

厦门大学经济学研究生教材

数理 经济学

Foundations of
Mathematical Economics

林致远 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

厦门大学经济学研究生教材

本书的写作得到以下方面的资金支持：

国家社会科学基金重大项目（08&JD034）

教育部人文社会科学重点研究基地重大项目（2009 JJD790038）

教育部人文社会科学一般项目（07JA790078）

数理 经济学

Foundations of
Mathematical Economics

林致远 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数理经济学/林致远编著. —北京:北京大学出版社,2011.1

(厦门大学经济学研究生教材)

ISBN 978 - 7 - 301 - 18087 - 7

I. ①数… II. ①林… III. ①数理经济学 - 研究生 - 教材 IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 225346 号

书 名:数理经济学

著作责任者:林致远 编著

策划编辑:贾米娜

责任编辑:孙 晔

标准书号:ISBN 978 - 7 - 301 - 18087 - 7/F · 2646

出版发行:北京大学出版社

地 址:北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址:<http://www.pup.cn>

电 话:邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752926

出版部 62754962

电子邮箱:em@pup.cn

印 刷 者:北京大学印刷厂

经 销 者:新华书店

730 毫米 × 980 毫米 16 开本 14.75 印张 265 千字

2011 年 1 月第 1 版 2011 年 1 月第 1 次印刷

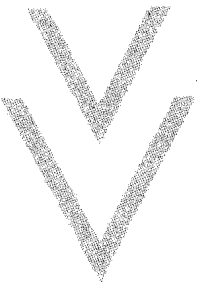
印 数:0001—3000 册

定 价:29.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010 - 62752024 电子邮箱:fd@pup.pku.edu.cn



丛书序言

三十余年来,我国一直在朝着市场化改革方向变革,并且初步建成了社会主义市场经济体制。处在这种大背景下,我国的研究 生培养模式也在不断变革,以寻求与市场经济相适应的培养模式。

作为这种改革和探索的一部分,自 2004 年起,我院按照国际化、规范化和本土化相结合的要求,对研究生培养模式进行了较大幅度的改革。其中一个重要内容,就是更新和调整了课程体系与 教学内容。

在已进行研究生教学改革实践的基础上,我院于 2006 年 6 月 启动了研究生教材建设计划,以便进一步规范课程体系和内容,进 一步提高研究生教学质量。为此,我院组织了研究生统开课程教材 的编撰工作。第一批开始撰写的是四本教材,即《数理经济学》、《高 级计量经济学导论》、《高级宏观经济学》与《高级微观经济学》。

在教材的编写过程中,我们总结和吸收了研究生教学实践中的 经验,并通过与国内外学者的学习和交流,参考国内外的相关书 籍,以及聘请国外长期担任这些课程教学的专家审阅书稿,从而使 这一系列教材成为适合我国国情的现代经济学教材。这一系列教 材不仅适用于厦门大学的经济学研究生,而且也可以作为其他院 校研究生的教学或参考用书。我们希望,这一系列教材能对我院 乃至我国的研究生教学质量的提高,起到重要的作用。

厦门大学经济学院

2009 年 8 月



序言

本书目标

本书是数学工具和经济模型的结合体,旨在为我国经济类研究生的“高级微观经济学”和“高级宏观经济学”课程的学习提供必要的经济数学基础。通过本书的学习,读者有望实现从中级水平到高级水平的平稳过渡,从而能够较为顺利地阅读高级微观经济学和高级宏观经济学的标准教材。^①

数学是现代经济学的语言,经济学借助数学刻画复杂的世界。对于许多开始接触高级水平的现代经济学课程的学人来说,如何跨越横亘在面前的数学工具这道门槛,通常是一个不小的挑战。本书试图从经济建模的视角来整合数学工具,并形成相对完整的概念体系。鉴于静态优化模型是经典微观经济理论的核心,动态优化模型是当代宏观经济理论的核心,而这两类模型在数学上恰好属于约束最优化问题的领域,为此,本书实际上是围绕着约束最优化这一数学问题和方法,对高级经济学的基本概念体系进行整合的。借助这一结构上的整合,读者可以更好更快地理解数理经济模型的精义之所在。

