21世纪高等院校教材

微积分

（上 册）

刘迎东 ◎ 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

微 积 分

（上册）

刘迎东 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书对传统的微积分内容的写作次序作了较大调整，贯彻把数学建模思想融入大学数学基础课程教学的想法，强调微分的概念和应用，叙述精炼，选材及示例经典，习题丰富. 本书分上、下两册，本部分是上册，上册内容包括一元函数微积分学和常微分方程. 包括函数、极限与连续、导数与微分、定积分与不定积分、微分方程、微分中值定理与导数的应用和定积分的应用等内容.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 上册/刘迎东编. —北京：科学出版社，2010
21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-027833-3

Ⅰ.①微… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 103377 号

责任编辑：赵 靖 张中兴 / 责任校对：钟 洋
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 6 月第一次印刷 印张：37 1/4
印数：1—5 000 字数：740 000

定价：58.00 元(上、下册)

前　　言

微积分是工科大学生要学习的最重要的数学基础课.这一课程的基本内容已经定型,优秀教材不胜枚举.但是,微积分的教与学仍然是一个世界性的难题,究其原因,恐怕和这门学科的历史发现顺序与现在课本上按逻辑讲授的顺序恰好相反有关.

微积分诞生之初就显示了强大的威力,解决了许多过去被认为是高不可攀的难题,取得了辉煌的成绩.然而,最初创立微积分的大师们着眼于发展强有力的方法,解决各种各样的问题,没有来得及为这门新学科建立起严格的理论基础.在以后的发展中,后继者才对其逻辑细节作了逐一的修补.重建基础的细致工作当然是非常重要的,但也给后世的学习者带来了不利的影响.微积分本来是一件完整的艺术杰作,现在却被拆成碎片,对每一细小部分进行详尽、琐细的考察.每一细节都弄得很清楚了,完整的艺术形象却消失了.今日的初学者在很长一段时间里只见树木不见森林.在微积分创立时期刺激了这一学科飞速发展的许多重要的应用问题,今日的初学者却几乎一无所知.因为这些应用往往涉及微分方程,而微分方程则要等漫长的学究式考察完成之后才开始学习.P. Lax、S. Burstein 和 A. Lax 在他们合著的《微积分及其应用与计算》序言中批评道:"传统的课本很像一个车间的工具账,只载明这儿有不同大小的锤子,那儿有锯子,而刨子则在另一个地方,只教给学生每种工具的用法而很少教学生将这些工具一起用于构造某个真正有意义的东西."

北京大学数学系张筑生先生生前致力于数学分析的教学改革,呕心沥血.作者怀着对张先生崇敬的心情,研读了张先生的经典之作《数学分析新讲》,受益颇深.张先生认为解决上述问题的一个途径是尽可能早一点让初学者对微积分的全貌有一个概括的印象,尽可能早一点让初学者学会用微积分的方法去解决问题.为了达到这一目的,可以在准备好基础之后,不拘泥于每一细节深入详尽的讨论,也不追求最一般的条件,尽快地展开微积分的主要概念(导数、原函数、积分、微分方程)并应用这些概念去解决一些重要而有趣的问题.等到学生对全貌有了初步的印象之后,再进行涉及具体细节的讨论.这样,学生在第一学期就能掌握一元函数微积分的基本理论和方法,能用初等的微分方程解决应用问题,并能了解历史上应用微积分的一些最著名的例子.

作者非常赞成张先生的思想,遂产生了将张先生的改革思想应用于工科大学微积分教学改革的想法.后又拜读了龚昇先生的《简明微积分》,聆听了北京航空航天大学国家级教学名师李尚志先生关于微积分教学的几次演讲,体会到三位先生

的思想颇有共通之处，作者更加坚定了自己的想法. 而北京交通大学教务处与理学院对微积分基础课程的重视以及科学出版社赵靖与张中兴两位编辑的出色工作，也促成了本书的诞生.

本书分上、下两册，上册是一元函数微积分学和常微分方程，包括函数、极限与连续、导数与微分、定积分与不定积分、微分方程、微分中值定理与导数的应用和定积分的应用等内容；下册是多元函数微积分学与无穷级数，包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数等内容. 本书适合用作大学工科各专业微积分或高等数学教材、参考书.

