.11	卡尔达诺公式 .....	193
7.12	数的进化 .....	197
7.13	四则逆运算 .....	198
7.14	代数学的基本定理 .....	200
<b>第 8 章</b>	<b>数的魔术与科学 .....</b>	<b>202</b>
8.1	万物都是数 .....	202
8.2	数的魔术 .....	204
8.3	恒等式 .....	205
8.4	恒等式的计算法 .....	210
8.5	求约数的方法 .....	211
8.6	公倍数与公约数 .....	214
8.7	素数 .....	217
8.8	分解的唯一性 .....	219
8.9	费马定理 .....	221
8.10	循环小数 .....	222
<b>第 9 章</b>	<b>变化的语言——函数 .....</b>	<b>224</b>
9.1	变与不变 .....	224
9.2	变数和函数 .....	226
9.3	正比例 .....	229
9.4	鸚鵡的计算方法 .....	230
9.5	变化的形式 .....	231
9.6	各种类型的函数 .....	232
9.7	图表 .....	234
9.8	函数的图表 .....	235
9.9	解析几何学 .....	239
9.10	直线 .....	240
9.11	相交和结合 .....	242

## 6 | 目 录

9.12	贝祖定理 .....	244
9.13	圆锥曲线 .....	246
9.14	二次曲线 .....	248
<b>第 10 章</b>	<b>无穷的算术——极限 .....</b>	<b>251</b>
10.1	运动和无穷 .....	251
10.2	无穷级数 .....	253
10.3	无穷悖论 .....	255
10.4	没有答案的加法 .....	257
10.5	一种空想的游戏 .....	259
10.6	柯西的收敛条件 .....	263
10.7	收敛和加减乘除 .....	266
10.8	规则的数列 .....	269
10.9	帕斯卡三角形 .....	271
10.10	数学归纳法 .....	273
10.11	高斯分布 .....	276
10.12	阶差 .....	277
<b>第 11 章</b>	<b>伸缩与旋转 .....</b>	<b>281</b>
11.1	老鼠算 .....	281
11.2	2 倍的故事 .....	283
11.3	数砂子 .....	284
11.4	负的指数 .....	285
11.5	分数的指数 .....	286
11.6	指数函数 .....	288
11.7	对数 .....	290
11.8	连续的复利法 .....	292
11.9	旋转 .....	294
11.10	正弦曲线和余弦曲线 .....	297

11.11	极坐标 .....	299
11.12	正弦定理和余弦定理 .....	300
11.13	海伦公式 .....	302
11.14	永远曲线 .....	304
11.15	欧拉公式 .....	306
11.16	加法定理 .....	308
<b>第 12 章</b>	<b>分析的方法——微分 .....</b>	<b>310</b>
12.1	望远镜和显微镜 .....	310
12.2	思考的显微镜 .....	311
12.3	微分 .....	314
12.4	流量和流率 .....	316
12.5	指数函数的微分 .....	317
12.6	函数的函数 .....	322
12.7	反函数 .....	323
12.8	函数的函数的微分 .....	325
12.9	内插法 .....	329
12.10	泰勒级数 .....	333
12.11	最大最小 .....	335
12.12	最小原理 .....	339
<b>第 13 章</b>	<b>综合的方法——积分 .....</b>	<b>342</b>
13.1	分析与综合 .....	342
13.2	德漠克里特方法 .....	344
13.3	球的表面积·阿基米德方法 .....	346
13.4	双曲线所围成的面积 .....	348
13.5	定积分 .....	351
13.6	卡瓦列里原理 .....	354
13.7	基本定理 .....	357

13.8	不定积分 .....	361
13.9	积分变换 .....	364
13.10	酒桶的体积 .....	364
13.11	科学和艺术 .....	367
13.12	各种各样的地图 .....	367
13.13	摆线围成的面积 .....	371
13.14	曲线的长度 .....	372
<b>第 14 章</b>	<b>微观世界——微分方程 .....</b>	<b>375</b>
14.1	逐步解决法 .....	375
14.2	方向场 .....	377
14.3	折线法 .....	379
14.4	落体法则 .....	381
14.5	线性微分方程 .....	383
14.6	振动 .....	386
14.7	衰减振动 .....	388
14.8	从开普勒到牛顿 .....	389
14.9	积分定律和微分定律 .....	393
14.10	拉普拉斯的魔法 .....	394
14.11	锁链的曲线 .....	395
<b>附录</b>	.....	<b>399</b>
<b>参考文献</b>	.....	<b>401</b>
<b>后记</b>	.....	<b>402</b>