先修课程

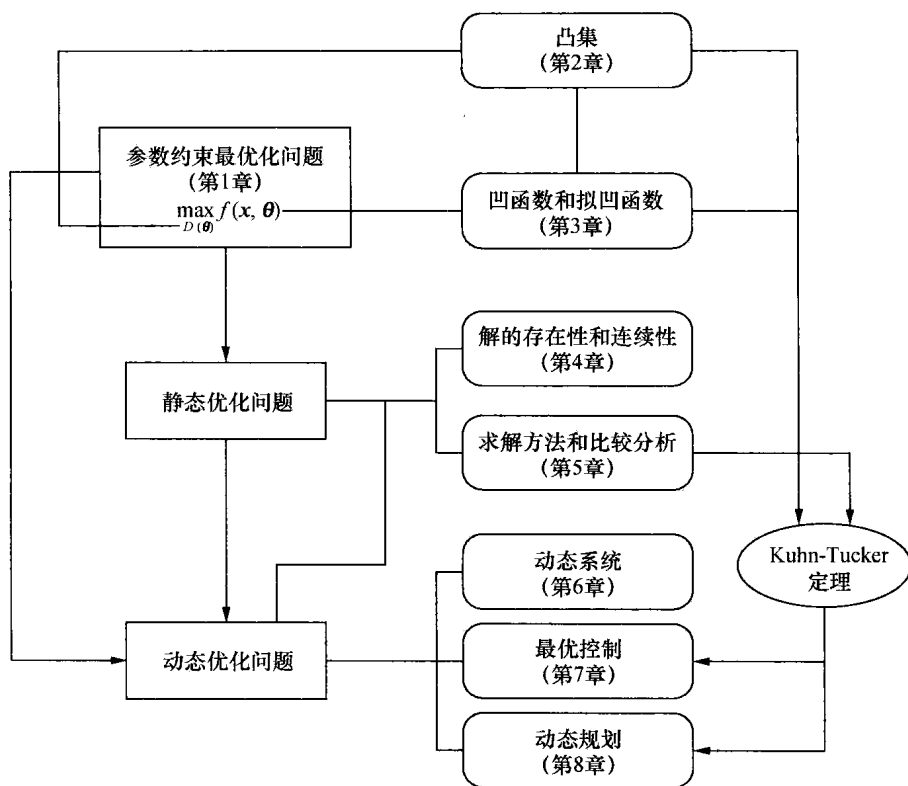
学习本书要求读者先修高等数学和中级经济学等课程。在高等数学方面,要求掌握微积分、线性代数和概率论等学科的一些基础知识。在这方面,我国当前经济类研究生入学考试中高等数学的要求提供了一种方便的参考尺度。在中级微观经济学方面,需达到平狄克和鲁宾菲尔德(2000)、范里安(2006)等标准教材所要求的水准;在中级宏观经济

^① 比如,高级微观经济学的标准教材:杰里和瑞尼(2002)、马斯-科莱尔等(2001)、瓦里安(1998)、蒋殿春(2006)等;高级宏观经济学的标准教材:罗默(2009)、布兰查德和费希尔(1992)、扬奎斯特和萨金特(2005)、巴罗和萨拉伊马丁(2000)等。

学方面,需达到布兰查德(2003)、曼昆(2009)、萨克斯和拉雷恩(1997)等标准教材所要求的水平。

本书的组织

经典微观经济理论以静态优化模型为核心,当代宏观经济理论以动态优化模型为核心,这两类模型可以归结为一类问题:参数约束最优化问题。下图反映了本书的基本组织框架:



全书围绕参数约束最优化问题这一对象展开分析,全书共分8章,基本内容如下:

第1章首先阐述数理经济模型的性质,随后介绍经济学中的参数约束最优化问题及其四个分析对象:解的存在性、解的连续性、求解方法和比较分析。

第2章和第3章分别介绍解决参数约束最优化问题的概念基础:作为约束的凸集和作为目标函数的凹函数和拟凹函数。

第4章和第5章是参数约束最优化模型在微观经济学中的具体表现形式:

静态优化问题。第4章解决模型的前两个问题:解的存在性和解的连续性;第5章解决模型的后两个问题:求解方法和比较静态分析。

第6章至第8章是参数约束最优化模型在宏观经济学中的具体表现形式:动态优化问题。第6章介绍离散时间动态系统和连续时间动态系统,这两类系统既可以独立用于刻画动态经济的特征,也经常作为动态优化问题之约束条件的形式而出现;第7章阐述最优控制原理在解决连续时间动态优化问题中的应用;第8章介绍动态规划原理在解决离散时间动态优化问题中的应用。

致谢

本书的写作是多方敦促和帮助的结果。在此,首先感谢厦门大学经济学院的李文溥教授,由于他的构想和提议,本书成为经济类研究生课程系列教材的组成部分。其次,感谢助教龚丽贞博士生为整理和配备本书习题及其解答而付出的艰辛劳动。再则,感谢过去数年间曾经听过笔者授课的学生,正是由于他们的期待、宽容以及所提的无数建议,才使最初的讲义在一次次易稿中变成今天的这部作品。最后,感谢北京大学出版社经济与管理图书事业部的人力和资金支持。

尽管写教材看来不过是资料汇编,但于笔者而言却绝对是一件苦差事儿。尽管笔者为本书的写作倾注了大量心力,但囿于自身的学识和视界,书中缺陷和错漏之处恐怕在所难免,恳请使用本书的读者提出宝贵意见,以便将来做进一步的修改和补充。

林致远

2010年4月6日于厦门大学海滨

| | |
|--------------------------------|-----|
| 第 1 章 数理经济学的性质 | 1 |
| 1.1 数学与经济学 | 1 |
| 1.2 数理经济模型 | 4 |
| 1.3 最优化问题 | 8 |
| 习题 | 14 |
| 第 2 章 赋范线性空间与凸集 | 15 |
| 2.1 赋范线性空间 | 15 |
| 2.2 凸集 | 27 |
| 2.3 一些重要例子 | 31 |
| 2.4 保持凸性的运算 | 35 |
| 2.5 分离超平面和支撑超平面 | 36 |
| 习题 | 39 |
| 第 3 章 凹函数与拟凹函数 | 43 |
| 3.1 光滑函数与齐次函数 | 43 |
| 3.2 光滑函数的凹性 | 51 |
| 3.3 保持凹性的运算 | 60 |
| 3.4 拟凹函数 | 61 |
| 习题 | 68 |
| 第 4 章 解的存在性与连续性 | 72 |
| 4.1 连续性的概念 | 72 |
| 4.2 解的性质 | 78 |
| 习题 | 84 |
| 第 5 章 拟凹规划与比较静态分析 | 85 |
| 5.1 Kuhn-Tucker 定理 | 85 |
| 5.2 最优化问题的变形 | 90 |
| 5.3 比较静态分析 | 94 |
| 5.4 单调比较静态分析 | 100 |
| 5.5 对偶原理 | 104 |
| 习题 | 108 |
| 第 6 章 动态系统 | 111 |
| 6.1 基本概念 | 111 |

| | | |
|--------------|-----------------------------|------------|
| 6.2 | 微分方程 | 117 |
| 6.3 | 差分方程 | 122 |
| 6.4 | 线性方程组 | 125 |
| 6.5 | 二维线性系统的稳定性 | 132 |
| 6.6 | 非线性自控系统 | 140 |
| | 习题 | 149 |
| 附录 | 利用 MATLAB 求解动态系统 | 152 |
| 第 7 章 | 最优控制 | 159 |
| 7.1 | 最优控制问题 | 159 |
| 7.2 | 自由端点问题 | 167 |
| 7.3 | 各种终结条件 | 175 |
| 7.4 | 最优控制原理的经济学情形 | 179 |
| 7.5 | 最大值原理 | 185 |
| | 习题 | 191 |
| 第 8 章 | 动态规划 | 194 |
| 8.1 | 递归确定性模型 | 194 |
| 8.2 | 递归随机模型 | 206 |
| | 习题 | 215 |
| 附录 | 动态优化模型的数值计算:MATLAB 程序 | 217 |
| | 参考文献 | 222 |
| | 符号表 | 224 |