本书区别于传统微积分或高等数学教材的地方表现在以下几个方面：

(1) 将微分方程的内容提前，函数、极限、导数、积分和微分方程一气呵成，把关于微分中值定理及其应用这些更深入、细致的内容置后，希望迅速给读者呈现一个紧凑的、完整的一元函数微积分学的整体形象.

(2) 贯彻将数学建模思想融入大学数学基础课程教学的想法. 本书选取了开普勒行星运动三大定律与牛顿万有引力定律互推的问题，因为这一问题贯穿了一元函数微积分和常微分方程的全部内容，也是微积分创立之初的重要问题，是很好的微积分教学的数学模型.

(3) 强调微分的概念和应用，将不定积分和定积分融合在一起. 在微积分的学与教的过程中，作者感觉到传统教材偏重导数，微分的引入给人以突兀的感觉. 殊不知微积分的一大创始人莱布尼茨就是以微分展开概念的，而以导数为主体的做法实际上只对一维空间比较合适，对高维以至无穷维空间微分才是合适的载体. 传统教材将定积分与不定积分分开来讲，会给人以不定积分完全是数学家的游戏的错觉.

(4) 力求叙述精炼，选经典题材及示例，有丰富的习题. 作者将其数年微积分及高等数学教学的心得融入进本书，体现出本书的另一特点.

作者在数年的教学中，接触了许多微积分相关的优秀教材，它们为本书的编写提供了素材，特别是作者从北京大学文丽、吴良大老师编写的《高等数学》和同济大学编写的《高等数学》中借鉴了很多，在此深表谢意.

由于作者才疏学浅，书中疏漏之处在所难免，希望各位同仁不吝赐教.

刘迎东

2010 年 3 月于北京

目　录

引　言

16 世纪后期，丹麦天文学家第谷・布拉赫（Tycho Brache）以坚韧不拔的毅力，对太阳系的行星运动进行了长达 20 年的精细观察，积累了丰富的观测资料. 他的助手，德国人开普勒（Johanne Kepler）曾参与部分观测工作并继承了他的全部观测数据. 在此基础上，开普勒又进行了长达 20 年的研究，总结出关于行星运动的三大定律.

开普勒第一定律　行星绕太阳运行（公转）的轨道是椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点上.

开普勒第二定律　从太阳中心指向一个行星的有向线段（向径），在同样的时间内扫过同样的面积. 换句话说就是向径的面积速度是常数（图 0.1）.

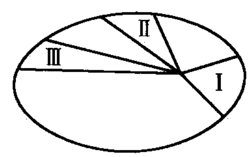

图 0.1

开普勒第三定律　各行星公转周期的平方与其椭圆轨道长轴的立方之比是一个常数.

通过对开普勒三大定律的分析，牛顿判断行星应受到一个指向太阳的力的作用，这力的大小与行星的质量成正比，与距离的平方成反比. 但这是一种什么力呢？经过缜密的思考，牛顿终于悟出其中的道理：这种力与地球上使物体下落的重力是一回事，它是存在于一切物体之间的相互吸引力. 这样，牛顿总结出以下万有引力定律.

万有引力定律　任何两个物体之间都存在着一种相互吸引的力（称为**万有引力**）. 这力作用在两物体连线上，它的大小与两物体的质量的乘积成正比，而与这两物体间的距离的平方成反比.

本书将逐步说明怎样从开普勒定律导出万有引力定律，也将说明怎样从万有引力定律推导出开普勒三大定律. 后一论证的重要意义在于指出：任何受到与距离平方成反比的有心力作用的物体，都遵循与行星运动相类似的运动规律. 于是，我们得知，月球绕地球的运动应该遵循类似的规律；人造卫星绕地球的运动应该遵循类似的规律（牛顿实际上已从理论上预言了发射人造卫星的可能性）；原子内部的电子绕原子核的运动也应遵循类似的规律（因为原子核与电子间的静电吸引力也是与距离的平方成反比的力）.