# 第 1 章 数的幼年期

## 1.1 从未开化到文明

有一位数学家接受手术。在开始手术前，外科医生让这位数学家闻麻醉药，并且叫他数 1, 2, 3, …。这位数学家要是在平时，别说是 1, 2, 3, …，就是极大或是极小的数也都能随心所欲地数出来，可是他却抵抗不住麻醉药，数 1, 2 还可以，数到 3 就人事不知了。一滴氯仿就把数学家带回到只能数到 3 的未开化人的状态去了。

用一滴麻醉药，就能把数学家带回到未开化人的世界去，但是反过来，从未开化人变成数学家的道路可就漫长而又遥远了。不仅仅是漫长，那还是一条极其曲折的道路呢。为了看清数学这门学问的本来面目，我们有必要回到起始点，在这条曲折的道路上再走一遍。

精神病医生为了试验病人的神智是否清楚，好像就是让病人数数的。据说从前在泰国的法庭上也是让证人数到 10，如果数不上来，就没有资格作为一名证人。但如果根据这件事就想说“数学是智能的检验标准”的话，一定会有许多人瞪着眼反对。这是因为在这个世界上有许多人讨厌数学。

与喜欢数学的柏拉图不一样，讨厌数学的索克拉提斯说：“在数学家当中，没有人能够作认真的推论。”另外，还有很多人公然说数学这种东西是有害无益的。

可是，喜欢、讨厌姑且不说，既然生活在现代，没有数这个东西就不能生活下去。其实只要想一下在每天的报纸上出现多少数字就明白了。所以，即使是讨厌数学、对计算觉得棘手的人，实际上也是懂得相当多的数学、很会应用数学的人。站在未开化人当中，就是第一流的数学家了。

即使说数学不行或者讨厌数学，也并不意味着这个人的智能或人品



不好。可是要在现代社会生活下去，不用说，会有很多不便之处。一看见数字就头痛的人，跟一坐车就晕车的人是一样的吧。

## 1.2 数的黎明

从前——距现在大约 50 万年，在现在北京郊外周口店的洞穴里，居住着人类的祖先北京猿人。从他们遗留下来的石器和动物的骨骼，可以大致知道他们从事什么样的劳动，吃什么样的食物。但是要推测他们懂什么数学就非常困难了。为什么呢？因为数这个东西是无形的，没有一种直接了解的线索。

但这并不是说就没有一种间接的线索，去了解人类在太古时期如何建立数字或图形的知识。这线索就是考察在文明进步中遗留下来的未开化人的数学，另外就是观察在幼儿当中，数的概念是怎样建立的。

首先产生的问题是，除了人类以外是否真有动物了解数？就像经济学家亚当·斯密说的那样：“数是人类在精神上制造出来的最抽象的概念。”确实，即使像 1, 2 这样最简单的数，要是和其他语言相比较，也是很抽象的，除了人之外，其他动物好像还没有知道数的。

然而有人认为鸟知道数。例如，杜鹃悄悄把自己的蛋产到黄莺的巢里，让黄莺替它孵蛋，它会把和自己的蛋数相同的黄莺蛋去掉。从这个事实来看，人们自然会产生这样的疑问：鸟不是会数数吗？德国的动物学家奥·凯拉作了鸟能数到什么程度的试验。但是以往这种试验，由于准备不充分，结果难以信赖。从前也曾有过这样奇怪的事情——马戏团的马因为会计算而闻名，可仔细研究一下就知道，是马的主人在不知不觉中送出一个什么信号，然后敏感的马回应了这个信号。

凯拉为了防止一些杂音混进来，小鸟放到一个院子里，让小鸟和实验者彼此都看不见，小鸟的动作用照相机自动拍下来。

实验对象就是乌鸦和鸚鵡。在鸟的前面放五个箱子（见图 1-1），箱子盖上画着标记点，分别是 2, 3, 4, 5, 6。箱子前面也放着画有标记点的盖子。预先让鸟作挑出与盖子上标记点相同的箱子的练习。经过充分练习之后，再让鸟作挑出同样数目的试验时，鸟能够出色地取得成功。而且即使把五个箱子的排列方法作各种变化或改变标记点的画法，