数学是现代经济学的语言,经济学借助数理模型刻画复杂的世界,建立和分析数理模型是经济学家的首要工作。简单地说,数理经济学(mathematical economics)就是指采用数学符号描述经济问题,并且运用已有的数学原理进行推理的分析方法及其体系。毋庸置疑,现实的经济世界是复杂的,既然如此,我们为什么、以及如何能够运用数学这种简化的工具来解释复杂的经济世界?作为全书的开篇,本章将对上述问题作出回答。

本章安排如下:第 1 节首先简要介绍现代经济学的数学化历程,随后说明数学之于经济学的意义以及经济学数学化的代价;第 2 节描述数理经济模型的结构以及建模的基本方法;第 3 节讨论数理经济学的基本问题——参数约束最优化问题,并在此基础上探讨分别作为高级微观经济学和高级宏观经济学之分析基础的两种方法:静态优化和动态优化。

1.1 数学与经济学

1.1.1 经济学的数学化

20 世纪 30 年代以后,经济学家之间逐渐开始利用数学工具推导论点和得出结论,他们常用的数学工具是几何学和代数学(尤其是微分和矩阵)。在这个意义上,经济学开始了数学化的历程。20 世纪 30 年代的时候,还只有少量使用了数学方法的经济学文章发表在一流杂志上;但到了 70 年代,经济学文章不用数学而能够具有影响力,就是很不寻常的事了。今天,经济学界普遍认为,高等数学是从事严肃的学术研究必不可少的技能。不掌握数学技能,就无法跟上经济学的最新发展。这种变化如此深刻,说它是一场革命也不为过。^①

不管我们在“经济学是不是一门科学”这一问题上还存有多大的分歧,一个不能忽视的事实是:经济学的数学化源于诸如费雪(Fisher, Irving)等经济学家试图像物理学家那样研究经济学的不懈努力,他们关注于如何使经济学沿着物理学的路子实现科学化。伴随时光的流逝,如今的经济学在总体上已经具备了

^① 巴克豪斯(2007, pp. 254—289)。

类似物理学研究的架构:第一步,经济学家借助数学模型,提出理论假说,试图从某个角度刻画自己眼中的经济事实;第二步,经济学家对观察结果进行概括,用实际数据(一般指统计数据)检验理论假说的真伪。由此,数学在经济学中具有两个方面的应用:一是作为理论分析(theoretical analysis)的工具,二是作为经验分析(empirical analysis)的工具。前者是数理经济学探讨的对象,后者主要是经济计量学(econometrics)探讨的对象。此外,经济学家们发现,一大批研究工作都是在分析非常普遍的理论模型的性质,详尽的经验分析有时则被认为是多余的。一个变得愈益寻常的事情是,经济学家被划分为理论经济学家、经济计量学家或应用经济学家(这些人往往就是经济计量学家)。理论经济学家可以忽略经验分析工作,因为检验理论是经济计量学家的任务。当经济学家撰写包含了理论和经验两方面内容的文章时,一种越来越通行的做法是:把文章分成不同部分,一部分建立理论模型,一部分进行经验分析。^①

1.1.2 数学之于经济学的意义

经济学家借助模型解释复杂的世界,建立和分析模型是经济学家的首要工作。经济模型抛开无关紧要的细节,集中于探讨经济问题的核心方面。经济模型的建立可以采取各种形式,比如,斯密(Smith, Adam)使用文字描述制针业的情形,阐释劳动分工与专业化的原理;费雪(Fisher, Irving)用天平模型表述货币数量论,用水槽模型反映一般均衡;菲利普斯(Philips, Bill)采取不同的水槽模型展现国民经济中收入的循环流动;希克斯(Hicks, John R.)提出简单的数学模型(IS-LM模型),揭示凯恩斯(Keynes, John M.)的《就业、利息与货币通论》与古典经济学的差别。在当代经济分析中,使用文字描述或物理模型显然是不够的,今天的经济模型几乎无一例外是数学模型。