上述问题是一个数学建模的问题，它涉及一元函数微积分学和常微分方程的知识（也就是本书上册的全部内容），而由于此问题对于人类生活的重大意义，对它的讨论将会引起大家的兴趣. 此问题将贯穿本书上册，大家可以带着这个问

题阅读. 本书会在某些章最后一节专门介绍如何将相关知识应用于此问题. 当然，微积分的应用远远不止于此，所以每章中还会介绍许多其他方面的应用，数学理论和这些应用将构成本书的主体. 本书将以这些问题把微积分的知识有机地贯穿起来.

第 1 章　函　　数

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系. 函数是微积分主要的研究对象，因此，本书从函数概念讲起. 中学教材已介绍过函数概念和一些初等函数的性质与图形，本章将对原有知识进行复习、补充和提高.

1.1　集合与函数

1.1.1　集合

1. 集合概念

具有某种(或某些)属性的一些对象的全体称为一个**集合**. 集合中的每个对象称为该集合的**元素**. 集合通常用大写的拉丁字母，如 $A,B,C,\cdots$ 来表示，元素则用小写的拉丁字母，如 $a,b,x,y,\cdots$ 来表示. 当 x 是集合 E 的元素时，就说 x **属于** E，记作 $x\in E$；当 x 不是集合 E 的元素时，就说 x **不属于** E，记作 $x\overline{\in} E$ 或 $x\notin E$.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$.

表示集合的方法通常有两种. 把集合中的元素列举出来，这种表示集合的方法称为**列举法**. 例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

把集合中元素所满足的条件写在元素的后面，用一条竖线隔开，外面写上大括号，这种表示集合的方法称为**描述法**. 例如，集合

$$E=\{x \mid x^2\leqslant 1\}$$

表示所有满足不等式 $x^2\leqslant 1$ 的 x 的全体.

习惯上，全体非负整数，即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体正整数的集合记作 $\mathbf{N}^+$，即

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$；全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$；全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

2. 区间与邻域

1) 有限区间(有穷区间)

设 a,b 为二实数，且 $a<b$. 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为一

个闭区间，记作

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合称为一个**开区间**，记作

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

分别满足不等式 $a\leqslant x<b$ 和 $a<x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为**半开区间**，记作

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$$

和

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}.$$

以上各种区间都是**有限区间**（或**有穷区间**），a 与 b 分别称为**区间的左、右端点**，数 $b-a$ 称为**区间的长度**.

2) 无穷区间

满足不等式 $-\infty<x<+\infty$ 的所有实数 x 的集合称为**无穷区间**，记作

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}.$$

可类似写出**半无穷区间**

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\},$$
$$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x<+\infty\},$$
$$(-\infty,a)=\{x \mid -\infty<x<a\},$$
$$(-\infty,a]=\{x \mid -\infty<x\leqslant a\}.$$

图 1.1 给出了一些区间的示意图.

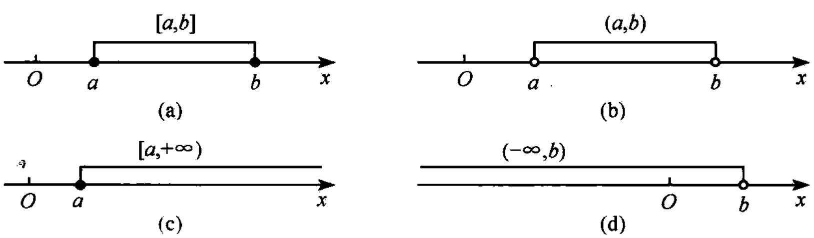

图 1.1

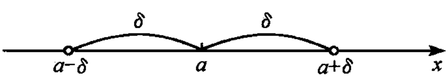

图 1.2

以点 a 为中心、以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的对称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$（图 1.2）. 邻域 $U(a,\delta)$ 中除去点 a 后剩余的所有点的集合称为**点 a 的去心邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

1.1.2　函数的概念和基本性质

1. 函数概念

假定在某个变化过程中有两个取实数值的变量 x 和 y，x 的变化域为 X. 如果

对于 X 中的每一个 x 值，根据某一规律(或法则)f，变量 y 都有唯一确定的值与它对应，就说 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in X.$$

x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

自变量 x 的变化域 $D(f)=X$ 称为**函数 $y=f(x)$ 的定义域**. 因变量 y 的变化域称为**函数 $y=f(x)$ 的值域**，有时记作

$$R(f)=f(X)=\{y\mid y=f(x),x\in X\}.$$

在函数的定义中，对应规律(即函数关系)及定义域是两个重要因素，而自变量和因变量采用什么符号来表示则是无关紧要的.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定；另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，通常叫做**函数的自然定义域**.