当然,任何一种理论分析,无论采取何种表述形式,其目的无非是从一些给定的假设或公理出发,通过推理过程得出结论。从这个意义上说,经济理论研究到底是采用文字描述,还是利用物理模型,或者是运用数学符号,其实并没有实质的差别。不过,人们公认的是,与文字描述和使用物理模型等相比,使用数学符号和方程更便于演绎推理,而且能够使表述更为言简意赅。

由于数学定理通常是按照“如果—那么”的形式加以陈述的,因此,为了导出所运用定理的“那么”(结论)部分,分析者必须确保“如果”(条件)部分与所采纳的明确假设是一致的。这一做法使得数理模型在经济研究中呈现出又一优势:它促使分析者在推理的每一阶段都做出明确的假设,这让直觉判断变得清

^① 巴克豪斯(2007, p. 257)。

晰,让理论观点变得透明。更重要的是,它揭示了直觉判断的局限性,为直觉判断划定了边界,而且有时能够挖掘出与我们的直觉判断相悖的特例。

此外,正式的数理模型有助于交流。只要假设前提明确,推理过程正确,最后的结论就是清楚的。这一做法便于人们把更多时间花在推导结论、应用理论和拓展模型上,而不是将大量的心思花在争论“作者的原意是什么”这类问题身上。拿凯恩斯的《通论》与随后出版的冯·诺依曼(Von Neumann, John)和摩根斯坦(Morgenstern, Oskar)的《博弈论与经济行为》来说吧,《通论》中正式的数学模型的缺乏,使得后来的学者把大量的精力花在争论“凯恩斯说的到底是什么”上。与此相对照,近年来博弈论的迅猛发展在很大程度上归功于正式建模的优势。博弈论吸引了大量熟悉建模的分析者,由于前提明确,分析者很少把时间花在争论其他人著作的原意上,而是将主要精力花在结论的推导和模型的应用方面。无疑,正式建模加快了经济学中博弈论的创新步伐。

1.1.3 经济学数学化的代价

数理模型的应用使经济学家得以解决许多曾经困扰了很多人的问题,这些问题光用文字、图形和简单的数学是解决不了的。经济学家以前插不进嘴的一些话题,如今也对他们开放了。然而,代价总是有的。不适合放进数学框架的一些问题即使没有遭到忽略,至少也被边缘化了。这种例子可谓比比皆是,由于数学建模上的困难,像斯密关于经济增长源于专业化分工的论断、哈耶克(Hayek, F.)关于计划经济不可持续的洞察、熊彼特(Schumpeter, Joseph A.)关于毁灭性创新的观点,以及科斯(Coase, Ronald)关于企业的性质的见解等一系列精辟的经济思想,曾一度从正统经济学的殿堂上销声匿迹。只是在近来,或者是由于数学手段的高级化,或者是由于理论的进展和实践的变革,这些思想才重新焕发出勃勃生机。从这个意义上说,经济学的数学化让经济理论变得狭隘了。经济理论变得更加简单,逻辑性更强,数量也更多了。与此同时,经济理论与经验数据的结合方式也发生了戏剧性的变化。尽管老套的、非正规的办法没有被一网打尽,但对数理模型进行统计检验的方法逐渐成为标准的程序。

关于经济学数学化的一个常见批评是:借助数学推导的理论必然是不现实的。遗憾的是,这种批评算不上一种有效的批评。众所周知,现实的世界是复杂的,为了对我们所关注的问题的核心进行研究,我们需要对现实世界进行必要的抽象,以找出最重要的因素及其联系,而刻画这些因素及其联系的论断就是所谓的理论假说。从这个意义上说,理论在其本质上就是不现实的。事实上,构建理论的要点在于尽可能简化,恰恰是由于理论的不现实,才使我们能够免于陷入现实世界中存在的种种复杂性而难以自拔。正如文艺批评家斯特雷奇(Strachey,

L.)所说的“省略是所有艺术的开始”那样,省略也是良好经济分析的开端。理论的目的在于它能够使我们集中思考那些可能会影响某种行为的关键因素,从而更好地理解真实世界的复杂情形。因此,“不现实”不仅适用于数理性的经济理论,而且适用于非数理性的经济理论。这表明,关于数理性的经济理论缺乏现实性的批评不过是一种陈词滥调,不能视为一种有效的批评。类似地,将数学作为表述经济理论的方法视为“不现实的”的方法,同样是缺乏意义的。

1.2 数理经济模型

1.2.1 超越几何学方法

按照数理经济学的定义,使用简单的几何学方法推导经济理论结果当然也属于数理经济学的范畴,不过,在习惯上,数理经济学是超越简单的几何学方法的,而主要是指运用像矩阵、微积分、微分方程、差分方程等代数方法来描述经济问题并进行演绎推理的一种方法。这就引出一个问题:为什么要超越几何学方法?

无疑,与代数方法相比,几何分析具有直观性的重要优点,但它也苦于严格的维数限制。比如,在讨论无差异曲线时,标准的假设是消费者仅购买两种商品,这一简化的假设并非出于自愿,而是不得已而为之,因为要绘出三维空间的几何图形是十分困难的,而要绘出更多维空间的几何图形则是不可能的。因此,要研究三种以上商品的更为一般的情形,我们必须求助于更加灵活的代数方法。仅凭这一个理由,就足以使我们必须研究几何学以外的数学方法。

至此,我们实际上已经谈及数理建模的如下优点:

- 便于利用已有的数学原理进行演绎推理;
- 表述语言更加精练、准确;
- 促使我们明确陈述所有的假设;
- 有时能够挖掘出与我们的直觉判断相悖的特例;
- 便于交流,减少语义上的无谓争论;
- 使我们能够处理 N 个变量的一般情形。

为了获取数理建模所带来的巨大财富,我们首先必须掌握必要的数学工具。本书的目的就是将当前高级经济学中最常用的数学方法汇聚在一起,按照逻辑顺序将它们组织起来,完整地解释这些方法,并且阐述如何将这些方法应用于经济分析。

1.2.2 经济模型^①

经济学家通过建立模型刻画复杂的现实世界。**经济模型**(economic models)是对现实世界的一种抽象,它使我们能够用一种可以掌控的方式描述经济问题的基本特征。经济模型通常由以下五个要素构成:

1. **经济主体(economic agents)**,包括消费者、工人、厂商和政府等。他们依据决策能力和对目标的追求而显现出各自的特征。

2. **经济环境(economic environment)**。经济主体在一个影响其行为选择且包含诸多因素的经济环境中追求其目标。经济环境对经济主体产生重要的影响,但又在经济主体的可控能力之外。比如,在竞争性市场上,个别消费者无法操纵其所消费的商品的价格。

3. **选择(choices)**。经济主体的选择反映他们在面对所处的经济环境时如何进行判断,以追逐最优化目标。在经济建模过程中,**决策理性**——即以最有效的方式追求目标——的假设是非常有用的。在有些应用中,通过直接表示选择来建模,如消费者效用最大化模型;而在有些应用中,则以选择的结果来建模,如供求模型或一些宏观经济模型。

4. **均衡解(equilibrium solution)**。均衡是经济主体的选择及其相互作用造成的后果,模型达成均衡表明,除非经济环境发生变化,否则经济变量不会有变动的趋势。均衡一般可以用来表示两类情形:一是表示经济主体的最优决策是如何由经济环境决定的,也即,给定目标和经济主体可控能力之外的因素,经济主体做出什么选择;二是表示经济变量(比如,供求模型中的价格和数量,或者宏观经济模型中的国内生产总值)是如何由经济环境决定的。