表示函数的主要方法有三种：**表格法**、**图形法**和**解析法**(**公式法**)，其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$$

称为**函数 $y=f(x)$，$x\in X$ 的图形**(图 1.3).

2. 一些函数的例子

例 1.1 常值函数

$$y=c$$

的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\{c\}$. 图 1.4 中以 $c=2$ 为例.

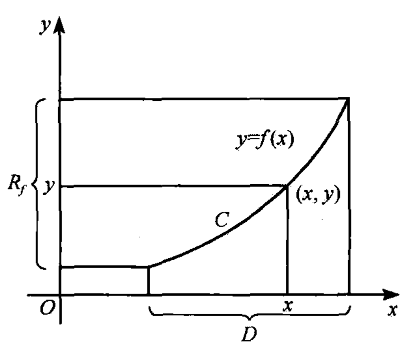

图 1.3

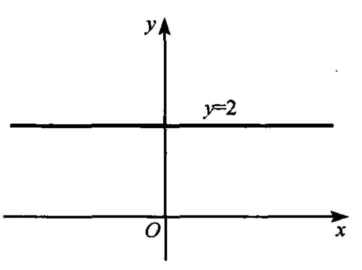

图 1.4

例 1.2 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域为 **R**,值域为$[0,+\infty)$(图 1.5).

例 1.3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域为 **R**,值域为$\{1,0,-1\}$(图 1.6).

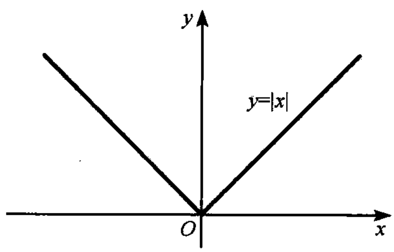

图 1.5

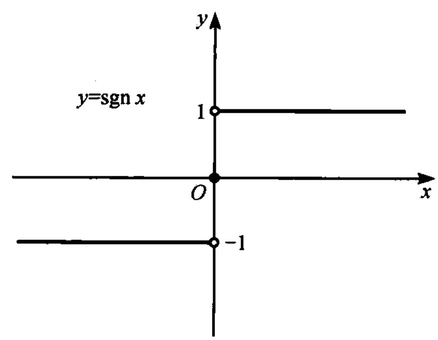

图 1.6

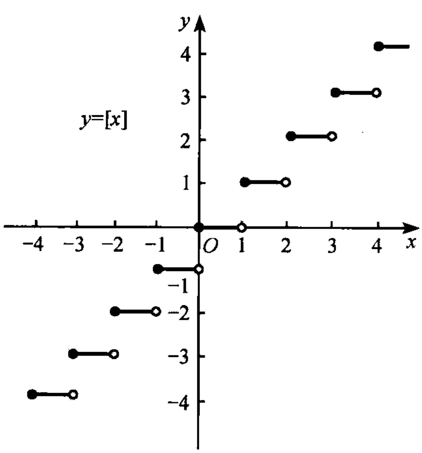

图 1.7

例 1.4 取整函数

$$y=[x]$$

表示取值为不超过 x 的最大整数. 它的定义域为 **R**,值域为整数集合 **Z**(图 1.7).

例 1.5 狄利克雷函数

$$y=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$$

的定义域为 **R**,值域为$\{1,0\}$.

3. 函数的几种特性

1) 单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义. 若对 I 内任意两点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,都有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad 或\ f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$是 I 上的**单调递增**(或**单调递减**)**函数**(图 1.8). I 称为 $f(x)$的**单调区间**. 单调递增函数与单调递减函数统称为**单调函数**.