5. **分析(analysis)**。对经济环境的变动如何影响均衡的分析,可能是经济模型中最重要的组成部分。经济分析的目的在于预测经济行为的变化,借助这种预测,经济学家能够回答重要的经济问题。以政策效应问题为例,对政府的政策如何导致厂商和消费者的均衡选择发生变化,有助于对这些政策做出评估。

本书将按照上述结构建立数理经济模型。为大致了解经济模型的具体构成,我们来考察一下厂商决策的例子。在模型中,厂商是一个寻求利润最大化目标的经济主体,他所面临的经济环境包括:生产技术、投入品的供应清单、产出的需求曲线、可能的税收或政府管制等。在这种环境下,厂商可以作出多种选择。投入品的使用、产出水平、研究与开发支出、广告支出等都可以作为厂商的选择变量。这一模型的均衡解将反映厂商的决策是如何由经济环境决定的。最后,

^① 参见 Baldani *et al.* (1996, ch. 1)。

一旦模型建成,该模型的价值取决于其预测能力。比如,我们可能想知道,提高工薪税将如何影响厂商的劳动与资本组合及其产出水平,或者,我们可能希望预测技术变化对利润水平的影响。

建模是当代经济分析的基础。这里再次强调,经济模型在本质上是不完整的,并且在某种程度上是不现实的。没有一个模型能够完全描述所要分析的经济问题,因为完全现实的模型会被自己压垮:它太复杂,以至于无法求出均衡解,或者无法进行预测。理想的模型简单到足以求解,复杂到可以预测,该预测能够被观察事实或统计数据所证实或证伪。

在实践中,经济模型的复杂程度可以通过多种方法加以控制:

1. 简化数学假设。比如,假定产品需求曲线是线性的。
2. 将特定要素放在经济环境而不是经济主体的选择集之中。比如,假定产品质量由技术决定,而不是由厂商决定。
3. 假定有些问题已经在其他的模型中得以解决。比如,将厂商的成本刻画为产出的函数,并且假定,无论产出水平如何,厂商总是通过调整投入以最小化其成本。
4. 可以包含以上所有方法,以便按步骤进行建模。这意味着以非常简单的假定开始建模,然后放松假定,再次求解。

1.2.3 数理模型

数理模型的建立和以上经济模型的五个要素相平行,不过,数理模型有其自身的术语和定义。这里通过拓展厂商决策的例子加以说明。

首先,假定厂商的目标是实现利润最大化。在数学上,利润方程表示为

$$\Pi = TR - TC$$

其中, Π 为利润,TR为总收益,TC为总成本。

其次,界定厂商所处的经济环境。就建模而言,可供选择的经济环境包括:第一,是竞争性市场?还是垄断市场?第二,是否存在研发投入?是否存在广告投入?第三,厂商是否受到政府管制或税收的约束?

为了让例子变得简单一些,可以对经济环境做出如下假设:

- (a) 厂商处于完全竞争市场;
- (b) 厂商的生产技术是固定的;
- (c) 不管产出水平如何,厂商已经(在模型之外)选择了使其成本最小化的劳动-资本组合;
- (d) 不存在税收或管制。

下面,将以上假设用数学表示:假设(a)意味着厂商能够以市场价格 P 出售

任意数量 q 的产品；假设 (b) 和 (c) 表明厂商的总成本可以视为产出的函数 $C(q)$ ；假设 (c) 意味着我们可以在厂商不受政府影响的情况下建模。

于是，厂商所处的经济环境可以在数学上表示为

$$TR = Pq, \quad TC = C(q), \quad \Pi = Pq - C(q)$$

这里，我们有必要介绍两种经济变量——外生变量和内生变量——之间的重要差别。外生变量 (exogenous variables) 指的是模型中不受经济主体影响或控制的变量，即由模型以外的因素（一般指经济主体所处的经济环境）决定的变量，通常指给定的参数 (parameters)；内生变量 (endogenous variables) 在模型中直接或间接地依赖于经济主体的选择，也即，内生变量是由模型决定的变量。在本例中，价格是外生变量，它不受厂商控制；而产出是内生变量，它是由追求利润最大化的厂商选择的变量；利润也是内生变量，因为它依赖于厂商的产出选择。

外生变量和内生变量的区分对于理解数理经济模型是相当重要的。遗憾的是，如何对二者进行区分，经常让刚开始接触数理经济学这门学科的读者感到困惑。主要原因在于，并没有一张清单会告诉你哪些变量是外生的，哪些变量是内生的。相反，变量是外生还是内生，往往随模型而定，因模型而异。实际上，在建模过程中，经济学家总是根据所研究问题的需要而设定外生变量和内生变量的。这意味着，在一个模型中作为外生的变量，在另一个模型中可能是内生的。比如，在这个例子中，价格是外生变量；而在竞争性市场模型中，价格则是由市场供给和需求共同决定的内生变量。

现在，让我们回到例子中。厂商将通过选择最优产出以实现利润最大化的目标。这里的最优产出 (optimal output)，指的是给定市场价格下能够给厂商带来最大利润的产出水平。在数学上，我们可以应用微分来推导这类问题的解。不过，现在我们暂时不谈微分推导过程，而是集中于关注这一问题的解，即均衡解。该解不是单一的产出水平，而是一个依赖于市场价格 P 的最优产出 q^* 。

将均衡解表示为供给函数

$$q^* = f(P)$$

该函数就是这一简单模型的解。不难看出，均衡解的基本特征就是将内生变量表示为外生变量的函数。也即，我们已经解决了厂商的行为表现或者说选择如何依赖于经济环境的问题。

一旦解出内生变量，我们就可以预测环境的变化将会怎样影响该变量。在这一与时间变化无关的所谓静态经济模型中，这种分析方法称为比较静态分析 (comparative statics)。比较，是因为当参数发生变化时，我们要对原有的均衡解和新的均衡解进行比较；静态，是因为我们不对一个均衡移向另一个均衡的动态路径加以描述。当然，在经济变量随时间变化的动态经济模型中，除了进行均衡

解的比较之外,我们还经常要刻画从一个均衡移向另一个均衡的动态路径,这种方法称为**比较动态分析**(comparative dynamic analysis)。

在数学上,比较静态分析的主要做法是包括将所求得解函数对参数进行求导。在本例中,比较静态分析的结果是产出将如何对市场价格的变化作出反应,这可以表示为

$$\frac{dq^*}{dP} = f'(P) \quad (1.1)$$

在运用比较静态分析方法进行预测时,在多数情形下,我们感兴趣的是**定性结果**(qualitative results),即外生变量发生变动时导数的符号。根据符号,我们能够识别内生变量的变动方向。只是在少数场合中,我们才可能感兴趣于**定量结果**(quantitative results),即变动的实际数值大小。主要原因在于,数理模型是抽象的,其本质上难以和现实的世界相吻合,这意味着,我们是难以放心地运用数值结果进行预测的。

那么,我们该如何获得比较静态分析的定性预测结果呢?在本例中,我们要做的是如何确定式(1.1)中的导数的符号,即价格的提高是否会增加(或减少)产出。目前,我们还不会介绍如何回答这一问题的工具和方法,在后面的章节中,我们将谈到确定导数符号和进行定性预测的几种方法。

1.3 最优化问题

1.3.1 符号约定

本书经常要用到向量、矩阵、单值函数、向量值函数等概念,为避免发生混淆,这里对相关符号做统一的约定。

除了少数的例外,数学上的所有向量都视为列向量。为表示行向量,一般采用转置算子 T 。于是,若向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 为 N 维列向量,则 \mathbf{x}^T 为 N 维行向量。在本书中,向量用黑体小写字母表示,不同的向量可以用相同的符号表示,并且用上标如 \mathbf{x}^1 、 \mathbf{x}^2 等加以区分。

在具体列示向量或矩阵时,我们通常使用方括号“ $[\]$ ”,各分量之间用空格隔开。为了书写上的方便,我们还使用小括号“()”来表示列向量,各分量之间用逗号“,”隔开,也就是说, N 维列向量 \mathbf{x} 可以表示为

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \equiv (x_1, \dots, x_N)$$